Formes de Jacobi de deux variables: Formules de distribution et applications arithmétiques

Abdelmejid BAYAD
abayad@maths.univ-evry.fr
Département de mathématiques
Université d'Evry

Table des matières

1 Formes de Jacobi

1) Formes holomorphes de Jacobi d'une variable ?

$\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathbf{Im}(\tau) > 0\}$

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{H} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & (\tau, z) & \to & \Phi(\tau, z) \end{array}$$

Conditions :

i) Φ **est holomorphe** $/z$

ii) (Translation) $\Phi(\tau, z+p\tau+q) = e^{-2\pi i m(p^2\tau+2pz)}\Phi(\tau, z), p, q \in \mathbb{Z}, m =$**indice**

iii) (Modularité) $\Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^k e^{2\pi i \frac{mcz^2}{c\tau+d}} \Phi(\tau, z)$,
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}), k =$ **poids** .

iv) (Développement de Fourier) $\quad \Phi(\tau, z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leqslant 4mn}} a_{n,r} e^{2\pi i(n\tau+rz)}$.

REMARQUES :

Croisement des fonctions elliptiques et formes modulaires ?

i) $\tau \to \Phi(\tau, 0)$ **forme modulaire ordinaire de poids** k**.**

ii) $m = 0$: Φ **forme modulaire d'une variable.**

iii) Le quotient de deux formes de Jacobi de même indice = fonction elliptique.

iv) Structure de l'anneau des formes de Jacobi est établie par Eichler et Zagier.

Exemples :

i) <u>Séries d'Eisenstein</u> :

$$E_{k,m}(\tau, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d)\in\mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(c\tau + d)^k} e^{2\pi i m\left(\lambda^2 \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2\lambda \frac{z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d}\right)}$$

ii) <u>Séries Thêtas</u> : $\theta_{x_0}(\tau, z) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^N} e^{2\pi i(Q(x)\tau + B(x,x_0)z)}, x_o \in \mathbb{Z}^N$**,** N **pair.**

où $Q : \mathbb{Z}^N \to \mathbb{Z}$**, forme quadratique définie positive et** $B =$ **sa forme bilinéaire associée.**

- de poids $N/2$

- d'indice $Q(x_0)$**.**

<u>Références</u> : - M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms*, **Progress in math, 1985.**

- D. Zagier, Cours au Collège de France (2004-2005).

Cette théorie s'est avérée être très utile dans plusieurs domaines de la mathématique(Singularités, cobordisme, formes de Siegel, Algèbres de Kac-Moody, signature...) et de la physique théorique.

2) <u>Formes méromorphes de Jacobi de deux variables</u> ?

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{H} \times \mathbb{C}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & (\tau, z, \varphi) & \rightarrow & \Phi(\tau, z, \varphi) \end{array}$$

<u>Conditions</u> :

i) Φ **méromorphe** $/z$

ii) $\frac{\Phi(\tau, z+\rho, \varphi)}{\Phi(\tau, z, \varphi)}$, **est indépendante de** z**,** $\rho \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.

iii) $\frac{\Phi(\tau, z, \varphi+\rho)}{\Phi(\tau, z, \varphi)}$, **est indépendante de** φ**, ,** $\rho \in \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$.

iv) $\Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, \frac{\varphi}{c\tau+d}\right) = (c\tau + d)^k e^{2\pi i \frac{mz\varphi}{c\tau+d}} \Phi\left(\tau, z, \varphi\right)$,

$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma =$ **sous-groupe d'indice fini de** $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$**.**

v) " Développement de Fourier"/z.

<u>Exemple (Zagier)</u> :(Invent.math, 104, 1991,pp.449-465)

On pose : $q_x = e^{2\pi i x}, x \in \mathbb{C}$

$$\mathbf{\Phi}(\tau, \mathbf{z}, \varphi) = \frac{\theta'(\mathbf{0})\theta(\mathbf{z}+\varphi)}{\theta(\mathbf{z})\theta(\varphi)}$$

$$\theta(z) = q_\tau^{1/8}(e^{z/2} - e^{-z/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q_\tau^n)(1-q_\tau^n e^z)(1-q_\tau^n e^{-z}),$$

i) Forme de Jacobi méromorphe $/z$ **et** $/\varphi$

ii)

$$\Phi(\tau, z+n\tau+s, \varphi+m\tau+r) = q_\tau^{-mn} e^{-mz-n\varphi}\Phi(\tau, z, \varphi), \forall m, n, r, s \in \mathbb{Z}.$$

iii)

$$\Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, \frac{\varphi}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)e^{2\pi i \frac{z\varphi}{c\tau+d}}\Phi\left(\tau, z, \varphi\right), \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

<u>Application</u> : Théorie des périodes des formes modulaires.

2 Etude des formes de Jacobi : $D_L(z;\varphi)$

Notations et définitions :

Soit L un réseau complexe, (w_1, w_2) une base de L sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$.

Forme E_L : $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée associée à L

$$\mathbf{E_L(u,v) = \frac{1}{2i}\frac{\bar{u}v - \bar{v}u}{a(L)}, (u,v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}}\ .$$

$$\textbf{où} \qquad a(L) = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} w_1 & \overline{w}_1 \\ w_2 & \overline{w}_2 \end{vmatrix} = \frac{w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1}{2i} > 0$$

indépendant du choix de la base (w_1, w_2) orientée.

Fonction êta de Legendre

$$\eta(\mathbf{z},\mathbf{L}) = \mathbf{s_2(L)z} + \frac{\pi}{\mathbf{a(L)}}\bar{\mathbf{z}}, \qquad s_2(L) = \lim_{s\to 0}\sum_{\omega\in L\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^2|\omega|^{2s}}.$$

$\Rightarrow$ **Généralisation de la relation de Legendre :** $\omega_1\eta(\omega_2, L) - \omega_2\eta(\omega_1, L) = 2\pi i.$

Fonction de Klein

$$\mathcal{K}_{\mathbf{L}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z}\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}\eta(\mathbf{z},\mathbf{L})}\prod_{\ell\in\mathbf{L},\ell\neq\mathbf{0}}(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{z}}{\ell})\mathbf{e}^{\frac{\mathbf{z}}{\ell}+\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{z}}{\ell}\right)^{2}}$$

On pose : $e(x) = e^{2\pi ix}, x \in \mathbb{C}$

Définition : $D_L(z;\varphi) = e(E_L(z,\varphi)/2)\dfrac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}, \forall z, \varphi \in \mathbb{C} \setminus L.$

Propriétés des formes $D_L(z;\varphi)$:

Théorème 2.0.1

i) D_L ***est méromorphe*** $/z$***, non analytique*** $/\varphi$.

ii) (**Périodicité**$/\varphi$***) :*** $D_L(z;\varphi+\rho) = D_L(z;\varphi), \forall \rho \in L$

iii) (**Ellipticité**$/z$***) :*** $D_L(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho,\varphi))D_L(z;\varphi), \forall \rho \in L$

iv) (**Equation fonctionnelle*****) :*** $D_L(z;\varphi)e(-E_L(z,\varphi)) = D_L(\varphi;z).$

v) homogène de degré -1 ***:*** $D_{\lambda L}(\lambda z;\lambda\varphi) = \lambda^{-1}D_L(z;\varphi)$ ***pour tout*** $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

vi) (**Modularité*****) : On pose*** $D_\tau(z;\varphi) := D_{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}(z;\varphi).$

$$D_{\frac{a\tau+b}{c\tau+d}}\left(\frac{z}{c\tau+d};\frac{\varphi}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)D_\tau(z;\varphi), \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \boldsymbol{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

vii) (**Produit infini*** ***) :*** $L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, \tau = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

$$D_L(z,\varphi) = \frac{2\pi i}{w_2} q_{\frac{z}{w_2}}^{\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{\varphi}{w_2}\right)}{\operatorname{Im}\tau}} \times \frac{\left(q_{\frac{z+\varphi}{w_2}}^{\frac{1}{2}} - q_{\frac{z+\varphi}{w_2}}^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(q_{\frac{z}{w_2}}^{\frac{1}{2}} - q_{\frac{z}{w_2}}^{-\frac{1}{2}}\right)\left(q_{\frac{\varphi}{w_2}}^{\frac{1}{2}} - q_{\frac{\varphi}{w_2}}^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\prod_{n\geqslant 1} \frac{(1-q_\tau^n)^2\left(1-q_\tau^n q_{\frac{z+\varphi}{w_2}}\right)\left(1-q_\tau^n q_{\frac{z+\varphi}{w_2}}^{-1}\right)}{\left(1-q_\tau^n q_{\frac{z}{w_2}}\right)\left(1-q_\tau^n q_{\frac{z}{w_2}}^{-1}\right)\left(1-q_\tau^n q_{\frac{\varphi}{w_2}}\right)\left(1-q_\tau^n q_{\frac{\varphi}{w_2}}^{-1}\right)}$$

viii) (**Développement de Fourier*** ***)***

$$D_L(z;\varphi) = \frac{\pi}{w_2} q_{\frac{z}{w_2}}^{\frac{\operatorname{Im}\left(\frac{\varphi}{w_2}\right)}{\operatorname{Im}\tau}} \left(\boldsymbol{cot}\left(\frac{\pi z}{w_2}\right) + \boldsymbol{cot}\left(\frac{\pi\varphi}{w_2}\right) + 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n} \boldsymbol{sin}\left(2d\frac{\pi z}{w_2} + \frac{2n}{d}\frac{\pi\varphi}{w_2}\right) q_\tau^n\right).$$

***ix) (*Développement de Laurent *)* $D_\tau(z;\varphi) := D_{\mathbb{Z}\tau+\mathbb{Z}}(z;\varphi)$.

$$D_\tau(z;\varphi) = \sum_{k\geqslant 0} d_k(\varphi) z^{k-1}, \quad d_0(\varphi) = 1,$$

avec

$$\frac{(k-1)!}{(2\pi i)^k} d_k(\varphi) = \frac{1}{k} B_k \left(\frac{\mathrm{Im}(\frac{\{\varphi\}}{w_2})}{\mathrm{Im}\,\tau} \right) + \frac{q_{\{\varphi\}}}{q_{\{\varphi\}-1}} \left(\frac{\mathrm{Im}(\frac{\{\varphi\}}{w_2})}{\mathrm{Im}\,\tau} \right)^{k-1}$$

$$-\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{q_{\{\varphi\}} q^m}{1 - q_{\{\varphi\}} q^m} \left(\frac{\mathrm{Im}(\frac{\{\varphi\}}{w_2})}{\mathrm{Im}\,\tau} + m \right)^{k-1} - \frac{q^{-1}_{\{\varphi\}} q^m}{1 - q^{-1}_{\{\varphi\}} q^m} \left(\frac{\mathrm{Im}(\frac{\{\varphi\}}{w_2})}{\mathrm{Im}\,\tau} - m \right)^{k-1} \right),$$

$\forall k \geqslant 1$.

<u>Récurrence pour les </u> : $d_{2n}(\varphi)$

$$d_2(\varphi) = \frac{1}{2} d_1(\varphi)^2 - \frac{1}{2}\wp_L(\varphi), d_{2n}(\varphi) = \frac{(2n-1)}{2} G_{2n}(L) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n-1} (-1)^i d_i(\varphi) d_{2n-i}(\varphi),$$

$$G_{2n}(L) = \sum_{\omega \in L\setminus\{o\}} \frac{1}{|\omega|^{2n}}, \quad \forall n \geqslant 2,$$ ***Séries d'Eisenstein*** .

x) Soit $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$ ***un diviseur principal modulo L. Alors toute fonction elliptique pour L et ayant pour diviseur*** $\mathcal{D}$***, est égale, à une constante multiplicative non nulle près, à la fonction***

$$g_{\mathcal{D}}(z; L) = \prod_{a_i \notin L} D_L(z; -a_i)^{n_i}.$$

- Exemple : $\wp'_L(z) = -2 \prod_{\bar{t} \in \frac{1}{2}L/L \setminus \{\bar{0}\}} D_L(z; t),$

xi) (**Racine carrée tordue*****) :*** $D_L(z, \varphi) D_L(z, -\varphi) = \wp_L(z) - \wp_L(\varphi).$

xii) (*Distribution additive*) : Soient* L *et* Λ *deux réseaux tels que* $L \subset \Lambda$ *et* $[\Lambda : L] = l$*.

$$\sum_{\bar{t} \in \Lambda/L} D_L(lz; \varphi + t) = D_\Lambda(z; \varphi)$$

$$\sum_{\bar{t} \in \Lambda/L} D_L(z + t; l\varphi) e(-E_L(t, l\varphi)) = D_\Lambda(z; \varphi).$$

xiii) (*Distribution multiplicative*) : Soient* L *et* Λ *deux réseaux tels que* $L \subset \Lambda$*.

On définit : $\mathcal{K}(z; L, \Lambda) = \frac{\mathcal{K}_L(z)^{[\Lambda:L]}}{\mathcal{K}_\Lambda(z)}$.

$$D_\Lambda(z; \varphi) = \mathcal{K}(z; L, \Lambda) \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L} D_L(z; \varphi + t).$$

$$D_\Lambda(z; \varphi) = \mathcal{K}(\varphi; L, \Lambda) \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L} D_L(z + t; \varphi) e(-E_L(t, \varphi)).$$

Formules inverses

Soit l***,*** Λ ***et*** Λ' ***trois réseaux complexes tels que :***

$$[\Lambda : L] = [\Lambda' : L] = l \ \textbf{\textit{et}}\ \Lambda \cap \Lambda' = L.$$

$$\begin{tikzcd}
 & L' = \frac{1}{l}L \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash] \\
 & \Lambda' \arrow[ddl, dash] \\
\Lambda \arrow[d, dash] & \\
L &
\end{tikzcd}$$

On a les formules inverses

xiv) (**Distribution additive inverse** ***)***

$$lD_L(z;\varphi) = \sum_{\bar{t}\in\Lambda'/L} D_\Lambda(\frac{z}{l};\frac{\varphi}{l}+t).$$

xv) (**Distribution multiplicative inverse** ***)***

$$lD_L(z;\varphi) = \mathcal{K}(\frac{z}{l};\Lambda,\frac{1}{l}L)\prod_{\bar{t}\in\Lambda'/L} D_\Lambda(\frac{z}{l};\frac{\varphi}{l}+t).$$

xvi) (*Pointes*)

Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$***,*** $\{z\} = \{z_1\}\tau + \{z_2\}$ ***et*** $[z] = [z_1]\tau + [z_2]$ ***:***

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} D_\tau(z,\varphi) = \begin{cases} \pi\left(cot(\pi\{\varphi\}) + cot(\pi\{z\})\right) e^{-2i\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \boldsymbol{si}\ (z_1,\varphi_1) \in \mathbb{Z}^2 \\ \pi\left(cot(\pi\{\varphi\}) - i\right) e^{-2i\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \boldsymbol{si}\ \varphi_1 \in \mathbb{Z}, z_1 \notin \mathbb{Z} \\ \pi\left(cot(\pi\{z\}) - i\right) e^{2i\pi\{\varphi_1\}z_2 - 2i\pi[z_1]\{\varphi_2\}} & \boldsymbol{si}\ z_1 \in \mathbb{Z}, \varphi_1 \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \boldsymbol{si}\ z_1 \notin \mathbb{Z}, \varphi_1 \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

xvii) (*Coefficients aux pointes*)

. ***Pour*** $\varphi = \varphi_1\tau + \varphi_2 \in \mathbb{C}$ ***avec*** $\varphi_1 \in \mathbb{Z}, \varphi_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$***, on a***

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} d_j(\varphi) = \begin{cases} \frac{B_{2l}}{(2l)!}(2\pi i)^{2l} = -2\zeta(2l) & \boldsymbol{Si}\ j = 2l, l \geqslant 0 \\ \pi cot(\pi\varphi_2) & \boldsymbol{Si}\ j = 1 \\ 0 & \boldsymbol{Sinon} \end{cases}$$

. ***Pour*** $\varphi = \varphi_1\tau + \varphi_2 \in \mathbb{C}$ ***avec*** $\varphi_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$***, on a :***

$$\lim_{\mathrm{Im}(\tau)\to\infty} d_j(\varphi) = \frac{B_j(\{\varphi_1\})}{j!}(2\pi i)^j,$$

<u>Exemple : aux points de 2-division</u>.

Nos formes de Jacobi de niveau 2 sont

(1) $$D_\tau(z;\frac{1}{2}) = \frac{1}{z} + 2\sum_{k\geqslant 0}\frac{(2\pi i)^{2k+2}}{(2k+1)!}\left(\frac{B_{2k+2}}{4k+4} + \sum_{m\geqslant 1}\frac{m^{2k+1}q^m}{1+q^m}\right)z^{2k+1}$$

(2)
$$D_\tau(z;\frac{\tau}{2}) = \frac{1}{z}+2\sum_{k\geqslant 0}\frac{(2\pi i)^{2k+2}}{(2k+1)!}\left(\frac{B_{2k+2}(1/2)}{4k+4} + \sum_{m\geqslant 1}(m+1/2)^{2k+1}\frac{q^{2m+1}+q^{m+\frac{1}{2}}}{(1-q^{m+\frac{1}{2}})^2}\right)z^{2k+1}$$

(3)
$$D_\tau(z;\frac{\tau+1}{2}) = \frac{1}{z}+2\sum_{k\geqslant 0}\frac{(2\pi i)^{2k+2}}{(2k+1)!}\left(\frac{B_{2k+2}(1/2)}{4k+4} + \sum_{m\geqslant 1}(m+\frac{1}{2})^{2k+1}\frac{q^{2m+1}-q^{m+\frac{1}{2}}}{(1+q^{m+1/2})^2}\right)z^{2k+1}$$

<u>Remarque</u> : Des analogues p-adiques aux formes $D_L(z,\varphi)$ existent et satisfont les mêmes propriétés analytiques loc.cit.

Applications :

i) **Lois de réciprocité quadratique de Gauss des corps quadratiques imaginaires**

ii) **Eléments de Stickelberger quadratiques**

iii) **Structure galoisienne des anneaux d'entiers**

iv) **Amélioration d'un théorème de Coates, Kubert et Robert**

v) **Formule de distribution pour la fonction φ de Siegel sur $\mathcal{D}iv$**

vi) **Sommes d'Apostol–Dedekind–Zagier elliptiques multiples**

3 Lois de réciprocité quadratique de Gauss sur $K =$ c.q.i

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d}), d$ **un entier négatif sans facteur carré.**
O_K **l'anneau des entiers de** K**.**
. $O_K = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ **(réseau complexe) :**

$$. \quad \omega_2 = 1 \textbf{ et } \omega_1 = \begin{cases} \sqrt{d} & \textbf{si } d \equiv 3 \pmod 4 \\ 1+\sqrt{d} & \textbf{si } d \equiv 2 \pmod 4 \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2} & \textbf{si } d \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

$$. \quad O_K/2O_K = \{0, \omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2\} \pmod{2O_K}.$$

$$(O_K/2O_K)^{\times} = S \pmod{2O_K}$$

$$. \quad S = \begin{cases} \{1\} & \textbf{si } d \equiv 1 \pmod 8 \\ \{1, \omega_1\} & \textbf{si } d \equiv 2 \textbf{ ou } 3 \pmod 4 \\ \{1, \omega_1, 1+\omega_1\} & \textbf{si } d \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$$

Définition 3.0.2 *(***Symbole quadratique***)*
Pour $\alpha, \beta \in O_K$***, avec*** $(\alpha, 2) = (\beta, 2) = (\alpha, \beta) = 1$***,***

$$(\frac{\alpha}{\beta})_2 = \prod_{\sigma \in S_\beta} \varepsilon(\alpha, \sigma) \ ,$$

où
. $\alpha\sigma = \varepsilon(\alpha, \sigma)\gamma(\sigma)$ ***avec*** $\varepsilon(\alpha, \sigma) \in \{-1, 1\}$***,*** $\gamma(\sigma) \in S_\beta$
. $S_\beta \cup -S_\beta$ ***est un système complet de représentants de*** $O_K/\beta O_K \backslash \{\bar{0}\}$***.***

Théorème 3.0.3 *(***Réciprocité quadratique de Gauss sur*** K*)*
Soient $\alpha, \beta \in O_K$ ***tels que*** $(\alpha, 2) = (\beta, 2) = (\alpha, \beta) = 1$***. On a***

$$\boxed{(\frac{\alpha}{\beta})_2(\frac{\beta}{\alpha})_2^{-1} = (-1)^{\frac{N(\alpha)-1}{2}\cdot\frac{N(\beta)-1}{2} + \frac{N(\alpha)-1}{2}E_{O_K}\left(\beta-\beta_0, \beta_0\frac{\omega_1}{2}\right) + \frac{N(\beta)-1}{2}E_{O_K}\left(\alpha-\alpha_0, \alpha_0\frac{\omega_1}{2}\right)}}$$

où $\alpha_0, \beta_0 \in S$ **tels que :**

$$\alpha \equiv \alpha_0 \pmod{2O_K}, \beta \equiv \beta_0 \pmod{2O_K}.$$

et $N(z) = N_{K/\mathbb{Q}}(z)$.

__**Esquisse de la démonstration**__ **:**

$$f_L(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})=\frac{D_L(z;\frac{w_1+w_2}{2})D_L(\frac{w_2}{2};\frac{w_1}{2})}{D_L(z;\frac{w_1}{2})D_L(z;\frac{w_2}{2})}.$$

i) impaire, elliptique en la variable z et de diviseur

$$(0)+(\frac{w_1+w_2}{2})-(\frac{w_1}{2})-(\frac{w_2}{2}).$$

ii)

$$\prod_{\sigma\in S_\beta}\frac{f_L(\alpha\sigma;\alpha\frac{w_1}{2},\alpha\frac{w_2}{2})}{f_L(\gamma(\sigma);\alpha\frac{w_1}{2},\alpha\frac{w_2}{2})}=\prod_{\sigma\in S_\beta}\varepsilon(\alpha,\sigma)=(\frac{\alpha}{\beta})_2$$

ou encore

$$(\frac{\alpha}{\beta})_2=\prod_{\sigma\in S_\beta}\frac{f_L(\alpha\sigma;\alpha\frac{w_1}{2},\alpha\frac{w_2}{2})}{f_L(\sigma;\alpha\frac{w_1}{2},\alpha\frac{w_2}{2})}$$

iii) $f_L(z;\frac{w_1}{2}+\rho,\frac{w_2}{2}+\rho')=e(E_L(\rho',\frac{w_1}{2}))f_L(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2});\forall\rho,\rho'\in L.$

iv) $f_L(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})=if_L(z;\frac{w_2}{2},\frac{w_1}{2})$

v) $f_L(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2}).f_L(z+\frac{w_1}{2};\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})=1$

vi) $f_L(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2}).f_L(z+\frac{w_2}{2};\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})=-1$

vii) $f_L(\lambda z;\lambda\frac{w_1}{2},\lambda\frac{w_2}{2})=f_\Lambda(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})$, **où** $\Lambda=\lambda^{-1}L;\forall\lambda\in\mathbb{C}^*,(\lambda,2)=1.$

viii) $f_\Lambda(z;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2})=\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}f_L(z+t;\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2});\forall\Lambda\supset L$ **réseau complexe :** $([\Lambda:L],2)=1$**.**

4 Eléments de Stickelberger quadratiques

Soient N/K extension abélienne finie de corps de nombres.

Motivation : Construire des annulateurs pour $Cl_{N/K}$?

$$\begin{array}{c} \mathbf{N} \\ | \\ \mathbf{K} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Situation cyclotomique :

$$\begin{array}{c} N = \mathbb{Q}(\xi_n) \\ | \\ K = \mathbb{Q} \end{array}$$

Construction de l'élément de Stickelberger classique :

Pour n premier impair, $\xi_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$$\mathbf{Gal}(N/\mathbb{Q}) = \{\sigma_t : \sigma_t(\xi_n) = \xi_n^t, 1 \leqslant t \leqslant n-1\}$$

$$\theta = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{t=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{t}\sigma_{\mathbf{t}}^{-\mathbf{1}}$$

Théorème(Stickelberger) : $n\theta$ tue $Cl_{N/\mathbb{Q}}$.

<u>Situation relative(à la Stickelberger)</u> : On se donne n **premier** $\geqslant 5$ **et** K **corps de nombres linéairement disjoint avec** $\mathbb{Q}(\xi_n)$ **sur** $\mathbb{Q}$, E **courbe elliptique sur** K**, munie d'un point rationnel** P **d'ordre** n**.**

$$\begin{array}{c} \mathbf{N = K(\xi_n + \xi_n^{-1})} \\ | \\ \mathbf{K} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$\Gamma = \mathbf{Gal}(N/K)$.

<u>Construction du Stickelberger quadratique</u> :

$\forall p$ **premier** $\neq n$

$$\widetilde{\theta}_{\mathbf{2}}(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{t=1}}^{\mathbf{(n-1)/2}} \gamma_{\mathbf{p}}(\mathbf{t})\sigma_{\mathbf{t}}^{\mathbf{-1}} \in \mathbb{Q}[\boldsymbol{\Gamma}],$$

$$\begin{cases} \gamma_p(t) = (p^2 - p)\beta_p(t) + \displaystyle\sum_{s=1}^{p-1} \alpha_p(t, s) \\ \beta_p(t) = \frac{n}{p}(\frac{t}{n}\{\frac{tp}{n}\} + \inf(0, 1 - \frac{t}{n} - \{\frac{tp}{n}\})) \\ \alpha_p(t, s) = -tp\{\frac{a}{np}\} + np\inf(\frac{t}{n}, \{\frac{a}{np}\}) \\ a = nsx + pty, x, y \in \mathbb{Z} : nx - py = 1 \end{cases}$$

$$\textbf{Congruence :} \begin{cases} \widetilde{\theta}_{\mathbf{2}}(\mathbf{p}) \equiv \frac{\mathbf{12\widetilde{n}_p}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{t=1}}^{\mathbf{(n-1)/2}} \mathbf{t^2}\sigma_{\mathbf{t}}^{\mathbf{-1}} (\bmod \mathbb{Z}[\boldsymbol{\Gamma}]), \mathbf{\widetilde{n}_p} = \frac{\mathbf{(p-1)(p+1)}}{\mathbf{12}} \\ \mathbf{n}\widetilde{\theta}_{\mathbf{2}}(\mathbf{p}) \in \mathbb{Z}[\boldsymbol{\Gamma}] \ . \end{cases}$$

Lien avec les formes de Jacobi ?

Définition 4.0.4 ***Pour*** $\{\varphi, \psi\}$ ***$\mathbb{Z}$-base de*** $E[p]$ ***sur*** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ***et*** (α, γ) ***une base de*** $E[n]$ ***sur*** $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$***. On forme le produit***

$$\mathbf{A}_{\mathbf{p},\mathbf{\Omega}}(\gamma, \langle\alpha\rangle) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}} \prod_{\langle\psi\rangle \subset \mathbf{E}[\mathbf{p}]} \prod_{\varphi \text{modulo} \langle\psi\rangle} \mathbf{D}_{\mathbf{\Omega}+\mathbb{Z}\psi}(\gamma; -[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}]_{\mathbf{p}}\varphi + [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}]_{\mathbf{n}}\gamma),$$

où φ ***parcourt un système de représentants modulo*** $\langle\psi\rangle$ ***des points de*** $E[p]\backslash\langle\psi\rangle$***, tandis que*** $\langle\psi\rangle$ ***décrit les sous-groupes cycliques d'ordre*** p ***de*** $E[p]$ ***et où*** Ω ***est le réseau formé des périodes complexes de*** E***.***

Propriétés algébriques :

Théorème 4.0.5 ***Soient*** p ***et*** n ***premiers,*** $(n, p(p+1)) = 1$ ***et*** $n \geqslant 5$***.*** ***Posons*** $N = K(\zeta_n + \ \zeta_n^{-1})$***. Alors***

i) $A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle) \in K(E[n])$ ***;***

ii) si $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(K(E[n])/K)$ ***est défini par***

$$\gamma^{[\sigma]} = a_\sigma\gamma + b_\sigma\alpha, \quad \alpha^{[\sigma]} = \alpha$$

avec $(a_\sigma, b_\sigma) \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$***,*** $a_\sigma \neq 0$***, on a l'égalité***

$$A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle)^\sigma = e_n^\Omega(\gamma, \alpha)^{(p-1)(p+1)a_\sigma b_\sigma} A_{p,\Omega}(a_\sigma\gamma, \langle\alpha\rangle) \ ;$$

iii) $A_{p,\Omega}(-\gamma, \langle\alpha\rangle) = \varepsilon(p) A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle)$ ***avec*** $\varepsilon(p) = +1$ ***(resp. -1) si*** $p \geqslant 3$ ***(resp.*** $p = 2$***), et l'on a***

$$A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle)^n \in \begin{cases} K(\zeta_n) & \textbf{\textit{pour}}\ p = 2 \\ N & \textbf{\textit{si}}\ p \geqslant 3\ \textbf{\textit{;}} \end{cases}$$

iv) l'idéal $(A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle))$ ***est un idéal ambige de l'extension*** $K(E[n])/N$

<u>Résultats : Stickelberger elliptique</u>

Pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de K : $r_\mathfrak{p} = v_\mathfrak{p}(\mathfrak{D}_{E/K})$.

$\mathfrak{R}(\mathbf{E}, \mathbf{P})$= l'ensemble des diviseurs premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{D}_{E/K}$, premier à n, pour lesquels la réduction de P modulo $\mathfrak{p}$ est un point régulier de la courbe réduite. On pose

$$\mathfrak{D}_{\mathbf{E/K,reg}} = \prod_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{R}(\mathbf{E},\mathbf{P})} \mathfrak{p}^{\mathbf{r}_\mathfrak{p}}.$$

Pour tout $\gamma \in E[n]\backslash < \alpha >$, α paramètre de P, on a

Théorème 4.0.6 ***Tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{R}(E,P)$ possède un relèvement $\mathfrak{P}$ dans N tel que :***

$$(A_{p,\Omega}(\gamma, \langle\alpha\rangle))^n (\mathfrak{D}_{E/K}/(\Delta(\Omega)))^{n\widetilde{n}_p} \equiv (\prod_{\mathfrak{p}\in\mathfrak{R}(E,P)} \mathfrak{P}^{r_\mathfrak{p}})^{n\widetilde{\theta}_2(p)} \ (mod\ n)$$

Théorème 4.0.7 ***On a aussi***

$$\Big(\prod_{t=1}^{(n-1)/2} A_{p,\Omega}(t\gamma, \langle\alpha\rangle)\Big) \equiv ((\Delta(\Omega))\mathcal{D}_{E/K}^{-1})^{\frac{n-1}{2}\widetilde{n}_p} \mathcal{D}_{E/K,\mathrm{reg}}^{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\widetilde{n}_p} \pmod{n} .$$

Remarque : Analogie avec Stickelberger, analogie avec "Führer-diskriminantenproduktformel" de Hasse.

5 Structure galoisienne des anneaux d'entiers

L/F une extension abélienne finie et G le groupe de Galois de L/F.

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ | \\ \mathbf{F} \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

$\mathcal{A}_{L/F} = \{x \in F[G] : xO_L \subset O_L\}$ **l'ordre associé à L sur F.**

Motivation : Structure galoisienne de O_L sur $\mathcal{A}_{L/F}$?

Théorème 5.0.8 (Hilbert, Leopoldt, Speiser) :

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} \\ | \\ \mathbf{F} = \mathbb{Q} \end{array}$$

Alors O_L est un $\mathcal{A}_{L/F}$-module libre de rang 1.

Théorème 5.0.9 (Chan, Lim (1993)) :

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} = \mathbb{Q}(\xi_{\mathbf{mn}}) \\ | \\ \mathbf{F} = \mathbb{Q}(\xi_{\mathbf{m}}) \end{array}$$

On a alors, O_L est un $\mathcal{A}_{L/F}$-module libre de rang 1.

Théorème 5.0.10 (Cassou-Noguès, Chan, Schertz, Taylor(1986-1991)) :
Soient K ***un corps quadratique imaginaire,*** $\mathfrak{p}$ ***est un idéal premier de*** K***,***

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} = \mathbf{K}(\mathfrak{p}^{\mathbf{r+m}}) \\ \Big| \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}(\mathfrak{p}^{\mathbf{m}}) \end{array}$$

Si l'une des conditions est satisfaite

i) 2 ***est décomposé et*** $1 \leqslant m \leqslant r$.

ii) 2 ***est ramifié et soit*** $1 \leqslant m \leqslant r$ ***lorsque*** p ***est décomposé ou*** $1 \leqslant m \leqslant r-2$ ***lorsque*** p ***est ramifié ou*** $1 \leqslant m \leqslant r-1$ ***lorsque*** p ***est inerte.***

iii) 2 ***est inerte et*** $1 \leqslant m \leqslant r$ ***avec*** p ***est décomposé.***

On a alors, O_L ***est un*** $\mathcal{A}_{L/F}$***-module libre de rang 1.***

<u>Cas des corps de division :</u> On se donne K un corps de nombres linéairement disjoint avec $\mathbb{Q}(\xi_n)$ sur $\mathbb{Q}, n \geqslant 5$, E courbe elliptique sur K, munie d'un point rationnel P d'ordre n.

$$\begin{array}{c} \mathbf{L} = \mathbf{K}(\mathbf{E}[\mathbf{n}]) \\ | \\ \mathbf{F} = \mathbf{K}(\xi_{\mathbf{n}}) \\ | \\ \mathbb{Q} \end{array}$$

Pour le ii) on suppose que P définit un point régulier modulo tout premier où E a mauvaise réduction.

Théorème 5.0.11 ***On a les propriétés suivantes :***

i) Soit p ***nombre premier,*** $(p(p^2-1), n) = 1$***. Alors***

$$K(E[n]) = F(A_{p,\Omega}(\gamma, \langle \alpha \rangle)).$$

ii) Pour tout triplet $(E/K, P, n)$***,*** $\mathcal{D}_{E/K} = \mathfrak{p}_0^{r_0} \mathfrak{p}_1^{r_1} ... \mathfrak{p}_s^{r_s}$ ***tels que :*** $\prod_{(r_i,n)=1} \mathfrak{P}_i = a^n O_F, a \in L \backslash F$, $\mathfrak{P}_i$ ***sont les relèvements premiers des*** $\mathfrak{p}_i$ ***dans*** O_F.

Alors O_L ***est un*** $\mathcal{A}_{L/F}$***-module libre de rang 1***

6 Amélioration d'un théorème de Coates-Kubert-Robert

. L, M, L' **trois réseaux complexes,** $M \cap L' = L$.
. $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ **une base orientée de** L **sur** $\mathbb{Z}$
. $\{w'_1 = w_1/m, w'_2 = w_2/n\}$ **une base de** L' **sur** $\mathbb{Z}($ $m, n > 0)$
.
$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{k}{m}\omega_1 + \frac{k'}{n}\omega_2, 0 \leqslant k \leqslant m-1; 0 \leqslant k' \leqslant n-1 \right\}$$
. $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ **une base orientée de** M **sur** $\mathbb{Z}$.
. $\tilde{w}'_1 = \tilde{w}_1/\tilde{m}$, $\tilde{w}'_2 = \tilde{w}_2/\tilde{n}$, ($\tilde{m}, \tilde{n} > 0)$**, une base de** M' **sur** $\mathbb{Z}$**.**

$$\begin{tikzcd}
 & M' = M + L' \arrow[d, dash] \arrow[ddl, dash] \\
 & M \arrow[ddl, dash] \\
L' \arrow[d, dash] & \\
L &
\end{tikzcd}$$

Rappel :

$$\mathcal{K}(z; L, L') = \frac{\mathcal{K}_L(z)^{[L':L]}}{\mathcal{K}_{L'}(z)}$$

Théorème 6.0.12 ***Pour tout système de représentants $\mathcal{S}$ de M/L, on a l'égalité***

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathcal{K}(z+\alpha; L, L') =$$

$$\mathcal{K}(z; M, M') \cdot e(E_L(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha)) \cdot \frac{\epsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]}}{\epsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)} \cdot \frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[M':L]}} \cdot \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}.$$

où

$$\epsilon_{\mathcal{B}}(0) = e\left(\frac{3mn+m-n-3}{8}\right), \epsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0) = e\left(\frac{3\tilde{m}\tilde{n}+\tilde{m}-\tilde{n}-3}{8}\right)$$

et

η est la fonction de Dedekind, dont le carré est défini par

$$\eta^2(z_1, z_2) = 2\pi i {z_2}^{-1} e(\frac{\tau}{12}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-e(n\tau))^2$$

pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $\tau = z_1/z_2$ tels que $\mathrm{Im}(\tau) > 0$.

Remarque : G. Robert (Invent.math 100, 1990,pp.231-257) a obtenu la même formule lorsque $[L' : L], 6) = 1$.

<u>Fonction zêta</u> : Pour $[L' : L]$ impair, on considère la fonction

$$\zeta(z; L, L') = \prod_{\bar{t} \in T} \frac{1}{\wp_L(z) - \wp_L(t)}; \quad T \cup -T \cup \{0\} = L'/L$$

Alors

Théorème 6.0.13 ***(*****Coates-Kubert-Robert revisité*****)***

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{S}} \zeta(z+\alpha; L, L')^{12} = \zeta(z; M, M')^{12} \cdot \frac{\Delta(L')^{[M:L]}}{\Delta(L)^{[M':L]}} \cdot \frac{\Delta(M)^{[M':M]}}{\Delta(M')}, \quad (\mathbf{[L' : L], 2}) = \mathbf{1}.$$

<u>Preuve</u> : Pour tout $L \supset \Lambda$ réseaux complexes, on a

$$\prod_{\bar{t} \in \Lambda/L \setminus \{\bar{0}\}} D_L(z; t)^{-1} = \mathcal{K}(z; L, \Lambda)$$

Si de plus, $([\Lambda : L], 2) = 1$, grâce à la "Racine carrée tordue", on obtient

$$\prod_{\bar{t} \in \Lambda/L \setminus \{\bar{0}\}} D_L(z; t)^{-1} = \zeta(z; L, \Lambda).$$

REMARQUE :

i) Formule utilisée par Coates-Wiles (Iwasawa theory),

ii) Robert-Kubert (unités elliptiques, formule de classes),

iii) Robert-Gillard (Iwasawa Theory, unités elliptiques).

7 Formule de distribution pour la fonction φ de Siegel sur $\mathcal{D}iv$

L et Λ deux réseaux complexes : $L \subseteq \Lambda$.
. $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ une base orientée de L sur $\mathbb{Z}$
. $\{w_1' = w_1/m, w_2' = w_2/n\}$ une base de Λ sur $\mathbb{Z}$($m, n > 0$)
.

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{k}{m}\omega_1 + \frac{k'}{n}\omega_2, 0 \leqslant k \leqslant m-1; 0 \leqslant k' \leqslant n-1 \right\}$$

<u>Fonction de Siegel sur $\mathbb{C}$</u> :

$$\varphi_L(z; w_1, w_2) := \mathcal{K}_L(z)\eta^2(w_1, w_2).$$

<u>Fonction de Siegel sur les diviseurs</u> :
Pour tout diviseur $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$, $a_i \in \mathbb{C}$, principal ou non

$$\varphi_L(\mathcal{D}; w_1, w_2) := \prod_{a_i \notin L} \varphi_L(a_i; w_1, w_2)^{n_i}.$$

Théorème 7.0.14 ***Alors on a***

$$\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') = \epsilon_{\mathcal{B}}(\mathbf{0})^{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{E_L}(\sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{R}} \mathbf{t}, \mathbf{y})) \cdot \prod_{t\in\mathcal{R}} \varphi_L(\mathcal{D} \oplus t; w_1, w_2)$$

pour tout diviseur $\mathcal{D} = (x+y) + (x-y) - 2(x) - 2(y) + 2(0)$ ***vérifiant***

$$\boldsymbol{Supp}(\mathcal{D}) \cap \Lambda = \{0\}.$$

REMARQUE :

i) F. Jarvis et J. Wildeshaus l'ont utilisé pour une analyse de l'analogue elliptique de la conjecture polylogarithmique de Zagier

ii) Fomule vraie pour d'autres diviseurs.

8 Sommes d'Apostol–Dedekind–Zagier elliptiques multiples

Les sommes d'Apostol-Dedekind-Zagier ont plusieurs applications dans divers domaines :

i) Lois de réciprocité quadratiques [C. Meyer]

ii) Calcul du nombre des classes des corps quadratiques et fonctions L [C. Meyer]

iii) L'étude du problème des nombres aléatoires (ou pseudo-aléatoires) [U. Dieter]

iv) La formule de partition de Hardy-Ramanujan [G.H Hardy], [H. Rademacher]

v) Formule d'indice de Hirzebruch(signature de certains invariants d'homologie de variétés différentielles), Théorème de Riemann-Roch [M.F Atiyah, F. Hirzebruch], [G. Harder], [D. Zagier]

vi) L'étude de la cohomologie d'Eisenstein de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ [C. Meyer]

vii) pour $\mathbf{SL}_2(\mathbb{O}_K)$, K corps quadratique imaginaire, voir [R. Sczech, U. Weselmann]...etc.

Soient $a, b, k \in \mathbb{N}$, a, b non nuls premiers entre eux :

. **<u>Réciprocité de Dedekind</u> :** $s(a,b) = \dfrac{1}{a}\sum_{t=1}^{a-1} \cot\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)\cot\left(\dfrac{\pi b t}{a}\right)$.

$$s(a,b) + s(b,a) = \frac{a^2+b^2+1}{3ab} - 1.$$

. **<u>Réciprocité d'Apostol</u> :** $s_k(a,b) = \dfrac{1}{k!a}\sum_{t=0}^{a-1} \cot^{(k)}\left(\dfrac{\pi t}{a}\right)\cot\left(\dfrac{\pi b t}{a}\right)$.

$$\frac{(-1)^l ab}{4^{l+1}}\left(s_k(a,b) + s_k(b,a)\right) =$$

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{l+1} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{B_{2l+2-2i}}{(2l+2-2i)!}a^{2i}b^{2l+2-2i} - \frac{B_1 B_{2l+1}}{(2l+1)!}ab^{2l+1} + (2l+1)\frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} & \textbf{Si } k = 2l \\ 0 & \textbf{Si } k \textbf{ impair} \end{cases}$$

Soit n pair.

. <u>**Réciprocité de Zagier**</u> **:**

$$d(a_0;a_1,...,a_n)=\frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{a_0-1}\mathbf{cot}\left(\frac{\pi k a_1}{a_0}\right)\quad ...\quad \mathbf{cot}\left(\frac{\pi k a_n}{a_0}\right)$$

a_0**,** a_1**,** a_2**, ...,** a_n **non nuls et deux à deux premiers entre eux.**

$$\sum_{l=0}^{n} d(a_l;a_0,\cdots,\breve{a}_l,\cdots,a_n)=(-1)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{l_n(a_0,\cdots,a_n)}{a_0a_1\cdots a_n}\right)$$

$l_n(a_0,\cdots,a_n)$ **polynôme symétrique et homogène de degré total** n**.**

Exemples :

$$l_0(a)=1,$$
$$l_2(a,b,c)=\tfrac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

$$l_4(a,b,c,d,e)=\tfrac{5\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)^2-7\left(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4\right)}{90}.$$

<u>Définition 1</u> :

Soit $L = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ réseau complexe, $O_L = \{x \in L | xL \in L\}$ ordre associé à L.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n \in O_L \backslash O_L^\times$,

on définit les $M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau)$ par :

$$a_0 a_1 \cdots a_n \prod_{k=0}^{n} z D_\tau \left(a_k z; \varphi\right) = \sum_{k \geqslant 0} M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) z^k.$$

Formule :

$$M_k(a_0, \ldots, a_n; \varphi, \tau) = \sum_{\substack{i_0 + \cdots + i_n = k \\ 0 \leqslant i_0, \ldots, i_n \leqslant k}} a_0^{i_0} \cdots a_n^{i_n} d_{i_0}(\varphi) \cdots d_{i_n}(\varphi);$$

<u>Définition 2(Sommes elliptiques à la"Apostol-Dedekind-Zagier")</u> :

Soient p élément non nul de $O_L \backslash O_L^\times$ et m, k deux entiers naturels.

On fixe E_p un système de représentants de $L/pL \backslash \{0\}$.

On définit la somme associée aux entiers $p; a_1, ..., a_n$ non nuls de $O_L \backslash O_L^\times$, par

$$S_k(p; a_1, ..., a_n; m, \varphi, \tau) =$$

$$\frac{1}{p} \sum_{w \in E_p} e\left(E_L(w, \varphi)\right) \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} \left\{ D_\tau \left(z + \frac{w}{p}; \varphi \right)^m \right\}_{|z=0} \prod_{j=1}^{n} D_\tau \left(a_j \frac{w}{p}; \varphi \right).$$

Théorème 8.0.15 (**loi de réciprocité**) ***Soient*** $d \in O_L \backslash O_L^\times$ ***et*** $m \in \mathbb{N}$ ***tels que***

$$a_0 + ... + a_n + m \equiv 0 \pmod{dO_L}.$$

Alors, pour tout φ ***paramètre de point de*** d***-division non nul de*** $\mathbb{C}/L$ ***et tout*** $k \in \mathbb{N}$***, on a***

(1) Si $m = 0$:

$$\sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0, \cdots, \check{a}_l, \cdots, a_n; m, \varphi, \tau) = \begin{cases} 0 & \textbf{\textit{si}} \;\; k \geqslant 1 \\ -\frac{M_n(a_0, \cdots, a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n} & \textbf{\textit{si}} \;\; k = 0 \end{cases}.$$

(2) ***Si*** $m \geqslant 1$ ***:***

$$-\sum_{l=0}^{n} S_k(a_l; a_0, \cdots, \check{a}_l, \cdots, a_n; m, \varphi, \tau) =$$

$$\sum_{l=0}^{n} C_{k+l}^{l} \frac{M_{n-l}(a_0, \cdots a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n} M_{m+k+l}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{m \;\; \textbf{\textit{fois}}}; \varphi, \tau)$$

$$+ \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^k C_{k+l}^{l} M_{m-l-1}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{m \;\; \textbf{\textit{fois}}}; \varphi, \tau) \frac{M_{n+k+l+1}(a_0, \cdots a_n; \varphi, \tau)}{a_0 a_1 \cdots a_n}$$

Apostol, Dedekind et Zagier revisités :

$\mathbf{Im}(\tau)\to\infty$, $\varphi\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ on obtient des sommes elliptiques ci-dessus

(1) **Pour** $k=0$:

$$s_0(a_l;a_0,\cdots,\check{a}_l,\cdots,a_n;m,\varphi)=d(a_l;a_0,\cdots,\check{a}_l,\cdots,a_n;m,\varphi)$$

$$=\frac{1}{a_l}\sum_{k=1}^{a_l-1}\left(\mathbf{cot}(\frac{\pi k}{a_l})+\mathbf{cot}(\pi\varphi)\right)^m\prod_{0\leqslant j\neq l\leqslant n}\left(\mathbf{cot}(\frac{\pi k a_j}{a_l})+\mathbf{cot}(\pi\varphi)\right)$$

(2) **Pour** $k\geqslant 1$:

$$s_k(a_l;a_0,\cdots,\check{a}_l,\cdots,a_n;m,\varphi)=$$

$$\frac{1}{a_l}\sum_{k=1}^{a_l-1}\frac{d^k}{dz^k}\left\{\left(\mathbf{cot}(\pi z+\frac{\pi k}{a_l})+\mathbf{cot}(\pi\varphi)\right)^m\right\}_{|z=0}\prod_{0\leqslant j\neq l\leqslant n}\left(\mathbf{cot}(\frac{\pi k a_j}{a_l})+\mathbf{cot}(\pi\varphi)\right)$$

Corollaire 8.0.16 *(*Zagier revisité*)*

Pour tout $d \geqslant 2$ ***divisant*** $a_0+...+a_n+m$ ***et*** $\varphi = \frac{k}{d}$**,**$1 \leqslant k \leqslant d-1$, ***on obtient***

$$\sum_{l=0}^{n} d(a_l; a_0, \cdots, \check{a}_l, \cdots, a_n; m, \varphi) =$$

$$\frac{\boldsymbol{sin}(\pi\varphi(n+m+1))}{\boldsymbol{sin}(\pi\varphi)^{m+n+1}} - i^{n+m}\frac{l_{n+m}(\overbrace{1,\cdots,1}^{m\ \boldsymbol{fois}}, a_0, \cdots a_n; \varphi)}{a_0 \cdots a_n}.$$

Où l' on a posé

$$\frac{l_{n+m}(\overbrace{1,\cdots,1}^{m\ \boldsymbol{fois}}, a_0, \cdots a_n; \varphi = \frac{k}{d})}{a_0 \cdots a_n} =$$

$$(-i)^{n+m}\boldsymbol{Res}\left((\boldsymbol{cot}(z) + \boldsymbol{cot}(\pi\varphi))^m \prod_{j=0}^{n} \boldsymbol{cot}(a_j z) + \boldsymbol{cot}(\pi\varphi)\right)_{\big|z=0}.$$

Remarque : $\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **Zagier(Math Ann, 202, 1973,pp.149-172)**

$$\sum_{l=0}^{n} d(a_l; a_0, \cdots, \check{a}_l, \cdots, a_n) = \begin{cases} 0 & \textbf{si n impair} \\ (-1)^{\frac{n}{2}}\left(1 - \frac{l_n(a_0,\cdots,a_n)}{a_0 a_1 \cdots a_n}\right) & \textbf{si n pair} \end{cases}$$

De même

Corollaire 8.0.17 *(***Dedekind-Apostol revisité***)*

Pour $\varphi = \frac{1}{2}, a_0, a_1$ ***entiers naturels premiers entre eux et strictement supérieur à*** 1***,*** $k \in \mathbb{N}$***, on a l'égalité suivante***

$$\frac{(-1)^l a_0 a_1}{4^{l+1}}(s_k(a_0,a_1) + s_k(a_1,a_0)) =$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{l+1} \frac{B_{2i}}{(2i)!}\frac{B_{2l+2-2i}}{(2l+2-2i)!}a_0^{2i}a_1^{2l+2-2i} - \frac{B_1 B_{2l+1}}{(2l+1)!}a_0 a_1^{2l+1} + (2l+1)\frac{B_{2l+2}}{(2l+2)!} & \textbf{\textit{Si}}\ k = 2l \\ 0 & \textbf{\textit{Si}}\ k\ \textbf{\textit{impair}} \end{cases}$$

Apostol,T.M :

Duke Math.J, 17,1950, pp.147-157 et Pacific. J. Math, 1952, pp. 1-9.

Interprétation topologique ? ?

$p, a_0; a_1, ..., a_n$ **entiers naturels deux à deux premiers entre eux.**

Soient X **une variété différentielle complexe de dimension** n **pair et** G **un groupe cyclique d'ordre** p **premier :** $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Soit $x = (z_1, ..., z_n)$**, on fait agir** G **sur** X **par :**

$$\boxed{\zeta_p o(z_1, ..., z_n) = (\zeta_p^{a_1} z_1, ..., \zeta_p^{a_n} z_n)}$$

Alors la contribution du point x **sur la signature équivariante est donnée par :**

$$\mathbf{Sign}(\zeta_p, X) = \frac{\zeta_p^{a_1} + 1}{\zeta_p^{a_1} - 1} ... \frac{\zeta_p^{a_n} + 1}{\zeta_p^{a_n} - 1}$$

Alors pour $\zeta_p = e^{\frac{2\pi it}{p}}, 1 \leqslant t \leqslant p - 1$ **on a :**

$$\boxed{\mathbf{Sign}(\zeta_p, X) = (-1)^{n/2} \mathbf{cot} \left(\frac{\pi k a_1}{p} \right) \quad ... \quad \mathbf{cot} \left(\frac{\pi k a_n}{p} \right)}$$

Donc,

$$\boxed{(-1)^{n/2} p d(p, a_0; a_1, ..., a_n) = \mathbf{Sign}(X/G) = \frac{1}{p} \mathbf{Sign}(X)}$$

c'est la contribution totale au défaut de la signature.

<u>Perspectives immédiates</u> :

i) **Théorie des genres elliptiques**

ii) **Cohomologie d'Eisenstein**

iii) **Systèmes d'Euler d'unités**

i) Isogénies : Atkin-Schoof

$$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L\backslash\{0\}} (\wp_L(z)-\wp_L(t)) = \mathcal{K}(z;L,\Lambda)^{-2}$$

$(*)$

$$\Rightarrow \prod_{\bar{\mathbf{t}}\in\mathbf{\Lambda}/\mathbf{L}\backslash\{\mathbf{0}\}} (\wp_{\mathbf{L}}(\mathbf{z})-\wp_{\mathbf{L}}(\mathbf{t})) = \mathbf{z}^{\mathbf{2}-\mathbf{2}[\mathbf{\Lambda}:\mathbf{L}]}\mathbf{e}^{([\mathbf{\Lambda}:\mathbf{L}]\mathbf{s_2}(\mathbf{L})-\mathbf{s_2}(\mathbf{\Lambda}))\mathbf{z}^{\mathbf{2}}-\mathbf{2}\sum_{\mathbf{k}\geqslant\mathbf{1}}\frac{[\mathbf{\Lambda}:\mathbf{L}]\mathbf{G_{2k+2}}(\mathbf{L})-\mathbf{s_2}(\mathbf{\Lambda})}{\mathbf{2k+2}}\mathbf{z}^{\mathbf{2k+2}}}$$

Si $[\Lambda : L]$ est impair

$$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L\backslash\{0\}/\pm 1} (\wp_L(z)-\wp_L(t)) = z^{1-[\Lambda:L]}e^{\frac{1}{2}([\Lambda:L]s_2(L)-s_2(\Lambda))z^2-\sum_{k\geqslant 1}\frac{[\Lambda:L]G_{2k+2}(L)-s_2(\Lambda)}{2k+2}z^{2k+2}}$$

$\Rightarrow$ une méthode pour déterminer les coefficients du polynôme suivant

$$H(X) = \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L\backslash\{0\}} (X-\wp_L(t))\,.$$

$\Rightarrow$ l'isogénie Φ de degré $[\Lambda : L]$ et de noyau Λ/L entre les deux courbes elliptiques $\mathbb{C}/L \to \mathbb{C}/\Lambda$.

NB : Formule $(*)$ connue par R. Schoof dans le cas

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\frac{\omega_2}{l}, L = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2, l \geqslant 2.$$

ii) Isogénies : CCR

Pour tout réseau complexe $\Lambda \supset L$ on a

$$\sum_{\bar{t}\in\Lambda/L} (\zeta(z+t,L) - \eta(t,L)) = \zeta(z,\Lambda) + ([\Lambda : L]s_2(L) - s_2(\Lambda))z,$$

ce qui implique

$$(i) \qquad \sum_{\bar{t}\in\Lambda/L} \wp_L(z+t) = \wp_\Lambda(z) + s_2(\Lambda) - [\Lambda : L]s_2(L),$$

$$(ii) \qquad \sum_{\bar{t}\in\Lambda/L} \wp_L^{(k)}(z+t) = \wp_\Lambda^{(k)}(z), \forall k \geqslant 1,$$

$$(iii) \qquad \sum_{\bar{t}\in\Lambda/L\setminus\{0\}} \wp_L^{(2k-1)}(\sigma+t) = 0, \forall \sigma \in \frac{1}{2}\Lambda, \forall k \geqslant 1.$$

$$(iv) \qquad \sum_{\bar{t}\in\Lambda/L\setminus\{0\}} \wp_L^{(2k-2)}(t) = (2k-1)!(G_{2k}(\Lambda) - G_{2k}(L)), \forall k \geqslant 2.$$