Un problème d'alignement dans la variété de Kummer-Wirtinger

par Abdelmejid BAYAD et Gilles ROBERT

1.Introduction et résultats

Soit A une variété abélienne principalement polarisée complexe de dimension $g \geq 2$. C'est équivalent à la donnée d'un couple $(\mathcal{L}, H_\Omega)$ tels que : $\mathcal{L}$ est un réseau complexe dans $\mathbb{C}^g$ avec $\mathcal{L} = (\,\Omega \quad I_g\,)\,\mathbb{Z}^{2g}$, où I_g est la matrice identité $g \times g$ et Ω matrice élément de l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g \overset{\mathrm{dfn}}{=} \{Z \in \mathcal{M}_{g,g}(\mathbb{C}) : {}^tZ = Z, ImZ > 0\}$ et H_Ω est la forme hermitienne définie sur $\mathbb{C}^g \times \mathbb{C}^g$ par

$$H_\Omega(u,v) := {}^t\bar{u}\big(\Omega - \overline{\Omega}\big)^{-1}v$$

Elle définit la polarisation principale de A.

Pour préciser la question centrale, qui fait l'objet de cet article, nous rappelons quelques définitions. On note par $\theta(z,\Omega)$ la fonction thêta de Riemann classique , définie par la série

$$(1.1) \qquad \theta(z;\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e(1/2\,{}^tn\Omega n + {}^tnz),$$

où l'on a posé

$$e(x) = e^{2\pi i x}, \quad x \in \mathbb{C}.$$

Cette fonction vérifie les propriétés suivantes

$$(1.2) \begin{cases} \theta(z + I_g n + m\Omega;\Omega) = e\big(-1/2\,{}^tm\Omega m - {}^tmz\big)\theta(z;\Omega), \\ \theta(-z;\Omega) = \theta(z;\Omega), \quad \text{pour tout} \quad (n,m) \in \mathbb{Z}^g \times \mathbb{Z}^g. \end{cases}$$

On note par Θ_Ω le diviseur thêta associé à la fonction $\theta(.;\Omega)$, c'est l'ensemble des zéros de cette fonction dans $\mathbb{C}^g$. Le fait que la variété abélienne A, associée à $(\mathcal{L}, H_\Omega)$, soit principalement polarisée assure que Θ_Ω est ample et que le système linéaire $|\Theta_\Omega|$ est de dimension 0 . Pour $\mu \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$, on peut définir une fonction thêta du second ordre de caractéristique$(\mu, 0)$ comme suit

$$(1.3) \quad \theta_2[\mu](z;\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e(1/2\,{}^t(n+\mu)\Omega(n+\mu) + {}^t(n+\mu)z)$$

Elle satisfait les propriétés suivantes

$$(1.4)\begin{cases} \theta_2[\mu](z+I_g n+m\Omega;\Omega)=e\big(1/2^t\mu n-1/2^t m\Omega m-{}^t m z\big)\theta_2[\mu](z;\Omega)\\ \theta(z-\varphi;\Omega)\theta(z+\varphi;\Omega)=\displaystyle\sum_{\mu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}\theta_2[\mu](z;\Omega)\theta_2[\mu](\varphi;\Omega)\end{cases}$$

[1] § 4 (2) et [8] Chap VI.

Cette dernière égalité est connue sous le nom "Identité fondamentale de Riemann" . En utilisant le théorème de Riemann-Roch et par un simple calcul, on peut montrer que les 2^g fonctions

$$\theta_2[\mu](z;\Omega);\quad \mu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g$$

forment une base pour l'espace des fonctions thêta de second-ordre [1], [2]. Ceci permet, par le système linéaire $|2\Theta_\Omega|$, de définir le morphisme

$$(1.5)\qquad\begin{cases} P_{(0)}: & A\to\mathbb{P}_{2t+1}(\mathbb{C}), t=2^{g-1}-1,\\ & z\mapsto\Big[...,\theta_2[\mu](z,\Omega),....\Big]_{\mu\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g/\mathbb{Z}^g}\end{cases}$$

l'image de A par $P_{(0)}$ est ce qu'on appelle la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ qui est isomorphe à $A/\{+1,-1\}$, où $\{+1,-1\}$ est le groupe des automorphismes de la variété principalement polarisée A.

Maintenant, nous sommes en mesure de préciser notre question, sous deux formes différentes mais équivalentes

Forme géomètrique. — Soit $\alpha\in A[2]\backslash\{0\}$ un point de 2-torsion dans A. Pour quelles valeurs de φ point de $A\backslash A[2]$, les images par $P_{(0)}$ des trois points

$$\varphi+\alpha/2,\quad -\varphi+\alpha/2\quad \text{ et } \alpha/2$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$ sont-elles alignés?

Remarque 1.6. — Sous les mêmes hypothèses précédentes, ces trois images sont des points deux à deux distincts de $\mathcal{K}_{(0)}$. En fait

$$P_{(0)}(\varphi+\alpha/2)=P_{(0)}(-\varphi+\alpha/2)$$

si et seulement si $\varphi\in A[2]$.

Forme analytique. — Soit $\mathcal{K}_\mathcal{L}$ une section du fibré en droites définie par le facteur d'automorphie

$$\chi_\mathcal{L}(\rho)e\big(E_\mathcal{L}(\rho,u)/2\big),\ \text{ pour tout } \rho\in\mathcal{L},$$

où $\chi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \{+1, -1\}$ satisfait

$$\chi_{\mathcal{L}}(\rho + \sigma) = \chi_{\mathcal{L}}(\rho)\chi_{\mathcal{L}}(\sigma)e\big(E_{\mathcal{L}}(\rho, \sigma)/2\big).$$

pour tous ρ et σ éléments de $\mathcal{L}$. On fixe α point de 2-division de A, non nul.

Pour quelles valeurs de φ point de A, on a

$$\mathcal{K}(z + \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z - (\varphi + \alpha/2)) + e(E(\alpha, \varphi))\mathcal{K}(z - \varphi + \alpha/2)\mathcal{K}(z + \varphi - \alpha/2)$$
$$= \lambda(\varphi)\mathcal{K}(z + \alpha/2)\mathcal{K}(z - \alpha/2),$$

où $\lambda(\varphi)$ ne dépend que de φ et eventuellement de α.

Remarque 1.7. — En dimension $g = 1$, il est clair que la question est trivialement satisfaite pour tout φ point de A. L'objectif de ce travail est de traiter le cas de dimension ≥ 2.

Plus précisément, le résultat principal de cet article est le suivant

Théorème principal. — *Soit $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ la jacobienne d'une courbe projective et lisse C, de genre ≥ 2, munie de sa polarisation principale.*

On suppose que (A, Θ) est indécomposable. On choisit $\alpha \in A \backslash A[2]$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes :

(i) $\varphi \notin A[2]$,

(ii) les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;

(iii) dans la variété de Kummer-Wirtinger, les images par $P_{(0)}$ des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ ne sont pas alignés .

Remarque 1.8. — Le lien entre Θ_Ω et Θ est explicitement fourni par le théorème VI.2.4 de [8]. En tout cas, ils diffèrent seulement d'un vecteur constant ne dépendant que de la base d'homologie de A et du point base de l'application d'Abel $\varphi : C \mapsto Jac(C)$.

2. Trisécantes et Jacobiennes

Nos références pour ce paragraphe sont [2], [5], [11],[13] et [14]. On travaille sur la variété $(A, \Theta) = (Jac(C), \Theta)$ prise simple, où C est une courbe projective et lisse. D'après, [5] (0.1), on sait que le fait d'avoir trois points a, b et c dont les images sont distinctes et alignées dans la variété de Kummer-Wirtinger est équivalent à l'inclusion

$$\Theta_a.\Theta_b \subset \Theta_c \cup \Theta_{-c} \tag{2.1}$$

où $\Theta_a.\Theta_b$ est le schéma de support $\Theta_a \cap \Theta_b$ et Θ_x désigne $\Theta + x$ (le translaté de Θ par x élément de A). Ceci nous permet d'avoir les inclusions suivantes

PROPOSITION 2.2. — *Soit φ un point de A, tel que $2\varphi \neq 0$. Si les images des trois points*

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{ et } \alpha/2, \text{ pour } \alpha \in A[2]\backslash\{0\}$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger, alors

$$(2.2.1) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{-\alpha} \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi} \end{cases}$$

$$(2.2.2) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{-\varphi} \cup \Theta_{\varphi+\alpha} \\ \Theta \cap \Theta_\varphi \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases}$$

$$(2.2.3) \quad \begin{cases} \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{-\varphi-\alpha} \cup \Theta_\varphi \\ \Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha} \subset \Theta_{2\varphi} \cup \Theta_\alpha \end{cases}$$

$$(2.2.4) \quad \Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_\varphi \cup \Theta_{\varphi+\alpha}$$

Démonstration. — Dans cette démonstration nous utilisons plusieurs fois le résultat (0.1) [5].

Démontrons (2.2.4).

En posant $a = \varphi + \alpha/2$, $b = -\varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2$, on obtient

$$\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{-\varphi+\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{\frac{-\alpha}{2}}$$

et en translatant cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$, on conclut que

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Theta_\varphi \cup \Theta_{\varphi+\alpha}.$$

Montrons, à présent, le (2.2.1).

On pose $a = -(\varphi + \alpha/2)$, $b = -(\varphi - \alpha/2)$ et $c = \alpha/2$ (resp. $a = \varphi + \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2$) on obtient

$$\Theta_{-(\varphi+\frac{\alpha}{2})} \cap \Theta_{-(\varphi-\frac{\alpha}{2})} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{\frac{-\alpha}{2}}$$

(resp.$\Theta_{\varphi+\frac{\alpha}{2}} \cap \Theta_{\varphi-\frac{\alpha}{2}} \subset \Theta_{\frac{\alpha}{2}} \cup \Theta_{-\frac{\alpha}{2}}$) . Puis, on translate cette inclusion par $\varphi - \frac{\alpha}{2}$ (resp. $-\varphi + \frac{\alpha}{2}$) on conclut que

$\Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cup \Theta_\varphi$ et $\Theta \cap \Theta_\alpha \subset \Theta_{-\varphi+\alpha} \cup \Theta_{-\varphi}$. D'où (2.2.1).

Brièvement, pour montrer les inclusions (2.2.2), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi + \alpha/2$ et $c = \alpha/2 - \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = -(\varphi + \alpha/2)$ et $c = \alpha/2 - \varphi$), puis on translate les inclusions obtenues par $-(\varphi + \alpha/2)$ (resp.$\varphi + \alpha/2$). Enfin, pour démontrer le (2.2.3), on pose $a = \alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$ (resp. $a = -\alpha/2$, $b = \varphi - \alpha/2$ et $c = \alpha/2 + \varphi$) et on translate par $-\varphi + \alpha/2$ (resp.$\varphi - \alpha/2$.)

Lemme 2.3. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 2.2, on a l'inclusion*

$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} \subset \Big(\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}\Big) \cup \Big(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}\Big).$$

Démonstration. — Soit Z une sous-variété irréductible de A telle que : Z soit une composante de $\Theta \cap \Theta_{2\varphi}$.

1er cas: Supposons $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$. Alors, d'après (2.2.4), on a forcément $Z \subset \Theta_\varphi$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_\varphi$. Mais, comme $Z \not\subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, on a d'après (2.2.2) l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi}$ et donc $Z \subset \Theta_{-\varphi} \cap \Theta_\varphi$. On conclut que Z est une composante irréductible de $\Theta_{-\varphi} \cap \Theta_\varphi$.

2ème cas: Supposons $Z \not\subset \Theta_\varphi$. Alors, d'après (2.2.4) $Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha}$, et donc Z est une composante irréductible de $\Theta \cap \Theta_{\varphi+\alpha}$. En utilisant (2.2.3) on en déduit l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$ et donc l'inclusion $Z \subset \Theta_{-\varphi-\alpha}$. Donc, on obtient

$$Z \subset \Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}.$$

D'où la démonstration du lemme 2.3.

Proposition 2.4. — *On pose* $D = \Big(\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}\Big) \cup \Big(\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}\Big)$, *avec* $2\varphi \neq 0$ *et* $2\alpha = 0$, $\alpha \neq 0$. *Alors, on a les inclusions*

$$t^*_\varphi(D) \subset D \quad \text{et} \quad t^*_{-\varphi}(D) \subset D; \text{ où } t^*_\varphi(D) \overset{\text{dfn}}{=} \textit{le translaté de } D \textit{ par } \varphi$$

Démonstration. — Le membre de droite du lemme 2.3 possède un groupe d'automorphisme d'ordre 4, engendré par

i) La multiplication par -1 i.e $\varphi \to -\varphi$

ii) La translation par α, qui échange $\Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$ et $\Theta_{\varphi+\alpha} \cap \Theta_{-\varphi-\alpha}$. On conclut que

$$(\Theta \cap \Theta_{2\varphi}) \cup (\Theta_\alpha \cap \Theta_{2\varphi+\alpha}) \text{ et } (\Theta \cap \Theta_{-2\varphi}) \cup (\Theta_\alpha \cap \Theta_{-2\varphi+\alpha})$$

sont contenus dans le membre de droite de l'inclusion du lemme 2.3, Ceci est équivalent au résultat qu'on veut démontrer.

Remarque 2.5. — *On a aussi* $D = E \cup t_\alpha^* E$ *où* $E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi}$

3. Démonstration du théorème principal

On travaille sur une variété abélienne principalement polarisée A. Commençons par la démonstration de deux lemmes préparatoires.

Lemme 3.1. — *On suppose que* (A, Θ) *est simple et jacobienne d'une courbe projective lisse* C*, de genre* ≥ 2*, munie de sa polarisation canonique. On choisit* $\alpha \in A\backslash A[2]$.

S'il existe $\varphi \in A\backslash A[2]$ *tels que : les images des points*

$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{ et } \alpha/2, \alpha \in A[2]\backslash\{0\}$$

dans la variété de Kummer-Wirtinger sont alignées , alors la courbe C *est hyperelliptique.*

Démonstration. — Le cas $g = 2$ se traite aisément. Lorsque $g \geq 3$, d'après [12] p.76 et [7] , on a l'équivalence
(3.2)

$$\begin{pmatrix} \Theta \cap \Theta_a \subset \Theta_b \cup \Theta_c \\ \text{pour } 0, a, b \text{ et } c \\ \text{quatre points distincts de } Jac(C) \\ \text{tels que } \{0; a\} \cap \{b, c\} = \emptyset \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \text{après échange éventuel de } b \text{ et } c \\ \text{il existe } s, t, u \text{ et } v \in C \text{ tel que} \\ a = \phi(u) - \phi(v), \\ b = \phi(s) - \phi(v), \\ c = \phi(u) - \phi(t), \\ \text{où } \phi \text{ est l'application canonique} \\ \text{d'Abel-Jacobi } \phi : C \to Jac(C). \end{pmatrix}$$

On en déduit, de (3.2) et des inclusions (2.2.1) qu'ils existent deux points P_0 et P_1 de C tels que

$$\alpha = \phi(P_1) - \phi(P_0)$$

et donc, $2P_1 \sim 2P_0$, autrement dit $2P_1 - 2P_O$ est le diviseur d'une fonction méromorphe sur A. D'après [10], ceci impose à C d'être un recouvrement de $\mathbb{P}^1$ de degré 2, d'où : C est hyperelliptique.

Donc, dans toute la suite, on se ramène au cas où C est hyperelliptique. On note par I l'involution hyperelliptique. Donc, d'après (3.2) et (2.2.2) Il existe P_2 tel que : $\varphi = \phi(P_2) - \phi(P_0)$, ce qui implique

$$2\varphi = 2\phi(P_2) - 2\phi(P_0) = \phi(P_2) + \big(\phi(P_2) + \phi(I(P_2)) - 2\phi(P_0)\big) - \phi(I(P_2))$$

Comme $P_2 + I(P_2) \sim 2P_0$, on otient alors
$$2\varphi = \phi(P_2) - \phi(I(P_2))$$
D'où le lemme suivant

LEMME 3.3. — *Sous les mêmes hypothèses que le lemme 3.1, on trouve que le point 2φ est de la forme $\phi(P) - \phi(Q)$ avec $Q = I(P)$, P point de C.*

Démonstration. — Démontrons le théorème principal. D'après les lemmes 3.1 et 3.3, on se ramène au cas où C est hyperelliptique et 2φ est de la forme $P - Q$ avec $Q = I(P)$, P point de C. En fait, d'après [11] Chap 11 Prop.9.1 b), le lemme 3.3 implique que
$$E = \Theta_\varphi \cap \Theta_{-\varphi} = t^*_\varphi\Big(\Theta \cap \Theta_{2\varphi}\Big) \quad \text{est irréductible.}$$
D'autres part, d'après [15] Hilfsatz 1, on a précisément
$$\Theta \cap \Theta_{2\varphi} = W_{\phi(P)} \cup W^*_{-\phi(P)},$$
où $W_{\phi(P)}$ = est le translaté de $\phi^{(g-2)}(C)$ par $\phi(P)$ et $W^*_{-\phi(P)}$ = est l'image de $W_{-\phi(P)}$ par l'application $u \mapsto -u + \phi(Z)$ où Z est un diviseur canonique sur C. D'après le Hilfsatz 3 [15], $W_{\phi(P)}$ et $W^*_{-\phi(P)}$ coïncident. Or ce même Hilfsatz 3 [15], assure que $W_{\phi(P)}$ n'est invariant par aucune translation, si ce n'est par l'identité.

Il vient donc vu la prop.2.4
$$t^*_\varphi(E \cup t^*_\alpha E) = E \cup t^*_\alpha E$$
alors que

i) E est irréductible et

ii) E n'est invariant par aucune translation,

On en conclut donc $t^*_\varphi = Id$ ou $t^*_\varphi = t^*_\alpha$, c'est -à-dire $\varphi = 0$ ou $\varphi = \alpha$. Finalement on aboutit à la conclusion suivante: en dehors des points φ d'ordre 2 l'alignement des trois points
$$\varphi + \alpha/2, \quad -\varphi + \alpha/2 \quad \text{et } \alpha/2$$
sur la variété de Kummer-Wirtinger $\mathcal{K}_{(0)}$, conduit à une contradiction. D'où le théorème principal.

4. Généralisation

On pose
$$\mathfrak{Iri}_g = \Big\{(A, \Theta) \text{ indécomposable tel que sa variété de Kummer-Wirtinger possède au moins une trisécante}\Big\}$$

Soit alors $\mathfrak{T}$ une partie de $\mathcal{A}_g =$ l'ensemble des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g, en bijection avec le quotient de l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g$ sous l'action de $Sp(g, \mathbb{Z})$ par la construction

$$\Omega \mapsto \Theta_\Omega$$

qui vérifie les axiomes suivants

$$\begin{cases} (\alpha) & J_g \subset \mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g \\ (\beta) & \mathfrak{T} \cap \mathfrak{J}ri_g = J_g \end{cases} \tag{4.1}$$

où $J_g = \{$ Jacobiennes des courbes algébriques lisses de genre $g\}$

On a le corollaire:

Corollaire 4.2. — *Soient $\mathfrak{T} \subset \mathcal{A}_g$ vérifiant (4.1), et $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$. On suppose (A, Θ) indécomposable. On choisit $\alpha \in A[2] \backslash \{0\}$. Alors les trois propriétés suivantes du point φ de A sont équivalentes:*

(i) $\varphi \notin A[2]$;

(ii) les images dans la variété de Kummer-Wirtinger par $P_{(0)}$, associé au système linéaire $|2\Theta|$, des trois points $\varphi + \alpha/2$, $-\varphi + \alpha/2$ et $\alpha/2$ sont deux à deux distinctes;

(iii) Ces trois images forment la base d'un plan projectif.

Démonstration. — On a clairement $(i) \Longrightarrow (ii)$, puisque $\alpha \in A[2] - \{0\}$, et de plus $(iii) \Longrightarrow (ii)$.

Montrons que $(ii) \Longrightarrow (iii)$: pour cela il suffit de revenir au théorème principal, à l'aide de la propriété (4.1) satisfaite par $\mathfrak{T}$. En effet, comme par hypothèse (A, Θ) est indécomposable, si les trois points distincts étaient sur une même droite alors, par définition, on aurait

$$(A, \Theta) \in \mathfrak{J}ri_g;$$

l'hypothèse (4.1) implique donc que (A, Θ) est la jacobienne d'une courbe lisse.

En particulier, d'après [6], les hypothèses (4.1) sont vérifiées pour

$$\mathfrak{T} = \mathcal{P}_g$$

où $\mathcal{P}_g$ désigne le lieu des variétés de Prym généralisées, au sens de [3] dont la dimension est $3g$ pour $g \geq 5$, et qui vérifient $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$ si $g \leq 5$; ainsi le théorème principal peut-être énoné avec (A, Θ) variété de Prym indécomposable au lieu de (A, Θ) variété jacobienne.

Corollaire 4.3. — *Si $2 \leq g \leq 5$, le théorème principal est donc valable pour toutes les variétés abéliennes (A, Θ), indécomposables et principalement polarisées par Θ, de dimension g.*

Démonstration. — Si $g \leq 5$, on a $\mathcal{P}_g = \mathcal{A}_g$.

Remarque 4.4. — Soit $(A, \Theta) \in \mathcal{A}_g$ une variété abélienne indécomposable de dimension g, tel que

$$(A, \Theta) \notin J_g.$$

Alors l'existence d'un point φ de A, tel que $2\varphi \neq 0$, pour lequel les images par $P_{(o)}$ des trois points

$$\varphi + \alpha/2, -\varphi + \alpha/2 \text{ et } \alpha/2$$

sont alignées sur la variété de Kummer-Wirtinger contredirait la conjecture avancée par Welters [14] d'après laquelle

$$\mathfrak{J}ri_g = J_g.$$

Autrement dit, si cette conjecture est vraie, alors

$$\mathfrak{T} = \mathcal{A}_g$$

vérifie (4.1).

Bibliographie

[1] A.Andreotti and A.Mayer,. — *On the period relations for integrals on algebraic curves*, Ann.Scuola Norm.Sup.Pisa **21** (1967), 189–238.

[2] E.Arbarello. — *Fay's trisecant formula and a characterization of Jacobians varieties*, Amer.Math.soc,Proc.Sympo.Pure Math, Part 1 **46** (1988), 47–61.

[3] A.Beauville. — *Prym varieties and the Schottky problem,*, Invent.Math **.41** (1977), 149–196.

[4] A.Beauville, O.Debarre, R.Donagi et G. Van der Geer. — *Sur les fonctions thêta d'ordre deux et les singularités du diviseur thêta*, C.R.A.S **t.307 série I** (1988), 481–484.

[5] O.Debarre. — *Trisecant lines and Jacobians*, J.Algebraic geometry **1** (1992), 5–14.

[6] O.Debarre. — *The Trisecant Conjecture for Pryms,*, Proc.Sympo.Pure Math, Part 1 **Vol 49** (1989), 621–626.

[7] O.Debarre. — *Sur la dmonstration de A. Weil du thorme de Torelli pour les courbes,*, Comp. Math. **58** (1986), 3–11.

[8] H.M.Farkas and I.Kra. — *Riemann Surfaces*, Springer Verlag (Graduate Texts in Mathematics Vol 71), 1980.

[9] B.Geemen and G.van der Geer. — *Kummer varieties and the moduli spaces of abelians varieties*, Amer.J.Of Math **108** (1986), 615–642.

[10] P.A. Griffiths and J.Harris. — *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience series, 1978.

[11] H.Lange and C.Birkenhake. — *Complex Abelian varieties*, Springer Verlag (Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 302), 1992.

[12] D.Mumford. — *Curves and their Jacobians*, Ann Arbor The University of Michigan Press, 1975.

[13] G.Welters. — *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Invent.Math **74** (1983), 437–440.

[14] G.Welters. — *A criterion for Jacobi varieties*, Ann.Math **120** (1984), 497–504.

[15] A. Weil. — *Zum Beweis des Torellischen Satzes*, (Nachr.Akad.Wiss.Göttingen), 1957.

[16] W.Wirtinger. — *Untersuchungen über Thetafunktionen*, Teubner , 1895.

– ♢ –

Abdelmejid BAYAD
Université d'Evry Val d'Essonne
Département de Mathématiques
Boulevard des Coquibus
91025 EVRY Cedex (France)
Abdelmejid.Bayad@maths.univ-evry.fr

Gilles ROBERT
Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 ST MARTIN D'HÈRES Cedex (France)
grobert@fourier.ujf-grenoble.fr

(6 juillet 2004)