Available online at www.sciencedirect.com
SCIENCE DIRECT®
ELSEVIER
Journal of Number Theory 109 (2004) 136–162
JOURNAL OF Number Theory
www.elsevier.com/locate/jnt

Formes de Jacobi et formules de distribution

Abdelmejid Bayad[a,*], Jesús Gómez Ayala[b]

[a] *Département de Mathématiques, Université d'Evry Val d'Essonne, Boulevard des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France*

[b] *Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco, Facultad de Ciencias, Apartado 644, 48080 Bilbao, Espagne*

Received 20 October 2003

Communicated by D. Zagier

Available online 2 September 2004

Abstract

The main theorem proved in this paper consists of a multiplicative distribution formula for the Jacobi forms in two variables associated to Klein forms. This gives stronger versions of distribution formulae appearing in the literature. Indeed, as a first consequence of the main theorem, we deduce an optional proof of the distribution formula true for any elliptic function first found by Kubert and as a second consequence, we prove an ameliorated distribution formula for a certain zeta function previously treated by Coates, Kubert and Robert. Moreover, our main theorem provides the exact root of unity appearing in the distribution formula of Jarvis and Wildeshaus, a fact which could be useful in the K-theory of elliptic curves or more precisely, in the investigation of the elliptic analogue of Zagier's conjecture linking regulators and polylogarithms.

Keywords: Unités elliptiques; Formes de jacobi; formules de distribution

* Corresponding author.

E-mail addresses: bayad@lami.univ-evry.fr, abayad@maths.univ-evry.fr (A. Bayad), mtpgoaye@lg.ehu.es (J.G. Ayala).

0022-314X/$ - see front matter © 2004 Elsevier Inc. All rights reserved.
doi:10.1016/j.jnt.2004.06.011

0. Introduction

Ce travail s'inscrit dans la lignée de la philosophie de D. Kubert et G. Robert sur les unités elliptiques [9,11]. En s'inspirant, très largement, des différents travaux de ces auteurs, nous établissons des formules de distribution satisfaites par les formes de Jacobi D_L en deux variables, associées aux fonctions de Klein $\mathscr{K}_L$.

L'aspect additif de ces formes a été déjà établi et exploité par A. Bayad et G. Robert pour obtenir des éléments de Stickelberger elliptiques liés aux extensions attachées aux points de torsion d'une courbe elliptique définie sur un corps de nombres. Donc, cet aspect ne sera pas développé ici; pour plus d'informations, voir [1,2].

Les applications des formules de distribution sont nombreuses. En effet, elles ont été utilisées par Coates et Wiles [4] pour obtenir des renseignements sur la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, par Coates [3] et de Shalit [15] pour démontrer des résultats sur la théorie d'Iwasawa de certains modules liés aux courbes elliptiques à multiplication complexe, par Gillard et Robert [5] pour l'étude, à l'aide des unités elliptiques, des groupes des unités des extensions abéliennes d'un corps quadratique imaginaire et tout récemment, par Jarvis [6,7] et Wildeshaus [16,17] pour l'analyse de l'analogue elliptique de la conjecture de Zagier (pour savoir sur l'utilisation des lois de distribution dans la K-théorie des courbes elliptiques et l'analogue elliptique de la conjecture de Zagier, on pourra regarder [14]).

Il faut dire que la liste, ci-dessus, des applications des formules de distribution n'est pas exhaustive. Dans ce travail, nous allons revisiter quelques-unes des applications que nous venons de préciser. Donc, son objectif est multiple.

Dans un premier temps, après avoir établi notre formule de distribution satisfaite par les formes de Jacobi D_L, nous en déduisons une formule de distribution pour toute fonction elliptique. Ceci est exactement le résultat principal démontré par Kubert dans [8]. Cependant, il est à noter que la démonstration donnée par Kubert de ce résultat est différente de la nôtre; en effet, dans sa démonstration, il utilise essentiellement une formule de distribution satisfaite par les fonctions de Klein $\mathscr{K}_L$.

Dans un deuxième temps, nous donnons une nouvelle démonstration de la formule de distribution satisfaite par certaines fonctions zêta, établie par Coates dans [3]. Ensuite, nous associons à tout diviseur de $\mathbb{C}$ une forme de Jacobi $\mathcal{D}_L$ et nous établissons une deuxième relation de distribution pour ces formes. De cette dernière relation nous en déduisons une amélioration du résultat de Jarvis et Wildeshaus démontré dans les travaux cités plus haut.

1. Formes de Jacobi $D_L(z, \varphi)$ associées aux fonctions de Klein liées à un réseau complexe

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur de Poincaré. Pour tout réseau complexe L, si (w_1, w_2) désigne une base de L sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, on pose $\tau = w_1/w_2 \in \mathcal{H}$

et on définit l'aire de L par

$$a(L) = \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} w_1 & \overline{w}_1 \\ w_2 & \overline{w}_2 \end{vmatrix} = \frac{w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1}{2i} = |w_2|^2 \operatorname{Im}(\tau),$$

le nombre $a(L)$ est un nombre réel > 0, indépendant du choix de la base (w_1, w_2) de L telle que $\operatorname{Im}(w_1/w_2) > 0$. On définit alors la forme hermitienne $H_L(u, v) = \frac{\bar{u}v}{a(L)}$, où $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, et l'on pose $E_L = \operatorname{Im} H_L$, de sorte que $E_L(u, v) = \frac{1}{2i}(\frac{\bar{u}v - \bar{v}u}{a(L)})$, pour tout $(u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Notons que E_L est une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée; ses valeurs sur $L \times L$ sont entières et elle vaut -1 sur toutes les bases (w_1, w_2) de L sur $\mathbb{Z}$ telles que $\operatorname{Im}(w_1/w_2) > 0$. Dans la suite, on utilisera de temps en temps la notation $e(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{C}$.

1.1. Fonction êta de Legendre

Soit L un réseau complexe et soit (w_1, w_2) une base de L sur $\mathbb{Z}$ telle que $\operatorname{Im}(w_1/w_2) > 0$. La fonction êta de Legendre est communément définie comme suit. Pour $z \in \mathbb{C}$, $z = a_1w_1 + a_2w_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on définit

$$\eta(z, L) = a_1\eta(w_1, L) + a_2\eta(w_2, L) \tag{1.1}$$

où $\eta(w_1, L)$ et $\eta(w_2, L)$ désignent les périodes de "deuxième espèce" associées aux périodes de "première espèce" w_1 et w_2, c'est-à-dire, $\eta(w_i, L)$ $(i = 1, 2)$ est le seul nombre complexe qui satisfait l'égalité

$$\zeta(z + w_i, L) = \zeta(z, L) + \eta(w_i, L)$$

$(i = 1, 2)$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus L$, où ζ designe la fonction zêta de Weierstrass [10, Chapitre 18]. Pour donner une jolie expression à la fonction êta de Legendre, nous allons rappeler quelques résultats bien connus. La fonction donnée par la série

$$\sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^2|w|^{2s}},$$

est holomorphe en $s = 0$, donc en particulier on peut définir

$$s_2(L) = \lim_{s \to 0} \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \frac{1}{w^2|w|^{2s}}.$$

On peut alors montrer la formule suivante [9, Theorem 1.2, p. 226]:

$$\eta(z, L) = s_2(L)z + \frac{\pi}{a(L)}\bar{z}. \tag{1.2}$$

Cette nouvelle formulation de la fonction êta peut être vue comme une généralisation de la relation de Legendre [10, p. 241]:

$$w_1\eta(w_2, L) - w_2\eta(w_1, L) = 2\pi i. \tag{1.3}$$

1.2. Fonctions de Klein

Nos références pour cette section sont [8,9]. Dans la littérature, la fonction de Klein $\mathscr{K}_L(z)$, $z \in \mathbb{C}$, est définie par le produit infini

$$\mathscr{K}_L(z) = ze^{-\frac{1}{2}zz^*} \prod_{\ell\in L, \ell\neq 0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) e^{\frac{z}{\ell}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2}, \tag{1.4}$$

où, écrivant $z = a_1w_1 + a_2w_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note $z^* = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ pour $\eta_1 = \eta_1(w_1, L)$ et $\eta_2 = \eta(w_2, L)$ les périodes de "deuxième espèce" associées aux périodes de "première espèce" w_1 et w_2. Il faut noter que cette définition a un sens, car l'application $z \mapsto zz^*$ (et donc, d'après (1.4), aussi la fonction $z \mapsto \mathscr{K}_L(z)$) ne dépend pas du choix de la base (w_1, w_2) de L telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$. Ou encore mieux, vue l'étude faite ci-dessus de la fonction êta de Legendre, on a

$$\mathscr{K}_L(z) = ze^{-\frac{1}{2}z\eta(z,L)} \prod_{\ell\in L, \ell\neq 0} \left(1 - \frac{z}{\ell}\right) e^{\frac{z}{\ell}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2} \tag{1.5}$$

et comme $s_2(L)$, $a(L)$ et la norme $|z|^2$ ne dépendent pas du choix de la base (w_1, w_2) de L telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, on a la même propriété pour la fonction $\mathscr{K}_L(z)$.

La fonction $\mathscr{K}_L$ vérifie les propriétés suivantes:

(a) Pour tout $\rho \in L$, on a

$$\mathscr{K}_L(z + \rho) = \chi_L(\rho)e\left(E_L(\rho, z)/2\right)\mathscr{K}_L(z) \tag{1.6}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, où l'on a posé $\chi_L(\rho) = \begin{cases} 1 \text{ si } \rho \in 2L, \\ -1 \text{ si } \rho \in L\backslash 2L. \end{cases}$

Remarquez que, pour tous ρ et σ éléments de L, on a

$$\chi_L(\rho + \sigma) = \chi_L(\rho)\chi_L(\sigma)e\left(E_L(\rho, \sigma)/2\right). \tag{1.7}$$

(b) Elle est homogène de degré 1, c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathscr{K}_{\lambda L}(\lambda z) = \lambda \mathscr{K}_L(z). \tag{1.8}$$

(c) Elle admet z pour partie principale quand z tend vers 0:

$$\lim_{z \to 0} \mathscr{K}_L(z)/z = 1.$$

Avant d'énoncer les propriétés (d) et (e), on va faire quelques considérations. Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$; on remarque qu'alors $[\Lambda : L]$ est fini. À chaque fois qu'on choisit une base ordonnée (w_1, w_2) de L sur $\mathbb{Z}$ de sorte que pour des entiers m et n strictement positifs, le couple (w_1', w_2') définie par

$$w_1' = \frac{w_1}{m}, \qquad w_2' = \frac{w_2}{n},$$

soit une base de Λ sur $\mathbb{Z}$, on dira que le système $\mathcal{R}$ de représentants de Λ/L défini par

$$\mathcal{R} = \left\{ \frac{k}{m}\omega_1 + \frac{k'}{n}\omega_2, 0 \leqslant k \leqslant m-1; 0 \leqslant k' \leqslant n-1 \right\},$$

est *le* système de représentants de Λ/L *adapté* à la base (w_1, w_2). Cette façon de parler est justifiée par le fait suivant, très facile à vérifier: si (w_1, w_2) est une base ordonnée de L sur $\mathbb{Z}$, il peut arriver qu'il n'existe pas un couple ordonné (m, n) d'entiers strictement positifs tels que $(w_1/m, w_2/n)$ soit une base de Λ sur $\mathbb{Z}$, mais s'il existe un tel couple, il est complètement determiné par la base ordonnée (w_1, w_2) (et en plus $[\Lambda : L] = mn$). Certainement, la théorie des groupes abéliens de type fini assure qu'on peut toujours choisir une base ordonnée (w_1, w_2) de L telle qu'il existe le système de représentants de Λ/L adapté à la base (w_1, w_2), et même avec m divisant n (bien que cette dernière condition ne sera en général imposée par la suite) et de sorte que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$ (remarquez qu'on peut changer w_1 par $-w_1$, sans changer m ni n).

(d) Elle satisfait une relation de distribution multiplicative, lorsqu'on change de réseau. En effet, soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$. Alors, pour tout système de représentants $\mathcal{R}$ de Λ/L fixé et pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathscr{K}_\Lambda(z) = e\left(E_L\left(z, \sum_{t \in \mathcal{R}} t \right) \Big/ 2 \right) \mathscr{K}_L(z) \prod_{t \in \mathcal{R}}{}' \frac{\mathscr{K}_L(z+t)}{\mathscr{K}_L(t)} \tag{1.9}$$

où, comme d'habitude, le produit $\prod'_{t \in \mathcal{R}}$ est le produit avec t parcourant l'ensemble des éléments de $\mathcal{R}$, sauf l'élément représentant la classe triviale de Λ/L.

(e) De plus, si l'on choisit une base ordonnée $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ de L sur $\mathbb{Z}$ telle qu'il existe le système de représentants $\mathcal{R}$ de Λ/L adapté à la base $\mathcal{B}$, la racine huitième de l'unité $\varepsilon_{\mathcal{B}}(0)$ définie par

$$\varepsilon_{\mathcal{B}}(0) = e\left(\frac{3mn + m - n - 3}{8}\right),$$

ne dépend que de $\mathcal{B}$. Alors, si $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, on a

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}_L(t) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)\, \frac{\eta^2(w_1', w_2')}{\eta^2(w_1, w_2)^{[\Lambda:L]}} \tag{1.10}$$

où η est la fonction de Dedekind, dont le carré est défini par

$$\eta^2(z_1, z_2) = 2\pi i {z_2}^{-1} e\left(\frac{\tau}{12}\right) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(n\tau))^2 \tag{1.11}$$

pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ tels que $\mathrm{Im}(z_1/z_2) > 0$ et où l'on a posé $\tau = z_1/z_2$.

Pour les démonstrations des relations (1.6)–(1.8), on peut se reporter à [2]. On va maintenant démontrer (1.9).

Commençons par montrer l'égalité suivante:

$$\chi_\Lambda(\rho) = \chi_L(\rho)^{[\Lambda:L]} e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) \quad \forall \rho \in L, \tag{1.12}$$

où $\mathcal{R}$ est un système quelconque de représentants de Λ/L. On considère deux cas, selon $[\Lambda : L]$ est impair ou pair.

Supposons que $[\Lambda : L]$ est impair. Alors, d'un côté, le groupe Λ/L est d'ordre impair et donc 0 est le seul element annulé par 2 dans ce groupe, ce qui implique que $\sum_{t\in\mathcal{R}} t \in L$ et par conséquent $e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) = 1$, car E_L est à valeurs entières sur $L \times L$. Et d'un autre côté, le fait que $[\Lambda : L]$ est impair implique que $2\Lambda \cap L = 2L$, c'est-à-dire, un élément $\rho \in L$ appartient à $2L$ si et seulement s'il appartient à 2Λ, donc, par la définition même de χ_L et de χ_Λ, on a $\chi_L(\rho) = \chi_\Lambda(\rho)$ pour tout $\rho \in L$. Donc, dans ce cas, il est clair que l'égalité (1.12) est vrai.

Supposons que $[\Lambda : L]$ est pair; alors on a certainement $\chi_L(\rho)^{[\Lambda:L]} = 1$. Pour montrer l'égalité (1.12), il suffit de montrer que $\chi_\Lambda(\rho) = e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right)$ pour tout $\rho \in L$. On remarque que si $\mathcal{S}$ est un système de représentants de Λ/L, alors $\sum_{t\in\mathcal{S}} t - \sum_{t\in\mathcal{R}} t \in L$, donc

$$e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) = e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{S}} t\right)\right).$$

Alors, sans perte de généralité, on peut choisir une base ordonnée (w_1, w_2) de L telle qu'il existe le système $\mathcal{R}$ de représentants de Λ/L adapté à la base (w_1, w_2), et il s'agit de montrer l'égalité $\chi_\Lambda(\rho) = e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right)$ pour tout $\rho \in L$, avec $\mathcal{R}$ le système de représentants de Λ/L adapté à la base (w_1, w_2). Soit (m, n) le couple ordonné d'entiers strictement positifs associé à $\mathcal{R}$; puisque $[\Lambda : L] = mn$ et $[\Lambda : L]$ est pair, on a m pair ou n pair. D'un côté, remarquez qu'on a

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} t = \frac{n(m-1)}{2} w_1 + \frac{m(n-1)}{2} w_2,$$

et d'autre côté, que si $\rho \in L$, avec $\rho = aw_1 + bw_2$, dire que $\rho \in 2\Lambda$ équivaut à dire que am et bn sont pairs tous les deux. Alors c'est un exercice facile de vérifier les faits suivants:

1. Soient m pair et n impair, ou m impair et n pair. Si $\rho \in 2\Lambda$, alors $e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) = 1$, et si $\rho \notin 2\Lambda$, alors $e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) = -1$, de sorte qu'on a bien $\chi_\Lambda(\rho) = e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right)$ pour tout $\rho \in L$.
2. Soient m et n pairs. Alors $L \subseteq 2\Lambda$ et $\sum_{t\in\mathcal{R}} t \in L$, de sorte qu'on a bien $\chi_\Lambda(\rho) = e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right)$ pour tout $\rho \in L$.

On termine ainsi la preuve de (1.12).

Montrons maintenant (1.9). Considérons la fonction $z \mapsto \mathcal{K}_\Lambda(z)$, ainsi que la fonction

$$z \mapsto F(z) = e\left(E_L\left(z, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)/2\right) \mathcal{K}_L(z) \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \frac{\mathcal{K}_L(z+t)}{\mathcal{K}_L(t)}.$$

Ces fonctions sont holomorphes et admettent le même diviseur par rapport au réseau L, qui est $\sum_{\bar{t}\in\Lambda/L} (t)$. De plus, grâce à (1.6), on a

$$\mathcal{K}_\Lambda(z+\rho) = \chi_\Lambda(\rho) e\left(E_\Lambda(\rho, z)/2\right) \mathcal{K}_\Lambda(z),$$

et

$$F(z+\rho)=\chi_L(\rho)^{[\Lambda:L]}e\left(E_L\left(\rho,\sum_{t\in\mathcal{R}}t\right)\right)e\left(E_L\left(\rho,[\Lambda:L]z\right)/2\right)F(z)\quad\forall\rho\in L.$$

Or

$$E_\Lambda(\rho,z)=E_L(\rho,[\Lambda:L]z)\quad\forall z\in\mathbb{C}.$$

Donc, d'après l'égalité (1.12), on conclût que ces deux fonctions ont le même facteur d'automorphie par rapport au réseau L. Par conséquent, la fonction $z\mapsto\mathscr{K}_\Lambda(z)/F(z)$ est méromorphe, sans pôle et périodique dont l'ensemble de périodes contient L. Donc, c'est une constante non nulle. De plus, $\lim_{z\to0}\mathscr{K}_\Lambda(z)/F(z)=1$, ce qui achève la démonstration de l'égalité (1.9).

Pour une autre démonstration, plus technique et calculatoire, de l'égalité (1.9), on peut se reporter à [8] (pp. 232–234), ainsi que pour une démonstration de (1.10) [8, Théorème 2.4, p. 235]. La démonstration de D. Kubert se base essentiellement sur la formule de distribution du polynôme de Bernoulli $B_2(X)=X^2-X+\frac{1}{6}$, c'est-à-dire,

$$\sum_{k=0}^{N-1}B_2(X+k/N)=N^{-1}B_2(NX)$$

et sur la formule

$$1-X^N=\prod_{k=0}^{N-1}(1-e(k/N)X).$$

Remarque. Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L\subseteq\Lambda$. La théorie des groupes abéliens de type fini assure qu'il existe un couple ordonné d'entiers strictement possitifs (m,n) et un seul avec m divisant n et tel qu'il existe une base ordonnée (w_1,w_2) de L sur $\mathbb{Z}$ de sorte que le couple (w_1',w_2') définie par

$$w_1'=\frac{w_1}{m},\quad w_2'=\frac{w_2}{n},$$

est une base de Λ sur $\mathbb{Z}$. On peut alors définir une racine huitième de l'unité $\varepsilon_{\Lambda/L}$, associée aux réseaux Λ et L, par l'égalité suivante

$$\varepsilon_{\Lambda/L}=e\left(\frac{3mn+m-n-3}{8}\right),$$

de sorte que $\varepsilon_{\Lambda/L}$ ne dépend que des réseaux Λ et L. Notez que $\varepsilon_{\Lambda/L} = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)$ pour toute base ordonnée $\mathcal{B}$ de L sur $\mathbb{Z}$ telle qu'il existe le système de représentants $\mathcal{R}$ de Λ/L adapté à la base $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{R}$ possédant des paramètres (m', n') tels que m' divise n', car dans cette situation on a $m' = m$ et $n' = n$.

1.3. Formes de Jacobi

Nos principales références pour cette section sont [1,2]. Introduisons la fonction

$$D_L(z;\varphi) = e(E_L(z,\varphi)/2)\frac{\mathscr{K}_L(z+\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(\varphi)}, \tag{1.13}$$

où L est un réseau complexe de base (w_1, w_2) telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$ et z, φ appartiennent à $\mathbb{C} \setminus L$. La fonction D_L est méromorphe par rapport à la première variable, mais elle perd son analyticité vis-à-vis de la seconde variable; en contrepartie elle vérifie plusieurs propriétés intéressantes connues.

(a) Elle ne dépend pas de la base (w_1, w_2), telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, du réseau L.
(b) Elle ne dépend que de φ modulo L.
(c) On a $D_L(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho,\varphi))D_L(z;\varphi)$ lorsque $\rho \in L$.
(d) On a l'équation fonctionnelle $D_L(z;\varphi)e(-E_L(z,\varphi)) = D_L(\varphi; z)$.
(e) Elle satisfait une relation de distribution additive lorsque l'on change de réseau. De façon plus précise, soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$ et $[\Lambda : L] = l$. Alors on a

$$\sum_{t \in T} D_L\,(lz;\varphi + t) = D_\Lambda\,(z;\varphi)$$

où T désigne un système complet de représentants de Λ/L dans $\mathbb{C}$. Ou d'une manière équivalente, grâce à l'équation fonctionelle, on a

$$\sum_{t \in T} D_L\,(z + t; l\varphi)\, e(-E_L(t, l\varphi)) = D_\Lambda(z;\varphi).$$

(f) Elle est aussi homogène de degré -1, c'est-à-dire

$$D_{\lambda L}(\lambda z;\lambda\varphi) = \lambda^{-1} D_L(z;\varphi)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

(g) Elle admet $1/z$ pour partie principale quand z tend vers 0:

$$\lim_{z \to 0} z D_L(z; \varphi) = 1.$$

Pour la démonstration des propriétés (a)–(e), on peut se reporter à [2]. La propriété (g) est une conséquence de la définition (1.13) et la propriété (c) de la fonction $\mathscr{K}_L$. La démonstration de (f) est facile. En effet, ceci découle immédiatement de l'homogénéité de $\mathscr{K}_L$ et du fait qu'on a, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$a(\lambda L) = |\lambda|^2 a(L),$$
$$E_{\lambda L}(\lambda z, \lambda \varphi) = E_L(z, \varphi).$$

2. Enoncé du résultat principal et sa démonstration

Notre résultat est une formule de distribution multiplicative satisfaite par les formes de Jacobi $D_L(z; \varphi)$. Avant de préciser son énoncé, nous avons besoin de considérer la fonction $\mathscr{K}(z; L, \Lambda)$, qui se définit comme suit.

Définition 2.1. Pour deux réseaux complexes L et Λ tels que $L \subseteq \Lambda$, on définit la fonction

$$\mathscr{K}(z; L, \Lambda) = \frac{\mathscr{K}_L(z)^{[\Lambda:L]}}{\mathscr{K}_\Lambda(z)}.$$

Suivant Kubert et Lang [9, p. 227; 8, Théorème 3.1] et Robert [12,13], cette fonction simple, qui est quotient de deux fonctions de Klein, vérifie les propriétés suivantes.

(a) Si $[\Lambda : L]$ est impair, la fonction $\mathscr{K}(z; L, \Lambda)$ est elliptique dont l'ensemble des périodes est L. De plus, elle est homogène de dégré $[\Lambda : L] - 1$ par rapport à la variable $(z; L, \Lambda)$, c'est-à-dire, on a

$$\mathscr{K}(\lambda z; \lambda L, \lambda \Lambda) = \lambda^{[\Lambda:L]-1} \mathscr{K}(z; L, \Lambda).$$

(b) Si $[\Lambda : L]$ est pair, la fonction $\mathscr{K}(z; L, \Lambda)^2$ est elliptique dont l'ensemble des périodes contient le réseau L.

Ces deux propriétés seront améliorées à la fin de ce paragraphe.

Le résultat principal de ce travail est le théorème suivant.

Théorème 2.2 (Théorème principal de distribution pour D_L). *Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$. Alors, pour tous z et φ appartenant à $\mathbb{C} \setminus \Lambda$, on a*

(i) $$D_\Lambda(z; \varphi) = \mathscr{K}(\varphi; L, \Lambda) \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L} D_L(z + t; \varphi) e(-E_L(t, \varphi)).$$

Ou de manière équivalente, on a

(ii) $$D_\Lambda(z;\varphi) = \mathscr{K}(z;L,\Lambda) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L} D_L(z;\varphi+t).$$

Démonstration. Ça découle des Propositions 2.3, 2.4 ci-dessous et de la propriété (c) satisfaite par la fonction $D_L(z;\varphi)$. □

Proposition 2.3. *Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$. Alors, pour tous z et φ appartenant à $\mathbb{C}\setminus\Lambda$, on a*

(i) $$D_\Lambda(z;\varphi) = D_L(z;\varphi) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}{}' \frac{D_L(z+t;\varphi)}{D_L(t;\varphi)}.$$

Ou de manière équivalente, on a

(ii) $$D_\Lambda(z;\varphi) = D_L(z;\varphi) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}{}' \frac{D_L(z;\varphi+t)}{D_L(z;t)}.$$

Démonstration. La fonction $z \mapsto D_\Lambda(z;\varphi)$ et la fonction $z \mapsto F(z) = D_L(z;\varphi) \prod'_{\bar{t}\in\Lambda/L} \frac{D_L(z+t;\varphi)}{D_L(t;\varphi)}$ satisfont les deux propriétés suivantes.

(a) Elles sont méromorphes et elles possèdent les mêmes zéros et pôles, à savoir, l'ensemble $\{-\varphi+t;\, t\in\Lambda\}$ est l'ensemble commun des zéros et l'ensemble $\{t;\, t\in\Lambda\}$ est l'ensemble commun des pôles de ces deux fonctions. De plus, tous ces zéros et tous ces pôles sont simples.

(b) On a une propriété d'ellipticité. En effet, d'après la propriété (c) de la fonction D_L, pour tout $\rho\in\Lambda$ on a

$$D_\Lambda(z+\rho;\varphi) = e\left(E_\Lambda(\rho,\varphi)\right) D_\Lambda(z;\varphi).$$

De même, pour tout $\rho\in L$, on a

$$\begin{aligned} F(z+\rho) &= F(z) e\left(E_L(\rho,\varphi)\right) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}{}' e\left(E_L(\rho,\varphi)\right) \\ &= e\left([\Lambda:L] E_L(\rho,\varphi)\right) F(z) \\ &= e\left(E_\Lambda(\rho,\varphi)\right) F(z). \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout $\rho \in \Lambda$, on a

$$F(z+\rho) = D_L(z+\rho;\varphi) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' \frac{D_L(z+\rho+t;\varphi)}{D_L(t;\varphi)}.$$

Comme la fonction $z \mapsto D_L(z+t;\varphi)e(-E_L(t,\varphi))$ ne dépend que de t modulo L et $\{\varphi+t; t\in\Lambda/L\}$ coïncide avec $\{t; t\in\Lambda/L\}$ modulo L, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(z+\rho) &= \frac{\displaystyle\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(z+t;\varphi)e\left(-E_L(t,\varphi)\right)}{\displaystyle\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(t;\varphi)e\left(-E_L(t,\varphi)\right)} \\ &= e\left([\Lambda:L]E_L(\rho,\varphi)\right)F(z) \\ &= e\left(E_\Lambda(\rho,\varphi)\right)F(z), \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction D_L et la fonction F ont le même facteur d'automorphie sous l'action de Λ, qui vaut $e(E_\Lambda(\rho,\varphi))$.

Les propriétés (a) et (b) impliquent que la fonction $z \mapsto \frac{D_\Lambda(z;\varphi)}{F(z)}$ est elliptique pour Λ et dépourvue de singularités. Donc, c'est une constante C non nulle.

Finalement, pour calculer C, on procède de la manière suivante. On sait, d'après la définition de D_L, que

$$1 = \lim_{z\to 0} zD_\Lambda(z;\varphi) = C \lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi) \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' \frac{D_L(z+t;\varphi)}{D_L(t;\varphi)},$$

d'où $C=1$, ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Proposition 2.4. *Pour deux réseaux complexes L et Λ tels que $L\subseteq\Lambda$, et pour tout $z\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$, on a*

(i) $$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(z;t)^{-1} = \mathscr{K}(z;L,\Lambda)$$

et

(ii) $$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(t;z)^{-1}e(E_L(t,z)) = \mathscr{K}(z;L,\Lambda).$$

Démonstration. Grâce à (1.13), on a

$$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(z;t) = \prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' e(E_L(z,t)/2)\,\frac{\mathscr{K}_L(z+t)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(t)},$$

et l'on obtient

$$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(z;t) = e\left(E_L\left(z,\sum_{\bar{t}\in\Lambda/L} t\right)\Big/ 2\right)\frac{\prod'_{\bar{t}\in\Lambda/L}\mathscr{K}_L(z+t)}{\mathscr{K}_L(z)^{[\Lambda:L]-1}\prod'_{\bar{t}\in\Lambda/L}\mathscr{K}_L(t)}.$$

La relation de distribution (1.9) satisfaite par $\mathscr{K}_L$ permet maintenant d'obtenir aisément l'égalité

$$\prod_{\bar{t}\in\Lambda/L}' D_L(z;t) = \frac{\mathscr{K}_\Lambda(z)}{\mathscr{K}_L(z)^{[\Lambda:L]}},$$

d'où la formule (i).

La formule (ii) se déduit inmédiatement de la formule (i) et de la propriété (d) de 1.3. □

La proposition suivante améliore les propriétés (a) et (b) concernant la périodicité de la fonction $\mathscr{K}(z;L,\Lambda)$.

Proposition 2.5. *Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L\subseteq\Lambda$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) *La fonction $z\mapsto\mathscr{K}(z;L,\Lambda)$ est elliptique dont l'ensemble des périodes contient L.*
(b) *Pour tout système $\mathcal{R}$ de représentants de Λ/L dans $\mathbb{C}$, on a*

$$\sum_{t\in\mathcal{R}} t\in L.$$

(c) *Il existe (w_1,w_2) et (w_1',w_2') bases ordonnées, respectivement, de L et Λ, de sorte que et $w_1'=\frac{w_1}{m}$, $w_2'=\frac{w_2}{n}$ pour certains entiers strictement positifs m et n de même parité.*

Démonstration. Commençons par montrer l'équivalence entre (b) et (c). On sait qu'il existe, d'après la théorie classique des groupes abéliens de type fini, (w_1, w_2) et (w'_1, w'_2) des bases ordonnées de L et Λ, respectivement, de sorte que $w'_1 = \frac{w_1}{m}$, $w'_2 = \frac{w_2}{n}$ pour certains entiers strictement positifs m et n. Si l'on choisit

$$\mathcal{R}_0 = \left\{ \frac{k}{m} w_1 + \frac{k'}{n} w_2, 0 \leqslant k \leqslant m-1; 0 \leqslant k' \leqslant n-1 \right\},$$

on a

$$\sum_{t \in \mathcal{R}_0} t = \frac{n(m-1)}{2} \omega_1 + \frac{m(n-1)}{2} \omega_2.$$

La condition $\sum_{t \in \mathcal{R}_0} t \in L$ est alors équivalente au fait que n et m sont de même parité. Puisque $\sum_{t \in \mathcal{R}} t - \sum_{t \in \mathcal{R}_0} t \in L$ pour tout système $\mathcal{R}$ de représentants de Λ/L dans $\mathbb{C}$, on a bien l'équivalence entre (b) et (c).

Pour finir, montrons que (a) et (b) sont équivalentes. Soit $\rho \in L$ et soit $\mathcal{R}$ un système de représentants de Λ/L; d'après la Proposition 2.4 et la propriété (c) satisfaite par la fonction $D_L(z;\varphi)$, on a

$$\begin{aligned} \mathscr{K}(z+\rho; L, \Lambda) &= \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L}' D_L(z+\rho; t)^{-1} \\ &= \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L}' e(-E_L(\rho, t)) D_L(z; t)^{-1} \\ &= e\left(-E_L\left(\rho, \sum_{t \in \mathcal{R}} t\right)\right) \prod_{\bar{t} \in \Lambda/L}' D_L(z; t)^{-1}. \end{aligned}$$

Donc, pour que $\mathscr{K}(z; L, \Lambda)$ soit elliptique pour le réseau L, il faut et il suffit que

$$e\left(E_L\left(\rho, \sum_{t \in \mathcal{R}} t\right)\right) = 1 \quad \forall \rho \in L,$$

ce qui équivaut à

$$e\left(E_L\left(w_1, \sum_{t \in \mathcal{R}} t\right)\right) = 1, \quad e\left(E_L\left(w_2, \sum_{t \in \mathcal{R}} t\right)\right) = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{t \in \mathcal{R}} t \in L. \qquad \square$$

3. Les résultats de Kubert et de Coates, Kubert et Robert, revisités

Ce paragraphe est constitué par deux parties, dans lesquelles on montre, respectivement, comment on peut appliquer notre résultat pour retrouver le théorème, dû à D. Kubert, concernant la formule de distribution satisfaite par les fonctions elliptiques et celui de J. Coates, D. Kubert et G. Robert concernant la formule de distribution satisfaite par une certaine fonction $\zeta(z; L, \Lambda)$.

3.1. Le théorème de Kubert

Le théorème suivant exprime toute fonction elliptique à l'aide de nos formes de Jacobi $D_L(z; \varphi)$. C'est une autre version du Théorème 2.14 de Kubert [8, p. 237]; dans ce travail de Kubert, les fonctions elliptiques sont exprimées à l'aide de la fonction de Klein $\mathscr{K}_L$.

Théorème 3.1.1. *Soient L un réseau complexe et $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$ un diviseur principal modulo L, c'est-à-dire, tel que $\sum_{i=1}^{r} n_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{r} n_i a_i \in L$. Alors toute fonction elliptique, admettant pour périodes le réseau L et pour diviseur le diviseur $\mathcal{D}$, est égale, à une constante multiplicative non nulle près, à la fonction $g_{\mathcal{D}}(z; L)$ définie par*

$$g_{\mathcal{D}}(z; L) = \prod_{a_i \notin L} D_L(z; -a_i)^{n_i}.$$

Remarque 3.1.2. La constante dans le théorème ci-dessus ne dépend que du diviseur $\mathcal{D}$ modulo le réseau L, c'est-à-dire, si $\mathcal{D}'$ est un autre diviseur vérifiant la condition $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}' \pmod{L}$, alors les fonctions $g_{\mathcal{D}}(z, L)$ et $g_{\mathcal{D}'}(z, L)$ coïncident.

Démonstration. Tout d'abord, comme $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$ est un diviseur principal modulo L, la fonction $g_{\mathcal{D}}(z; L)$ définie par $z \mapsto \prod_{a_i \notin L} D_L(z; -a_i)^{n_i}$, est elliptique pour le réseau L; ceci se vérifie facilement en utilisant la propriété (c) de la fonction $D_L(z; \varphi)$. De plus, $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$ est exactement le diviseur de la fonction $g_{\mathcal{D}}(z; L)$. Donc, toute fonction elliptique admettant pour périodes le réseau L et comme diviseur le diviseur $\mathcal{D}$, est certainement égale, à une constante multiplicative non nulle près, à la fonction $g_{\mathcal{D}}(z; L)$.

Comme l'on verra dans la suite, des exemples remarquables du dernier théorème sont fournis par les fonctions $\wp_L$ et $\wp'_L$ de Weierstrass. $\square$

Exemple 3.1.3. Pour tous z et φ appartenant à $\mathbb{C} \setminus L$, on a

$$\wp_L(z) - \wp_L(\varphi) = D_L(z, \varphi) D_L(z, -\varphi).$$

En particulier, si φ est un zéro de $\wp_L$, on obtient

$$\wp_L(z) = D_L(z, \varphi) D_L(z, -\varphi).$$

Démonstration. En effet, d'après (1.13), on peut écrire

$$\begin{aligned} D_L(z, \varphi) D_L(z, -\varphi) &= e(E_L(z, \varphi)/2) \frac{\mathscr{K}_L(z+\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(\varphi)} e(E_L(z, -\varphi)/2) \\ &\quad \times \frac{\mathscr{K}_L(z-\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(-\varphi)} \\ &= \frac{\mathscr{K}_L(z+\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(\varphi)} \frac{\mathscr{K}_L(z-\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)\mathscr{K}_L(-\varphi)} \\ &= -\frac{\mathscr{K}_L(z+\varphi)\mathscr{K}_L(z-\varphi)}{\mathscr{K}_L(z)^2 \mathscr{K}_L(\varphi)^2} \end{aligned}$$

et on en déduit, d'après (1.13) à nouveau et la formule classique de différence pour la fonction $\wp_L$ de Weierstrass [9, p. 51] ou [10, Chapter 18, Section 1, Théorème 2], que

$$D_L(z, \varphi) D_L(z, -\varphi) = \wp_L(z) - \wp_L(\varphi). \qquad \square$$

Exemple 3.1.4. On a

$$\wp'_L(z) = -2 \prod_{\bar{t} \in \frac{1}{2}L/L}{}' D_L(z; t).$$

Démonstration. La fonction $z \mapsto \wp'_L(z)$ est elliptique pour L et son diviseur est égale à

$$\sum_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L}{}^{\prime} (t) - 3(0).$$

D'autre part, la fonction G définit par $z \mapsto \prod'_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L} D_L(z;t)$ vérifie les propriétés suivantes. Pour tout $\rho \in L$, on a

$$\begin{aligned} G(z+\rho) &= \prod_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L}{}^{\prime} D_L(z+\rho;t) \\ &= e\left(E_L\left(\rho, \sum_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L} t\right)\right) \prod_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L}{}^{\prime} D_L(z;t). \end{aligned}$$

Donc

$$G(z+\rho) = G(z)$$

et la fonction G est elliptique pour L. En plus, le diviseur de G est égale à

$$\sum_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L}{}^{\prime} (t) - 3(0).$$

Par conséquent, G et $\wp'_L$ sont proportionnelles. Puisque $\lim_{z\to 0} z^3\wp'_L(z) = -2$ et $\lim_{z\to 0} zD_L(z,t) = 1$, on a

$$\wp'_L(z) = -2 \prod_{\bar{t}\in\frac{1}{2}L/L}{}^{\prime} D_L(z;t). \qquad \square$$

3.2. Amélioration du théorème de Coates, Kubert et Robert, concernant les unités de Stark

Le théorème suivant est une relation de distribution pour la fonction

$$\mathscr{K}(z; L, \Lambda),$$

où L et Λ sont deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$. Nous montrons qu'il contient le théorème de Coates, Kubert et Robert concernant les unités de Stark.

Soient L et L' deux réseaux complexes tels que $L \subseteq L'$. On désigne par M un réseau tel que $L \subseteq M$ et $M \cap L' = L$, et on pose $M' = M + L'$; on remarque ainsi que l'inclusion $L' \subset M'$ induit un isomorphisme de groupes $L'/L \simeq M'/M$. Soit $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ une base de L sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$ et de sorte que pour des entiers m et n strictement positifs, le couple $w_1' = w_1/m$, $w_2' = w_2/n$ soit une base de L' sur $\mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{R}$ le système de représentants de L'/L adapté à la base (w_1, w_2); soit $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{w}_1, \tilde{w}_2\}$ une base de M sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Im}(\tilde{w}_1/\tilde{w}_2) > 0$ et de sorte que pour des entiers $\tilde{m}$ et $\tilde{n}$ strictement positifs, le couple $\tilde{w}_1' = \tilde{w}_1/\tilde{m}$, $\tilde{w}_2' = \tilde{w}_2/\tilde{n}$ soit une base de M' sur $\mathbb{Z}$, et soit $\tilde{\mathcal{R}}$ le système de représentants de M'/M adapté à la base $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$. Remarquez qu'en tout cas $\tilde{m}\tilde{n} = mn$.

Théorème 3.2.1. *Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout système de représentants $\mathcal{S}$ de M/L, on a*

$$\begin{aligned}
&\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathscr{K}(z+\alpha; L, L') \\
&\quad = \mathscr{K}(z; M, M')\, e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha\right)\right) \frac{\varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]}}{\varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)} \frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[M':L]}} \\
&\qquad \times \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}.
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après la Proposition 2.4(i), on a

$$\mathscr{K}(z+\alpha; L, L') = \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' D_L(z+\alpha; t)^{-1}.$$

Donc

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathscr{K}(z+\alpha; L, L') = \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' D_L(z+\alpha; t)^{-1}.$$

Les produits étants finis, on peut alors les intervertir, et on obtient

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathscr{K}\left(z+\alpha; L, L'\right) = \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \Big(D_L(z+\alpha; t)^{-1} e(E_L(\alpha, t))\Big)\, e(-E_L(\alpha, t)).$$

Mais, grâce au théorème principal (Théorème 2.2), on a

$$D_M(z;t)^{-1} = \mathscr{K}(t;L,M)^{-1} \prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \left(D_L(z+\alpha;t)^{-1} e(E_L(\alpha,t))\right),$$

et alors on peut écrire le produit ci-dessus comme suit

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathscr{K}\left(z+\alpha;L,L'\right) = \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' D_M(z;t)^{-1} \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}(t;L,M) \times e\left(-E_L\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}}\alpha, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right).$$

Le fait que l'inclusion $L' \subseteq M'$ induit un isomorphisme de groupes $L'/L \simeq M'/M$, implique que $\mathcal{R}$ est aussi un système de représentants de M'/M, et alors, grâce à la Proposition 2.4(i), on a bien

$$\mathscr{K}\left(z;M,M'\right) = \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' D_M(z;t)^{-1},$$

d'où

$$\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \mathscr{K}\left(z+\alpha;L,L'\right) = \mathscr{K}\left(z;M,M'\right) \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}(t;L,M)\, e\left(-E_L\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{S}}\alpha, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right).$$

Pour achever la preuve, il reste à montrer que

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}(t;L,M) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]} \varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)^{-1} \frac{\eta^2(w_1',w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1,w_2)^{[M':L]}} \frac{\eta^2(\tilde{w}_1,\tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1',\tilde{w}_2')},$$

ce qui se fait facilement. En effet, la relation de distribution (1.10) appliquée à la fonction $\mathscr{K}_L$ donne la formule

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}_L(t) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0) \frac{\eta^2(w_1',w_2')}{\eta^2(w_1,w_2)^{[L':L]}}$$

et appliquée à la fonction $\mathscr{K}_M$ donne la formule

$$\prod_{t\in\tilde{\mathcal{R}}}{}' \mathscr{K}_M(t) = \varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)\, \frac{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}.$$

Alors, de la Définition 2.1 on obtient l'égalité

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}(t; L, M) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]}\varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)^{-1}\, \frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[L':L][M:L]}}\, \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}.$$

Or $[L' : L][M : L] = [M' : M][M : L] = [M' : L]$, donc

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}(t; L, M) = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]}\varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)^{-1}\, \frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[M':L]}}\, \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')},$$

et le Théorème 3.2.1 est demontré. $\square$

Lorsque $[L' : L]$ est impair, on considère la fonction $\zeta(z; L, L')$ définie pour $z \notin L'$ par le produit fini suivant

$$\zeta(z; L, L') = \prod_{\bar{t}\in T} \frac{1}{\wp_L(z) - \wp_L(t)},$$

où T vérifie la réunion disjointe $T \cup -T \cup \{0\} = L'/L$ (voir [9, p. 228]).

Corollaire 3.2.2 (Coates–Kubert–Robert Revisité). *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème* 3.2.1 *et lorsque* $[L' : L]$ *est impair, on a*

$$\begin{aligned}&\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} \zeta(z+\alpha; L, L')\\ &\quad = \zeta(z; M, M')e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha\right)\right) \frac{\varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^{[M:L]}}{\varepsilon_{\tilde{\mathcal{B}}}(0)}\, \frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[M':L]}}\\ &\quad\quad \times \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}.\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que la fonction $\zeta(z; L, L')$ coïncide avec la fonction $\mathscr{K}(z; L, L')$, ce qui se fait aisément. En effet, pour tous z et $t \in \mathbb{C} \setminus L$ on a

$$D_L(z; t) D_L(z; -t) = \wp_L(z) - \wp_L(t).$$

Comme $\zeta(z; L, L') = \prod_{\bar{t} \in T} \frac{1}{\wp_L(z) - \wp_L(t)}$ et $T \cup -T \cup \{0\} = L'/L$, on peut écrire

$$\zeta(z; L, L') = \prod_{\bar{t} \in T} \frac{1}{D_L(z; t) D_L(z; -t)} = \prod_{\bar{t} \in L'/L}{}^{'} D_L(z; t)^{-1}.$$

Mais, pour tous réseaux complexes L et L' tels que $L \subseteq L'$ et tout $z \in \mathbb{C} \setminus L'$, grâce à la Proposition 2.4(i) on a l'égalité

$$\prod_{\bar{t} \in L'/L}{}^{'} D_L(z; t)^{-1} = \mathscr{K}(z; L, L'),$$

et le corollaire est démontré. $\square$

Le Corollaire 3.2.2 améliore le théorème de Coates, Kubert et Robert [3, appendice, Théorème 8; 8, Théorème 3.2, 12, relation (1)], car celui-ci est obtenu sous la condition $[L' : L]$ est premier avec 6.

On rappelle que si L est un réseau complexe et (w_1, w_2) et $(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$ sont des bases de L sur $\mathbb{Z}$ telles que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$ et $\mathrm{Im}(\hat{w}_1/\hat{w}_2) > 0$, on a $\eta^{24}(w_1, w_2) = \eta^{24}(\hat{w}_1, \hat{w}_2)$. On peut donc définir

$$\Delta(L) = \eta^{24}(w_1, w_2),$$

où (w_1, w_2) est n'importe quelle base de L sur $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$. Alors, lorsqu'on passe à la puissance 12-ième, le Corollaire 3.2.2 devient le corollaire suivant, qui est un résultat classique (voir par exemple [14, p. 50]).

Corollaire 3.2.3. *Soient L et L' deux réseaux complexes tels que $L \subseteq L'$ et $[L' : L]$ est impair. On désigne par M un réseau tel que $L \subseteq M$ et $M \cap L' = L$, et on pose $M' = M + L'$. Alors, pour tout système de représentants $\mathcal{S}$ de M/L, on a*

$$\prod_{\alpha \in \mathcal{S}} \zeta(z + \alpha; L, L')^{12} = \zeta(z; M, M')^{12} \frac{\Delta(L')^{[M:L]}}{\Delta(L)^{[M':L]}} \frac{\Delta(M)^{[M':M]}}{\Delta(M')}.$$

Démonstration. Soit (m, n) le seul couple ordonné d'entiers strictement positifs avec m divisant n et tel qu'il existe une base ordonnée $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ de L sur $\mathbb{Z}$ de sorte que $w_1' = w_1/m$, $w_2' = w_2/n$ est une base de L' sur $\mathbb{Z}$. Puisque $L'/L \simeq M'/M$, il existe aussi une base ordonnée $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ de M sur $\mathbb{Z}$ de sorte que $\tilde{w}_1' = \tilde{w}_1/m$, $\tilde{w}_2' = \tilde{w}_2/n$ est une base de M' sur $\mathbb{Z}$; en plus, on peut supposer, sans perte de généralité, que $\mathrm{Im}(w_1, w_2) > 0$ et que $\mathrm{Im}(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2) > 0$. D'après la remarque faite à la fin du Section 1.2, on a donc

$$\varepsilon_{M'/M} = \varepsilon_{L'/L},$$

et le Corollaire 3.2.2 implique l'égalité

$$\begin{aligned}\prod_{\alpha\in\mathcal{S}} &\zeta(z+\alpha; L, L') \\ &= \zeta(z; M, M')e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha\right)\right)\varepsilon_{L'/L}^{[M:L]-1}\frac{\eta^2(w_1', w_2')^{[M:L]}}{\eta^2(w_1, w_2)^{[M':L]}} \\ &\quad\times \frac{\eta^2(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{w}_1', \tilde{w}_2')}.\end{aligned}$$

Puisque $[L' : L] = mn$ et $[L' : L]$ est impair, m et n sont tous les deux impairs, donc, d'une part, $\sum_{t\in\mathcal{R}} t \in L$ et $2\sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha \in L$, de sorte que $e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, \sum_{\alpha\in\mathcal{S}} \alpha\right)\right)^2 = 1$, et d'autre part, $3mn+m-n-3$ est pair et alors $(\varepsilon_{L'/L})^4 = 1$, car $\varepsilon_{L'/L} = e(\frac{3mn+m-n-3}{8})$. Alors, c'est clair que, par passage à la puissance 12-ième, on obtient le Corollaire 3.2.3 à partir de la dernière égalité. $\square$

Remarque 3.2.4. On notera que le nombre

$$e\left(E_L\left(\sum_{\mathcal{R}} t, \sum_{\mathcal{S}} \alpha\right)\right)\varepsilon_{L'/L}^{[M:L]-1}\frac{\eta^2(\omega_1', \omega_2')^{[M:L]}}{\eta^2(\omega_1, \omega_2)^{[M':L]}}\frac{\eta^2(\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2)^{[M':M]}}{\eta^2(\tilde{\omega}_1', \tilde{\omega}_2')}$$

défini dans la démonstration du Corollaire 3.2.3, fournit une racine 12-ième de la quantité

$$\frac{\Delta(L')^{[M:L]}}{\Delta(L)^{[M':L]}}\frac{\Delta(M)^{[M':M]}}{\Delta(M')}.$$

Il faut dire que, lorsque $[L' : L]$ est premier avec 6, on est proche du remarquable résultat du travail de G. Robert sur la racine 12-ième canonique de la fonction delta [12].

4. Amélioration d'une formule de distribution établie par Jarvis et Wildeshaus, concernant la fonction φ de Siegel

Dans ce paragraphe, on définit des formes de Jacobi associés aux diviseurs de $\mathbb{C}$ et puis on montre, à l'aide de notre résultat principal, que ces nouvelles formes satisfont une formule de distribution. Cette formule améliore celle établie par F. Jarvis [6,7,17] concernant la fonction φ de Siegel. Il faut dire que la formule explicite donnée dans le Théorème 0.1 de [7] est la même que celle donnée dans le Théorème 0.2 de [6], mais le principe des démonstrations n'est pas le même. Il est à noter que cette formule n'est vraie qu'aux racines de l'unité près. Dans ce qui suit, nous proposons une troisième façon de procéder pour retrouver une vraie formule, c'est-à-dire, nous déterminons la racine de l'unité qui manquait à Jarvis.

Soit L un réseau complexe. Si (w_1, w_2) désigne une base de L telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, rappelons que la fonction de Siegel associée a L et à la base (w_1, w_2) de L est définie par

$$\varphi_L(z; w_1, w_2) = \mathscr{K}_L(z)\eta^2(w_1, w_2), \tag{4.1}$$

où η est la fonction de Dedekind, dont le carré a été défini dans (1.11). La fonction φ_L de Siegel est homogène de degré -1.

Pour tout diviseur $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i)$ de $\mathbb{C}$, principal ou non, on définit la forme

$$\varphi_L(\mathcal{D}; w_1, w_2) = \prod_{a_i \notin L} \varphi_L(a_i; w_1, w_2)^{n_i}, \tag{4.2}$$

et pour tout $t \in \mathbb{C}$, on pose

$$\mathcal{D} \oplus t = \sum_{i=1}^{r} n_i(a_i + t).$$

Le résultat suivant est celui de Jarvis amélioré.

Théorème 4.1 (Jarvis revisité). *Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subseteq \Lambda$; soit $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ une base ordonnée de L sur $\mathbb{Z}$ telle que* $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$ *et de sorte que pour des entiers m et n strictement positifs, le couple $w_1' = w_1/m, w_2' = w_2/n$ soit une base de Λ sur $\mathbb{Z}$, et soit $\mathcal{R}$ le système de représentants de Λ/L adapté à la base (w_1, w_2). Alors on a*

$$\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^2 e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, y\right)\right) \prod_{t\in\mathcal{R}} \varphi_L(\mathcal{D} \oplus t; w_1, w_2)$$

pour tout diviseur $\mathcal{D} = (x+y) + (x-y) - 2(x) - 2(y) + 2(0)$ *vérifiant*

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{D}) \cap \Lambda = \{0\}.$$

Démonstration. Elle consiste en une suite d'égalités élémentaires qui sont faciles à démontrer, dans lesquelles on utilisera le théorème principal (Théorème 2.2) et plusieurs propriétés du Sections 1.2 et 1.3. En effet, soit $\mathcal{D}$ un diviseur de $\mathbb{C}$ de la forme

$$\mathcal{D} = (x+y) + (x-y) - 2(x) - 2(y) + 2(0),$$

et tel que $\mathrm{Supp}(\mathcal{D}) \cap \Lambda = \{0\}$. D'une part, la définition du diviseur $\mathcal{D}$ nous assure que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x \neq \pm y$. Donc, on a $x \notin \Lambda$, $y \notin \Lambda$, $x+y \notin \Lambda$ et $x-y \notin \Lambda$. D'autre part, remarquez que, pour tout $t \in \mathcal{R}$, on a

$$\mathcal{D} \oplus t = (x+y+t) + (x-y+t) - 2(x+t) - 2(y+t) + 2(t). \tag{4.3}$$

La définition (4.2) de φ_Λ nous donne

$$\begin{aligned}
&\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') \\
&\quad = \varphi_\Lambda(x+y; w_1', w_2')\varphi_\Lambda(x-y; w_1', w_2')\varphi_\Lambda(x; w_1', w_2')^{-2}\varphi_\Lambda(y; w_1', w_2')^{-2}
\end{aligned}$$

et alors, si on rappelle la définition (4.1), on a

$$\begin{aligned}
&\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') \\
&\quad = \mathscr{K}_\Lambda(x+y)\eta^2(w_1', w_2')\mathscr{K}_\Lambda(x-y)\eta^2(w_1', w_2')\mathscr{K}_\Lambda(x)^{-2}\eta^{-4}(w_1', w_2') \\
&\qquad \times \mathscr{K}_\Lambda(y)^{-2}\eta^{-4}(w_1', w_2').
\end{aligned}$$

Grâce à (1.8), on déduit que $\mathscr{K}_\Lambda$ est une fonction impaire, on peut alors écrire

$$\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') = -\frac{\mathscr{K}_\Lambda(x+y)}{\mathscr{K}_\Lambda(x)\mathscr{K}_\Lambda(y)}\,\frac{\mathscr{K}_\Lambda(x-y)}{\mathscr{K}_\Lambda(x)\mathscr{K}_\Lambda(-y)}\,\eta^{-4}(w_1', w_2').$$

Notez que $e(E_\Lambda(x,y)/2)e(E_\Lambda(x,-y)/2) = 1$, donc de la dernière égalité et (1.13) on déduit

$$\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') = -D_\Lambda(x; y)D_\Lambda(x; -y)\eta^{-4}(w_1', w_2').$$

Maintenant, grâce au théorème principal (Théorème 2.2, ii), de la formule precédente on obtient

$$\begin{aligned}
&\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') \\
&\quad = -\mathscr{K}(x; L, \Lambda)^2 \prod_{t\in\mathcal{R}} D_L(x; y+t) \prod_{t\in\mathcal{R}} D_L(x; -y+t)\eta^{-4}(w_1', w_2'). \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

Pour le pas suivant, remarquons plusieurs faits. De (1.13) on déduit

$$D_L(x; y+t) = e(E_L(x, y+t)/2)\, \frac{\mathscr{K}_L(x+y+t)}{\mathscr{K}_L(x)\mathscr{K}_L(y+t)}$$

et

$$D_L(x; -y+t) = e(E_L(x, -y+t)/2)\, \frac{\mathscr{K}_L(x-y+t)}{\mathscr{K}_L(x)\mathscr{K}_L(-y+t)},$$

la Définition 2.1 et le fait que l'ensemble $\mathcal{R}$ possède $[\Lambda : L]$ éléments, implique automatiquement les égalités suivantes

$$\mathscr{K}(x; L, \Lambda)^2 = \frac{\mathscr{K}_L(x)^{2[\Lambda:L]}}{\mathscr{K}_\Lambda(x)^2}, \qquad \prod_{t\in\mathcal{R}} \mathscr{K}_L(x)^2 = \mathscr{K}_L(x)^{2[\Lambda:L]},$$

c'est facile à vérifier que

$$\prod_{t\in\mathcal{R}} e(E_\Lambda(x, y+t)/2)e(E_\Lambda(x, -y+t)/2) = e\left(E_\Lambda\left(x, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right)$$

et la formule (1.9) implique

$$\mathscr{K}_\Lambda(x)^2 = e\left(E_\Lambda\left(x, \sum_{t\in\mathcal{R}} t\right)\right) \mathscr{K}_L(x)^2 \prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \frac{\mathscr{K}_L(x+t)^2}{\mathscr{K}_L(t)^2}.$$

De ces derniers faits divers et de l'égalité (4.4), on déduit

$$\begin{aligned}
&\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') \\
&\quad = -\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}_L(t)^2 \prod_{t\in\mathcal{R}} \frac{\mathscr{K}_L(x+y+t)\mathscr{K}_L(x-y+t)}{\mathscr{K}_L(x+t)^2\mathscr{K}_L(y+t)\mathscr{K}_L(-y+t)} \\
&\qquad \times \eta^{-4}(w_1', w_2'). \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Mais grâce à (1.10) on peut écrire

$$\prod_{t\in\mathcal{R}}{}' \mathscr{K}_L(t)^2\eta^{-4}(w_1', w_2') = \varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^2\eta^{-4[\Lambda:L]}(w_1, w_2)$$

et, compte tenu de (4.3), on sait que

$$\varphi_L(\mathcal{D}\oplus t; w_1, w_2) = \frac{\mathscr{K}_L(x+y+t)\mathscr{K}_L(x-y+t)}{\mathscr{K}_L(x+t)^2\mathscr{K}_L(y+t)^2}\,\eta^{-4}(w_1, w_2),$$

donc de l'égalité (4.5) on obtient

$$\varphi_\Lambda(\mathcal{D}; w_1', w_2') = -\varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^2\gamma \prod_{t\in\mathcal{R}} \varphi_L(\mathcal{D}\oplus t; w_1, w_2),$$

où

$$\gamma = \prod_{t\in\mathcal{R}} \frac{\mathscr{K}_L(y+t)}{\mathscr{K}_L(-y+t)}.$$

Il reste simplement à déterminer γ. Mais la détermination de γ est une conséquence immédiate de (1.9) et du fait que les fonctions $\mathscr{K}_\Lambda$ et $\mathscr{K}_L$ sont impaires; en fait, on a

$$\gamma = -e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, y\right)\right),$$

d'où finalement l'égalité cherchée. $\square$

Remarque 4.2. (1) Notre méthode de démonstration est différente de celle de Jarvis.

(2) Le nombre complexe $\varepsilon_{\mathcal{B}}(0)^2 e\left(E_L\left(\sum_{t\in\mathcal{R}} t, y\right)\right)$ dépend du choix de la base $\mathcal{B}$ de L telle qu'il existe le système de représentants $\mathcal{R}$ de Λ/L adapté à la base $\mathcal{B}$. Lorsque y définit un point de s-division de la courbe elliptique $\mathbb{C}/L$, ce nombre est une racine $8s$-ième de l'unité.

Remerciements

Une grande partie de ce travail a été realisée lors du séjour de A. Bayad, en Août 2001, à l'université Concordia à Montréal. Il le remercie de son hospitalité. Ces remerciements vont tout particulièrement à F. Thaine et H. Kisilevsky pour leur accueil chaleureux. J. Gómez Ayala tient à remercier le Département de Mathématiques de l'Université d'Evry Val d'Essonne pour son hospitalité pendant le mois d'Août 2002. Ce travail a été partiellement soutenu par le project de recherche UPV-00127.310-E-15404-2003 de l'Universite du Pays Basque. Nous tenons à les remercier de leur support.

References

[1] A. Bayad, G. Robert, Amélioration d'une congruence pour certains éléments de Stickelberger quadratiques, Bull. Soc. Math. France 125 (1997) 249–267.
[2] A. Bayad, G. Robert, Note sur une forme de Jacobi méromorphe, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math. 325 (1997) 455–460.
[3] J. Coates, Elliptic curves with complex multiplication and Iwasawa theory, Bull. London Math. Soc. 23 (1991) 321–350.
[4] J. Coates, A. Wiles, On the conjecture of Birch and Swinnerton–Dyer, Invent. Math. 39 (1997) 223–251.
[5] R. Gillard, G. Robert, Groupes d'unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France 107 (1979) 305–317.
[6] F. Jarvis, A distribution relation on elliptic curves, Bull. London. Math. Soc. 32 (2000) 146–154.
[7] F. Jarvis, An elementary proof of a distribution relation on elliptic curves, Manuscripta Math. 103 (2000) 329–337.
[8] D. Kubert, Product formulae on elliptic curves, Invent. Math. 117 (1994) 227–273.
[9] D. Kubert, S. Lang, Modular Units, Springer, New York, 1981.
[10] S. Lang, Elliptic Functions, second ed., Springer, New York, 1987.
[11] G. Robert, Unités elliptiques, Bull. Soc. Math. France, mémoire 36 (1973).
[12] G. Robert, Concernant la relation de distribution satisfaite par la fonction φ associée à un réseau complexe, Invent. Math. 100 (1990) 231–257.
[13] G. Robert, Unités de Stark et racine 12-ième canonique, Prép. Inst. Fourier 181 (1991).
[14] K. Rolshausen, N. Schappacher, On the second K-group of an elliptic curve, J. Reine Angew. Math. 495 (1998) 61–77.
[15] E. de Shalit, Iwasawa Theory of Elliptic Curves with Complex Multiplication, Academic Press, Orlando, 1987.
[16] J. Wildeshaus, On an elliptic analogue of Zagier's conjecture, Duke Math. J. 87 (1997) 355–407.
[17] J. Wildeshaus, Variations of Hodge–de Rham structure and elliptic modular units, in: A. Reznikov, N. Schappacher (Eds.), Regulators in Analysis, Geometry and Number Theory, Progress in Mathematics, vol. 171, Birkhäuser, Boston, 1999, pp. 295–324.