JOURNAL OF NUMBER THEORY **65**, 1–22 (1997)
ARTICLE NO. NT972143

Valuation q-adique et relation de distribution additive pour certaines fonctions q-périodiques

Abdelmejid Bayad*

Département de Mathématiques, Université d'Evry-Val-d'Essonne, Boulevard des Coquibus, 91025 Evry, France

Communicated by M. Waldschmidt

Received June 21, 1996; revised December 31, 1996

Le présent texte adapte au cadre rigide, c'est-à-dire aux courbes elliptiques de Tate $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et aux fonctions q-périodiques, la preuve d'une relation de distribution additive présentée dans [BA-RO] pour le cas des tores complexes $\mathbf{C}/\Omega$. Les fonctions qui la satisfont sont notées $D_{q^{\mathbf{Z}}}$. D'autre part nous calculons, via une introduction ad-hoc de "fonctions de Siegel rigides" définies sur les seuls points de torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, la valuation q-adique en un point de torsion fixé de ces fonctions $D_{q^{\mathbf{Z}}}$. Ceci nous permet enfin, en appendice, de donner une méthode de calcul plus efficace des valuations q-adiques de produits de résolvantes elliptiques, définissant des éléments de Stickelberger *quadratiques*, telles qu'apparues d'abord dans [BA-B-CN] puis sous la forme présentée ici dans [BA-RO].

SOMMAIRE

0. INTRODUCTION

On sait que pour tout corps local il existe une théorie analytique des fonctions périodiques, développée par Tate et Roquette analogue à la théorie des fonctions elliptiques pour un réseau complexe. C'est cela le cadre de notre travail; la méthode est une illustration du principe de Lefschetz.

* E-mail: bayad@lami.univ-evry.fr.

0022-314X/97 $25.00

Nous nous sommes servi du cas complexe traité dans [BA-RO] comme d'un guide: en particulier p et ℓ ne sont pas des nombres premiers, mais simplement des entiers vérifiant $(p, \ell) = 1$. Nous fixons K un corps local et $\bar{K}$ une clôture algébrique de K, et notons $car(K)$ sa caractéristique. Nous désignons par q un élément de K^* de valuation strictement positive. Nous notons v la valuation discrète normalisée de K. En fait, ce travail s'inspire du schéma suivant:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pour } \Omega \text{ un réseau de } \mathbf{C}\text{, le tore}\\ \text{complexe } \mathbf{C}/\Omega,\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Pour le sous-groupe discret } q^{\mathbf{Z}} \text{ de}\\ K^*\text{, la courbe de la Tate } \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}},\end{array}\right.$$

et $\psi \in \mathbf{C}$ (resp. $\bar{K}^*$) un point de torsion d'ordre fini dans $\mathbf{C}/\Omega$ (resp. $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$)

$$\left.\begin{array}{l}\text{les fonctions de Siegel associées}\\ \text{aux réseaux } \Omega \text{ et } \Lambda = \Omega + \mathbf{Z}\psi\\ \text{sont liées par une formule de}\\ \text{distribution multiplicative.}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{dans le cas \textit{rigide}, c'est cette}\\ \text{formule de distribution multi-}\\ \text{plicative que permet d'associer,}\\ \text{dans la définition 2.5, à l'analogue}\\ \text{rigide de la fonction de Siegel}\\ \text{relative au sous-groupe discret } q^{\mathbf{Z}}\\ \text{de } \bar{K}^* \text{ \textit{une nouvelle fonction} encore}\\ \text{dite "de Siegel" relative au sous-}\\ \text{groupe discret } q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}} \text{ de } \bar{K}^*.\end{array}\right.$$

Remarque 0.1. Lorsque ψ engendre $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ on retrouve la fonction de Siegel rigide relative au sous-groupe discret $\psi^{\mathbf{Z}}$ de $\bar{K}^*$; cf. remarque 2.6.

Donc, nous définissons une fonction de Siegel rigide associée au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de la façon la plus naturelle possible. Ensuite, pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de K^* nous donnons une formule pertinente qui définit la fonction de Siegel correspondante. Nous remarquons que cette dernière définition est l'analogue, sur une courbe de Tate $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, de la formule de distribution satisfaite par les fonctions de Siegel sur le tore complexe, cf. [K, Th. 2.3].

D'autre part, par souci de complétude, cf. lemme 4.2, nous établissons l'analogue rigide du résultat fondamental "Toute fonction elliptique non constante est de valence supérieure ou égale à 2".

Pour α un autre point d'ordre fini, soient

$$\Lambda = q^{\mathbf{z}}\psi^{\mathbf{Z}}, \qquad \Gamma = q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}$$

deux sous-groupes discrets de $\bar{K}^*$, contenant chacun $q^{\mathbf{Z}}$, et supposons que

(i) les groupes cycliques $\Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ et $\Gamma/q^{\mathbf{Z}}$ sont d'ordre respectif p et ℓ;

(ii) les entiers p et ℓ sont premiers d'entre eux, de sorte que $\Lambda \cap \Gamma = q^{\mathbf{Z}}$.

De plus, notons Σ le réseau somme $\Lambda + \Gamma$, si bien que $\Sigma/\Lambda \approx \Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ est un groupe cyclique d'ordre ℓ et $\Sigma/\Gamma \approx \Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ un groupe cyclique d'ordre p.

Pour chaque point de torsion (φ modulo Λ) non trivial dans $\bar{K}^*/\Lambda$ et d'ordre divisant p, nous construisons une fonction F_1 méromorphe de diviseur $(\varphi)-(0)$ relativement à Λ ainsi qu'une fonction F_2 méromorphe de diviseur $(\varphi^{[1/\ell]_p})-(0)$ relativement à Σ, possédant toutes deux $q^{\mathbf{Z}}$ comme réseau de périodes. On note ici $[1/\ell]_p$ un inverse de ℓ modulo p.

La fonction F_1 possède pour multiplicateur sous l'action de $\Lambda/q^{\mathbf{Z}}$ les mêmes multiplicateurs que la fonction F_2 sous l'action de Σ/Γ, à savoir des racines de l'unité données par l'accouplement de Weil d'indice p (en fait, d'indice l'ordre de (φ modulo Λ)). Ainsi, la fonction F_2—qui est donc périodique pour Γ—est égale à la somme des translatés de F_1 par les points de $\Gamma/q^{\mathbf{Z}}$.

Par ailleurs, en affectant ces translatés de racines ℓ-ièmes de l'unité convenables, on obtient plus généralement des fonctions méromorphes cf. th. 4.1 de diviseur $(z_0)-(0)$ relativement à Σ, pour les points z_0 de torsion dans $\bar{K}^*/\Sigma$, d'ordre divisant ℓp et tels que $z_0^{\ell}=\varphi$; comme F_1 ces fonctions possèdent $q^{\mathbf{Z}}$ comme réseau de périodes. Une écriture explicite pour z_0 est donnée, modulo $q^{\mathbf{Z}}$; le cas de F_2 correspond à $z_0=\varphi^{[1/\ell]_p}$, cf. formule (3.3).

Enfin, une partie non moins importante de ce travail consiste à évaluer les valuations q-adiques de ces diverses fonctions, cf. prop. 2.10 et th. 3.13. L'appendice applique ces calculs à certains produits de ces fonctions, dont l'intérêt arithmétique est montré par [BA-B-CN] et [BA-RO]: du point de vue de ces auteurs, il s'agit de produits de *résolvantes elliptiques auxquelles sont attachés des éléments de Stickelberger quadratiques* qui permettent, sous certaines conditions arithmétiques, de factoriser le discriminant d'une courbe elliptique semi-stable, supposée définie sur un corps de nombres.

1. PRÉLIMINAIRES

Nos références pour ce paragraphe sont [BA, Chap. III] et [ROQ, Section 2]. Pour une série de Laurent $\sum_{n\geqslant n_0} a_n X^n$, avec $a_n \in K$, qui converge pour tout z de $\bar{K}^*$, nous associons la fonction

$$(z \mapsto f(z)) \text{ de } \bar{K}^* \qquad \text{dans } \bar{K}.$$

Donc, toute fonction associée à une série de Laurent du type précédent est dite holomorphe sur $\bar{K}^*$. On confond souvent dans les notations la fonction et la série qui la définit.

L'ensemble des fonctions holomorphes sur $\bar{K}^*$, est un anneau intègre pour les opérations naturelles. Notons M_K son corps de fonctions.

D'après le théorème de préparation de Weierstrass, adapté au cas rigide, tout élément f de M_K s'écrit comme un quotient g/h de deux fonctions holomorphes g et h sur $\bar{K}^*$, sans zéros communs. Ce sont ces éléments de M_K que nous nommons fonctions méromorphes sur $\bar{K}^*$.

DÉFINITION 1.1. Une fonction méromorphe sur $\bar{K}^*$ est dite q-périodique lorsqu'elle satisfait:

$$f(q^{-1}z) = f(z)$$

pour tout élément z de $\bar{K}^*$ où f est définie.

Pour une telle fonction f écrite sous forme réduite g/h, avec g et h holomorphes comme ci-dessus, et tout $\alpha \in \bar{K}^*$, on note $m_{\alpha, f}$ l'entier relatif défini par

$$m_{\alpha, f} = \begin{cases} \text{la multiplicité de } g \text{ en } \alpha, \text{ si } \alpha \text{ zéro de } g; \\ -\text{la multiplicité de } h \text{ en } \alpha, \text{ si } \alpha \text{ zéro de } h; \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Si de plus la fonction méromorphe f est q-périodique, on définit son *diviseur* comme la somme formelle

$$\sum_{\alpha \in \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_{\alpha, f}(\alpha).$$

En fait, soient m_α, $\alpha \in \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, *une famille d'entiers relatifs, tous nuls excepté un nombre fini d'entre eux. Les deux propriétés suivantes sont alors équivalentes*:

$$\sum_{\alpha \in \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha = 0, \qquad \prod_{\alpha \in \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} \alpha^{m_\alpha} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ q^{\mathbf{Z}}); \tag{1.2}$$

et

$$\begin{cases} \text{il existe une fonction méroporphe } q \simeq \text{périodique } f, \\ \text{unique à constante multiplicative près,} \\ \text{de diviseur } \sum_{\alpha \in \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_\alpha(\alpha). \end{cases} \tag{1.3}$$

Il s'agit là tout simplement du théorème d'Abel-Jacobi et de sa réciproque sur une courbe de Tate $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

DÉFINITION 1.4. Soit f une fonction méromorphe q-périodique sur $\bar{K}^*$, non nulle, on appelle valence de f et on note $\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f)$ l'entier

$$\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f)=\sum_{\alpha\in\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}} m_{\alpha,f}, \text{ où } \alpha \text{ parcourt les zéros de } f \text{ dans } \bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}.$$

Il est clair que, pour une fonction f méromorphe sur $\bar{K}^*$ et dont le groupe des périodiques contient $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$, où β est un point d'ordre ℓ, la valence de f relativement à $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$ est donnée par la relation

$$\mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}}(f)=\ell\ \mathrm{val}_{q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}}(f).$$

On déduit de (1.2) et (1.3) que, comme dans le cas des fonctions d'une variable complexe doublement périodiques, toute fonction q-périodique non constante est de valence supérieure ou égale à 2.

DÉFINITION 1.5. Pour tout entier n nous notons $E[n]$ le groupe des points de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ tels que : $x^n\equiv 1(\mathrm{mod}\ q^{\mathbf{Z}})$.

PROPOSITION 1.6. *Soit n un entier, $n\geqslant 1$. Alors, lorsque n n'est pas divisible par car(K), la caractéristique de K, on a*

$$E[n]\simeq \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}.$$

Si $q^{1/n}$ (resp. ξ_n) désigne une racine primitive $n^{\text{ième}}$ de q (resp. 1), l'ensemble $\{q^{a/n}\xi_n^b, 0\leqslant a\leqslant n-1, 0\leqslant b\leqslant n-1\}$ est un système de représentants dans $\bar{K}^*$ des éléments de $E[n]$.

La démonstration est immédiate.

Mais, que n soit ou non divisible par *car*(K), pour x et y éléments de $E[n]$ tels que

$$x^n=q^a,\qquad y^n=q^c$$

avec a et c entiers, on définit l'accouplement de Weil

$$e_n(x,y)=x^{-c}y^a. \tag{1.7}$$

Il est à noter que l'accouplement e_n définit une forme *bilinéaire alternée* de $E[n]\times E[n]$ dans le groupe $\boldsymbol{\mu}_n$ des racines n-ièmes de K^*: celle-ci est *non dégénérée* si et seulement si n n'est pas divisible par *car*(K).

Maintenant, on définit la fonction θ fondamentale par l'égalité:

$$\theta_q(z)=(1-z)\prod_{n\geqslant 1}(1-q^nz)(1-q^nz^{-1}). \tag{1.8}$$

On vérifie que θ_q ou plus simplement θ est une fonction holomorphe sur $\bar{K}^*$ dont les zéros d'ordre 1 sont les éléments de $q^{\mathbf{Z}}$.

PROPOSITION 1.9. *On a l'égalité*:

$$\theta_q(z^{-1}) = \theta_q(qz) = -\frac{1}{z}\,\theta_q(z)$$

de sorte que, pour tout élément m de $\mathbf{Z}$, *on a*

$$\theta_q(q^m z) = (-1)^m\, q^{(-m(m-1))/2} z^{-m} \theta_q(z).$$

Démonstration. D'après la définition (1.8) de la fonction $\theta_q(z)$, on a

$$\theta_q(z^{-1})/\theta(z) = (1 - z^{-1})/(1 - z) = \theta_q(qz)/\theta(z)$$

d'où l'on déduit la première formule; la seconde en résulte par récurrence.

PROPOSITION 1.10. *Si* $\psi \in \bar{K}^*$ *vérifie* $\psi^p = q$, *on a l'égalité*

$$\theta_\psi(z) = \prod_{i=0}^{p-1} \theta_q(z\psi^i).$$

Démonstration. Réordonner le produit infini.

2. FONCTIONS DE SIEGEL RIGIDES

Pour n entier naturel non nul, on définit une fonction de Siegel fondamentale associée au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de K^* par

$$G^{(n)}(a; q) = q^{12n^2 B_2(a_1)} \theta_q(a)^{24n^2} \tag{2.1}$$

pour tout a dans $E[n]$, où $a_1 = v_q(a)$ et $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$. Pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}$ de K^*, on définit la fonction discriminant fondamentale par le produit infini convergent

$$\Delta(q) = q \prod_{n \geqslant 1} (1 - q^n)^{24}. \tag{2.2}$$

Le polynôme de Bernoulli $B_2(X) = X^2 - X + \frac{1}{6}$ vérifie:

LEMME 2.3. *On a*

(i) $B_2(X+1) - B_2(X) = 2X = B_2(-X) - B_2(X)$;

(ii) *pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout réel x*

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_2\left(x+\frac{k}{N}\right)=\frac{1}{N}B_2(Nx);$$

(iii) *pour tout entier $N \geqslant 1$ et tout réel x*

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_2\left(\left\{x+\frac{k}{N}\right\}\right)=\frac{1}{N}B_2(\{Nx\}),$$

où comme de coutume $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire du réel y.

Démonstration. Le point (i) est trivial; de plus (ii) $\Rightarrow$ (iii); quant à (ii) c'est la propriété bien connue de distribution des polynômes $B_k(X)$ de Bernoulli; cf., e.g. [L, Chap. XIII, p. 230, B6], pour $k=2$.

En particulier la fonction de Siegel $G^{(n)}(\cdot\,; q)$ satisfait les propriétés suivantes:

Proposition 2.4. *Soit n un entier $\geqslant 1$. Pour $\rho \in Q^{\mathbf{Z}}$ et $a \in E[n]$, on a*

$$G^{(n)}(a^{-1}; q)=G^{(n)}(a; q)=G^{(n)}(a\rho; q).$$

En outre, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a: $G^{(nm)}(a; q)=G^{(n)}(a, q)^{m^2}$.

Démonstration. D'après la proposition 1.9, et le lemme 2.3(i), on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(aq; q)=G^{(n)}(a^{-1}; q) &= q^{12n^2B_2(-a_1)}\theta_q(a^{-1})^{24n^2}\\ &= q^{12nB_2(a_1+1)}\theta_q(aq)^{24n^2}\\ &= q^{24n^2a_1}a^{-24n^2}q^{12n^2B_2(a_1)}\theta_q(a)^{24n^2}\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} G^{(n)}(aq; q)=G^{(n)}(a^{-1}; q) &= q^{24n^2a_1}a^{-24n^2}G^{(n)}(a; q)\\ &= G^{(n)}(a; q).\end{aligned}$$

La deuxième propriété est une conséquence immédiate de la définition de $G^{(nm)}(\cdot\,; q)$ et $G^{(n)}(\cdot\,; q)$.

Maintenant, nous sommes en mesure de définir les fonctions de Siegel et discriminant rigides pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de $\bar{K}^*$, où ψ est un point de torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ d'ordre $p \geqslant 1$, et en donner quelques propriétés fondamentales.

Définition 2.5. Pour le sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de $\bar{K}^*$ et pour tout entier $N=np$, $n\in\mathbf{N}^*$, on associe la fonction de Siegel définie par

$$G^{(n)}(a;q,\psi)=\prod_{i=0}^{p-1} G^{(N)}(a\psi^i,q)$$

pour tout $a\in E[np]$.

Remarques 2.6. On peut vérifier aisément que

(1) En général, on a: $G^{(n)}(a;q,\psi^{-1})=G^{(n)}(a^{-1};q\cdot\psi)$.

(2) Pour $p=1$, on a: $G^{(n)}(a;q,1)=G^{(n)}(a;q)$.

(3) Pour $p\geqslant 2$, et lorsque $\psi^p=q$ de sorte que ψ engendre $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ alors, vu le lemme 2.3(ii) ci-dessus et la proposition 1.10, pour tout point a dans $E[np]$ on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a;q,\psi) &= q^{12(np)^2\sum_{i=0}^{p-1} B_2(a_1+(i/p))}\prod_{i=0}^{p-1}\theta_q(aq^{1/p})^{24(np)^2}\\ &= (\psi^p)^{24(np)^1\,(1/p)\,B_2(pa_1)}\theta_\psi(a)^{24(np)^2}\end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$G^{(n)}(a;q,\psi)=G^{(np)}(a;q^{1/p}),\qquad \text{avec}\quad q^{1/p}=\psi.$$

On définit la fonction puissante $2p^2$ du discriminant rigide associée à $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ par

$$\Delta^{(p)}(q,\psi)=\Delta(q)^{2p^2}\prod_{i=1}^{p-1} G^{(p)}(\psi^i;q) \tag{2.7}$$

où p est l'ordre de ψ dans $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$.

Remarque 2.8. Cette définition est un analogue rigide du théorème 2.4 dans [K], concernant la fonction eta de Dedekind.

Dans la suite de ce travail ce sont les fonctions $\Delta^{(p)}(q,\psi)$ et $G^{(n)}(\cdot\,;q,\psi)$, n entier $\geqslant 1$ qui nous intéressent.

L'étude de leur racine $12p$-ième (resp. $12np$-ième) pourrait être faite; mais je n'ai pas réussi à définir sans ambiguïté leur racine $24p^2$-ième (resp. $24(np)^2$-ième). La définition la plus naturelle fait apparaître une ambiguïté tenant à une racine de l'unité élément de $\boldsymbol{\mu}_{2p}$ (resp. $\boldsymbol{\mu}_{2np}$).

Les fonctions de Siegel, ainsi définies, associées au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de $\bar{K}^*$ satisfont les propriétés suivantes:

PROPOSITION 2.9. *Pour tout $\rho \in q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$, pour tout entier naturel $N \geqslant 1$ divisible par p et posant $n = N/p$ on a*

$$G^{(n)}(a\rho; q, \psi) = G^{(n)}(a; q, \psi) \qquad \text{pour tout} \quad a \in E[N].$$

En outre, pour tout entier $m \geqslant 1$, on a:

$$G^{(nm)}(a; q, \psi) = G^{(n)}(a; q, \psi)^{m^2} \qquad \text{pour tout} \quad a \in E[N].$$

Démonstration. Pour $\rho \in q^{\mathbf{Z}}$, on sait grâce à la proposition 2.4 que l'on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\rho; q, \psi) &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\rho\psi^i; q) \\ &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i; q) \\ &= G^{(n)}(a; q, \psi) \end{aligned}$$

et pour $\rho = \psi$, on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\psi; q, \psi) &= \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^{i+1}; q) \\ &= G^{(np)}(a\psi^p; q) \prod_{i=1}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i; q) \end{aligned}$$

comme $\psi^p \in q^{\mathbf{Z}}$, alors on a

$$\begin{aligned} G^{(n)}(a\psi; q, \psi) &= G^{(np)}(a; q) \prod_{i=1}^{p-1} G^{(np)}(a\psi^i; q) \\ &= G^{(n)}(a; q, \psi); \end{aligned}$$

et la dernière propriété est immédiate, d'après la définition 2.5 et la proposition 2.4. ∎

Nous nous intéressons, maintenant, aux valuations q-adiques de ces fonctions. Il vient alors

PROPOSITION 2.10. *Posons $N = np$, n entier $\geqslant 1$.*

(1) *Pour tout $z \in E[N]$ point de torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, on a*

$$\frac{1}{12N^2} v_q(G^{(n)}(z; q, \psi)) = \frac{1}{p} d^2_{\langle\psi\rangle} B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} \cdot z_1\right\}\right).$$

(2) *On a aussi*

$$\frac{1}{2p^2}\, v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = \frac{1}{p}\, d^2_{\langle\psi\rangle}$$

avec $\psi_1 = v_q(\psi)$, $z_1 = v_q(z)$, $p =$ *l'ordre de* ψ *et l'entier positif*

$$d_{\langle\psi\rangle} = \text{p.g.c.d.}(p\psi_1, p).$$

Démonstration. En effet, grâce à la définition de la fonction $G^{(n)}(\,\cdot\,; q, \psi)$ on a

$$G^{(n)}(z; q, \psi) = \prod_{i=0}^{p-1} G^{(np)}(z\psi^i, q)$$

et donc

$$G^{(n)}(z; q, \psi) = \left[\prod_{i=0}^{p-1} q^{(1/2)\, B_2(z_1 + i\psi_1)}\theta_q(z\psi^i)\right]^{24(np)^2}$$

d'où

$$\frac{1}{24N^2}\, v_q(G^{(n)}(z; q, \psi)) = \sum_{i=0}^{p-i} v_q(q^{(1/2)\, B_2(z_1 + i\psi_1)}\theta_q(z\psi^i)).$$

Or, on a $|\theta_q(z)| = 1$ si $|z| < |q| < 1$; et plus généralement les valuations q-adiques ci-dessus ont été calculées dans [K-L, Chap. 2, Sect. 1, p. 31]; on obtient

$$\frac{1}{12N^2}\, v_q(G^{(n)}(z; q, \psi)) = \sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\}).$$

Pour conclure, soit k entier compris entre 0 et $p-1$ tel que: $i \cdot p\psi_1 \equiv k \bmod p$, donc: $\{z_1 + (k/p)\} = \{z_1 + i\psi_1\}$, comme $d_{\langle\psi\rangle} = \text{p.g.c.d.}(p\psi_1, p)$, alors k prend $d_{\langle k\rangle}$ fois toutes les valeurs comprises entre 0 et $(p/d_{\langle\psi\rangle}) - 1$ quand i parcourt $\{0; 1, \ldots; p-1\}$; on peut écrire alors

$$\sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\}) = d_{\langle\psi\rangle} \sum_{k=0}^{(p/d_{\langle\psi\rangle})-1} B_2\left(\left\{z_1 + \frac{k}{p}\right\}\right)$$

qui est encore égale, grâce au lemme 2.3(iii), à

$$\sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{z_1 + i\psi_1\}) = d_{\langle\psi\rangle}\, \frac{d_{\langle\psi\rangle}}{p}\, B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}\, z_1\right\}\right) = \frac{1}{p}\, d^2_{\langle\psi\rangle}\, B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}\, z_1\right\}\right)$$

on obtient (1).

La démonstration du point (2) se déduit facilement de la définition de $\Delta(q)$ et de celle de $G^{(n)}(\psi^i; q)$ respectivement en (2.2) et (2.1). Faisons-le,

$$\frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = 1 + \frac{1}{2p^2} \sum_{i=1}^{p-1} v_q(G^{(p)}(\psi^i; q))$$
$$= 1 + 6 \sum_{i=1}^{p-1} B_2(\{i\psi_1\})$$

ou encore

$$\frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = 6 \sum_{i=0}^{p-1} B_2(\{i\psi\}), \qquad \text{comme dans (1)}$$
$$= 6d_{\langle\psi\rangle} \sum_{i=0}^{(p/d_{\langle\psi\rangle})-1} B_2(\{i\psi\})$$

et grâce au Lemme 2.3(iii), on obtient

$$\frac{1}{2p^2} v_q(\Delta^{(p)}(q, \psi)) = \frac{6}{p} d^2_{\langle\psi\rangle} B_2(0) = \frac{1}{p} d^2_{\langle\psi\rangle}. \quad \blacksquare$$

Remarque 2.11. L'entier $d_{\langle\psi\rangle}$ ne dépend que du sous-groupe cyclique $\langle\psi\rangle$ et non pas du choix du générateur ψ de $\langle\psi\rangle$ dans $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, ni du représent de celui-ci dans $\bar{K}^*$.

3. LES FONCTIONS $D_{q^{\mathbf{Z}}}$ DE POIDS p (RESP. $p\ell$)

Les notations de ce paragraphe sont celles de l'introduction et des paragraphes précédents. Pour p entier $\geqslant 1$, on note $\langle\psi\rangle \subset E[p]$ un sous-groupe cyclique d'ordre p du groupe $E[p]$ des points de p-torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, de générateur fixé ψ. On désigne par φ un autre point de p-torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, vérifiant $\varphi \notin \langle\psi\rangle$. On note encore ψ et φ des représentants dans $\bar{K}^*$ de ces points.

D'après (1.2), (1.3), et [Roq] la théorie des fonctions q-périodiques prouve alors l'existence d'une fonction non triviale $D_{q^{\mathbf{Z}}}(z; \varphi, \langle\psi\rangle)$, $z \in \bar{K}$, méromorphe sur $\bar{K}$ et admettant $q^{\mathbf{Z}}$ pour groupe des périodes et de diviseur

$$\sum_{\rho \in \langle\psi\rangle} (\varphi\rho) - (\rho); \tag{3.1}$$

on normalise $D_q z$ en exigeant que

$$\lim_{z \to 1} (z-1)\, D_q z(z; \varphi, \langle \psi \rangle) = 1 \tag{3.2}$$

ou bien sûr $z \to 1$ au sens de la topologie rigide de $\bar{K}$.

Pour ℓ entier $\geqslant 1$ tel que $(\ell, p) = 1$, on note $\langle \alpha \rangle \subset E[\ell]$ un sous-groupe cyclique d'ordre ℓ du groupe $E[\ell]$, de générateur α. On désigne par γ un autre point de ℓ-torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{z}}$. On note encore α et γ des représentants dans $\bar{K}^*$ de ces points.

Définissons les entiers s et v par $\varphi^p = q^s$ et $\gamma^\ell = q^v$; soit $N_0 = \ell[1/\ell]_p\, s - p[1/p]_\ell\, v$, où $[1/\ell]_p$ (resp. $[1/p]_\ell$) est un élément de $\mathbf{Z}$ tel que $\ell[1/\ell]_p \equiv 1 \bmod p$ (*resp.* $p[1/p]_\ell \equiv 1 \bmod \ell$). Posons

$$z_0 = \varphi^{[1/\ell]_p} \gamma^{-[1/p]_\ell}; \tag{3.3}$$

on a donc $z_0^\ell \equiv \varphi \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ et $z_0^p \equiv \gamma^{-1} \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ et $z_0^{\ell p} = q^{N_0}$. Or comme $\varphi \notin \langle \psi \rangle$, on a $z_0^\ell \notin \langle \psi \rangle$ et donc

$$z_0 \notin \langle \psi \rangle\, E[\ell] \tag{3.4}$$

et a fortiori $z_0 \notin \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$: de ce fait, si l'on définit φ et γ à partir de la donnée de $z_0 \in E[\ell p]$ par les formules

$$z_0^\ell = \varphi, \qquad z_0^p = \gamma^{-1},$$

ceci rend possible la construction ci-après de $D_q z(\,\cdot\,; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle)$ avec la seule contrainte $\varphi \notin \langle \psi \rangle$, le choix de γ dans $E[\ell]$ étant libre. En particulier, le choix de $\gamma \equiv 1 \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ de l'introduction est acceptable.

Revenons au cas général: comme le groupe $\langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$ est cyclique, et comme $z_0 \notin \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$, la construction faite au début du paragraphe (après remplacement de φ par z_0 et de p par ℓp) prouve aussi l'existence d'une fonction non triviale

$$D_q z(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle), \qquad z \in \bar{K},$$

méromorphe sur $\bar{K}$ et admettant $q^{\mathbf{Z}}$ pour groupe des périodes; son diviseur est

$$\sum_{\rho \in \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle} (z_0 \rho) - (\rho) \tag{3.5}$$

relativement à $q^{\mathbf{Z}}$; la condition de normalisation (3.2) devient alors

$$\lim_{z \to 1} (z-1)\, D_q z(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle) = 1. \tag{3.6}$$

Par ailleurs, introduisons les deux fonctions $f_s(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $f_{N_0}(\,\cdot\,;z_0\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ définies par

$$f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=z^s\prod_{i=0}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\varphi^i)},$$

et (3.7)

$$f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=z^{N_0}\prod_{i=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{\theta_q(z\psi^i\alpha^j)}{\theta_q(zz_0^{-1}\psi^i\alpha^j)}.$$

Ces deux fonctions ont les propriétés intéressantes suivantes:

Proposition 3.8. *Les fonctions $f_s(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $f_{N_0}(\,\cdot\,;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ sont q-périodiques. En outre, le diviseur de $f_s(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$, (resp. $f_N(\,\cdot\,;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) est*

$$\sum_{\rho\in\langle\psi\rangle}(\rho)-(\varphi\rho)\qquad\left(\text{resp. }\sum_{\rho\in\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle}(\rho)-(z_0\rho)\right).$$

Démonstration. On s'appuie sur la proposition 1.9; d'une part, comme $\varphi^p=q^s$ (resp. $z_0^{\ell p}=q^{N_0}$) le résultat concernant la q-périodicité de f_s (resp. f_{N_0}) est évident.

D'autre part, concernant le diviseur de $f_s(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$ on a l'égalité

$$\theta(z\varphi^{-p})=\theta(zq^{-s})=(-1)^s\,q^{-s(s+1)/2}z^s\theta(z)$$

de sorte que

$$f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=(-1)^s\,q^{s(s+1)/2}\frac{\theta_q(z\varphi^{-p})}{\theta_q(z\varphi^{-1})}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}$$

donc les fonctions q-périodiques $z\mapsto f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et

$$z\mapsto\frac{\theta_q(z\varphi^{-p})}{\theta_q(z\varphi^{-1})}\prod_{i=1}^{p-1}\frac{\theta_q(z\psi^i)}{\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}$$

sont proportionnelles, leur diviseur commun est donc $\sum_{\rho\in\langle\psi\rangle}(\rho)-(\varphi\rho)$. On raisonne de même pour $z\mapsto f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$.

Comme la fonction $z\mapsto D_q\mathrm{z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$ (resp. $z\mapsto D_q\mathbf{Z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) est normalisée, de diviseur opposé à celui de f_s (resp. f_{N_0}) on obtient en conclusion:

PROPOSITION 3.9. *La fonction $D_q\mathrm{z}(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$ (resp. $D_q\mathrm{z}(\,\cdot\,;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$) s'exprime comme suit*

$$D_q\mathrm{z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)^{-1}=\frac{f_s(z;\varphi,\langle\psi\rangle)}{f'_s(1;\varphi,\langle\psi\rangle)}$$

et en particulier

$$D_q\mathrm{z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)=-z^{-s}\prod_{n\geqslant 1}(1-q^n)^2\prod_{i=0}^{p-1}\frac{\theta_q(\psi^i)\,\theta_q(z\varphi^{-1}\psi^i)}{\theta_q(\varphi^{-1}\psi^i)\,\theta_q(z\psi^i)}$$

où par convention dans le produit, on compte pour 1 *le terme* $\theta_q(\psi^0)$. *De même*

$$D_q\mathrm{z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)^{-1}=\frac{f_{N_0}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)}{f'_{N_0}(1;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)}$$

et en particulier

$$D_q\mathrm{z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=-z^{-N_0}\prod_{n=1}(1-q^n)^2\prod_{i=0}^{p-1}\prod_{j=0}^{\ell-1}\frac{\theta_q(\psi^i\alpha^j)\,\theta_q(zz_0^{-1}\psi^i\alpha^i)}{\theta_q(z_0^{-1}\psi^i\alpha^j)\,\theta_q(z\psi^i\alpha^j)}$$

où par convention dans le produit double on compte pour 1 *le terme* $\theta_q(\psi^0\alpha^0)$.

En outre, ces fonctions $D_q\mathrm{z}$ possèdent la propriété suivante:

PROPOSITION 3.10. *Pour $\rho\in q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ (resp. $\rho\in q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$) on a*

$$D_q\mathrm{z}(z\rho;\varphi,\langle\psi\rangle)=e_p(\rho,\varphi)\,D_q\mathrm{z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle).$$

(*resp.* $D_q\mathrm{z}(z\rho;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=e_{\ell p}(\rho,z_0)\,D_q\mathrm{z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$).

Démonstration. Les deux fonctions $D_q\mathrm{z}(\,\cdot\,;\varphi,\langle\psi\rangle)$ et $D_q\mathrm{z}(\cdot;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ sont q-périodiques et en plus, appliquant la proposition 1.9 aux produits de la proposition 3.9, on trouve

$$D_q\mathrm{z}(z\psi;\varphi,\langle\psi\rangle)=\psi^{-s}\varphi^tD_q\mathrm{z}(z;\varphi,\langle\psi\rangle)$$

et

$$D_q\mathrm{z}(z\psi;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=\psi^{-N_0}z_0^{t\ell}\,D_q\mathrm{z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$
$$D_q\mathrm{z}(z\alpha;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)=\alpha^{-N_0}z_0^{mp}\,D_q\mathrm{z}(z;z_0,\langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

où $\psi^p=q^t$, $\varphi^p=q^s$, $\alpha^\ell=q^m$ et $\gamma^\ell=q^v$. Or on a $\psi^{-s}\varphi^t=e_p(\psi,\varphi)$ ainsi que $\psi^{-N_0}z_0^{t\ell}=e_{\ell p}(\psi,z_0)$ et $\alpha^{-N_0}z_0^{mp}=e_{\ell p}(\alpha,z_0)$ par définition. La proposition en résulte.

Remarque 3.11. On a

$$e_{\ell p}(\psi, z_0) = e_p(\psi, \varphi) \qquad \text{et} \qquad e_{\ell p}(\alpha, z_0) = e_\ell(\alpha, \gamma^{-1}).$$

Démonstration. Ces égalités résultent des formules de comparaison, à savoir

$$e_{\ell p}(\psi, z_0) = e_p(\psi, z_0^\ell) \qquad \text{et} \qquad e_{\ell p}(\alpha, z_0) = e_\ell(\alpha, z_0^p)$$

et des congruences déjà prouvées $z_0^\ell \equiv \varphi \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$ et $z_0^p \equiv \gamma^{-1} \pmod{q^{\mathbf{Z}}}$.

THÉORÈME 3.12. *Pour tout entier $N \geqslant 1$ divisible par p, avec $n = N/p$, on a*

$$D_q\mathrm{z}(z; \varphi, \langle\psi\rangle)^{24N^2} = \frac{G^{(n)}(z\varphi^{-1}; q, \psi)\, \Delta^{(p)}(q, \psi)^{n^2}}{G^{(n)}(z; q, \psi)\, G^{(n)}(\varphi^{-1}; q, \psi)}$$

et tout $z \in E[N]$ tel que, ni z ni $z\varphi^{-1}$, n'appartiennent à $\langle\psi\rangle$.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la proposition 3.9 et des définitions des fonctions de Siegel et du discriminant rigides par rapport au sous-groupe discret $q^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$ de $\bar{K}^*$, cf. section 2.

THÉORÈME 3.13. *Soit z un point de torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ tel que, ni z ni $z\varphi^{-1}$, n'appartiennent à $\langle\psi\rangle$. Alors la valuation q-adique de $D_q\mathrm{z}(z; \varphi, \langle\psi\rangle)$ est égale à*

$$v_q(D_q\mathrm{z}(z; \varphi, \langle\psi\rangle)) = \frac{d^2_{\langle\psi\rangle}}{2p}\left[B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}(z_1 - \varphi_1)\right\}\right) - B_2\left(\left\{\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}} z_1\right\}\right)\right.$$
$$\left. - B_2\left(\left\{-\frac{p}{d_{\langle\psi\rangle}}\varphi_1\right\}\right) + B_2(0)\right]$$

où $z_1 = v_q(z)$, $\varphi_1 = v_q(\varphi)$, $p =$ l'ordre de ψ, $d_{\langle\psi\rangle} =$ p.g.c.d.$(p\psi_1, p)$ *avec $\psi_1 = v_q(\psi)$.*

Ce résultat fondamental résulte d'un calcul immédiat à partir du théorème 3.12 et de la proposition 2.10.

4. RELATION DE DISTRIBUTION SATISFAITE PAR LES FONCTIONS $D_q\mathrm{z}$

Ce paragraphe contient l'énoncé de l'autre résultat principal de ce travail, ainsi que sa démonstration.

THÉORÈME 4.1. *Soit p un entier $\geqslant 1$. On note $\langle\psi\rangle \subset E[p]$ un sous-groupe cyclique d'ordre p de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, et $\varphi \in E[p]$ un point de p-torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ tel que: $\varphi \notin \langle\psi\rangle$. Soit aussi ℓ un entier $\geqslant 1$, premier à p. On note $\langle\alpha\rangle \subset E[\ell]$ un sous-groupe cyclique d'ordre ℓ de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$. Alors, pour tout point $\gamma \in E[\ell]$ de ℓ-torsion de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$, on a*

$$\sum_{u \in \langle\alpha\rangle} D_{q^{\mathbf{Z}}}(zu;\, \varphi, \langle\psi\rangle)\, e_\ell(\gamma, u)^{-1} = D_{q^{\mathbf{Z}}}(z;\, z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$$

où $z_0 = \varphi^{[1/\ell]_p}\gamma^{-[1/p]_\ell}$ et $e_\ell\colon E[\ell] \times E[\ell] \to \boldsymbol{\mu}_\ell$ désigne l'accouplement de Weil (cf. section 1, formule (1.7)).

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin de montrer le lemme suivant:

LEMME 4.2. *Soit f une fonction méromorphe sur $\bar{K}^*$. On suppose que le groupe des périodes de f contient $q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$ où β définit un point d'ordre s de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}$ et qu'en outre f, comme fonction de $\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}}$, est de valence inférieure ou égale à 1. Alors, f est constante.*

La démonstration de ce lemme se fait en deux étapes:

Étape 1. On se ramène au cas où β est racine de l'unité. Puisque β est d'ordre s, il existe alors un entier k tel que

$$\beta^s = q^k. \tag{4.3}$$

Soit d le p.g.c.d. de k et s. On a donc

$$s = ds_1, \qquad k = dk_1, \qquad (s_1, k_1) = 1.$$

On déduit de (4.3) l'existence d'une racine d-ième de l'unité ξ_d telle que:

$$\beta^{s_1} = q^{k_1}\xi_d.$$

Soient a, b éléments de $\mathbf{Z}$ tels que: $1 = ak_1 + bs_1$ on pose $q' = q^b\beta^a$. On vérifie facilement l'égalité de groupes:

$$z^{\mathbf{Z}}\beta^{\mathbf{Z}} = q'^{\mathbf{Z}}\xi_d^{\mathbf{Z}}.$$

Étape 2. Soit maintenant $\beta = \xi_s$, où ξ_s est une racine primitive s-ième de 1. On désigne par σ le $\bar{K}$-automorphisme du corps des fonctions q-périodiques défini par:

$$(g\colon z \mapsto g(z)) \mapsto (g^\sigma\colon z \mapsto g(\xi_s z)).$$

Son ordre est s.

Soit Φ l'application de $\bar{K}^* \mapsto \bar{K}^*$ définie par $\Phi(z) = z^s$. Alors Φ induit par passage au quotient un morphisme d'espace analytique rigide

$$\bar{K}^*/q^{\mathbf{Z}} \mapsto \bar{K}^*/q^{s\mathbf{Z}}.$$

On déduit que Φ induit une injection du corps des fonctions q^s-périodiques dans le corps des fonctions q-périodiques défini par:

$$g \mapsto \tilde{g} = g \circ \Phi$$

l'image de cette injection est l'ensemble des fonctions q-périodiques invariantes par σ.

Nous pouvons maintenant conclure. Soit f une fonction méromorphe, de périodes $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, de valence $\leqslant 1$ (i.e. de valence $\leqslant s$ relativement à $q^{\mathbf{Z}}$). Puisque f est invariante par σ, il existe donc g fonction q^s-périodique telle que:

$$f(z) = \tilde{g}(z) = g(z^s), \qquad \forall z.$$

Si de plus f est de valence $\leqslant 1$ relativement à $q^{\mathbf{Z}}\xi_s^{\mathbf{Z}}$, il est immédiat que g est une fonction q^s-périodique de valence $\leqslant 1$. On en déduit que g, et donc f, sont des constantes.

Démonstration du Théorème 4.1. La proposition 3.10 jointe à la remarque 3.11 assure les identités

$$\begin{aligned} D_q\mathrm{z}(z\psi; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) &= e_p(\psi, \varphi)\, D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) \\ D_q\mathrm{z}(z\alpha; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) &= e_\ell(\gamma, \alpha)\, D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle) \\ D_q\mathrm{z}(z\psi; \varphi, \langle\psi\rangle) &= e_p(\psi, \varphi)\, D_q\mathrm{z}(z; \varphi\langle\psi\rangle). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Il s'ensuit que la fonction $z \mapsto \sum_{u \in \langle\alpha\rangle} D_q\mathrm{z}(zu; \varphi, \langle\psi\rangle)\, e_\ell(\gamma, u)^{-1}/ D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ est une fonction périodique dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$. D'autre part, les deux fonctions $z \mapsto D_q\mathrm{z}(z;\, z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)$ et $z \mapsto \sum_{u \in \langle\alpha\rangle} D_q\mathrm{z}(zu; \varphi, \langle\psi\rangle)\, e_\ell(\gamma, u)^{-1}$ ont le même diviseur polaire qui est:

$$\sum_{\rho \in \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle} (\rho).$$

Donc, leur quotient est une fonction périodique dont le groupe des périodes contient $q^{\mathbf{Z}}\alpha^{\mathbf{Z}}\psi^{\mathbf{Z}}$, et de valence $\leqslant 1$ par rapport à ce sous-groupe discret de $\bar{K}^*$. Ceci n'est possible que si elle est constante, cf. lemme 4.2. Or les deux membres de l'identité à prouver satisfont la normalisation des fonctions $D_q\mathrm{z}$ donnée par (3.2) et (3.6). On en déduit alors que les deux membres coïncident, et le théorème 4.1 est démontré.

APPENDICE: APPLICATION AU CALCUL DE LA VALUATION DE PRODUITS DE FONCTIONS $D_q\mathrm{z}$ DE POIDS ℓ_p

Nous présentons là un moyen extrêmement rapide par rapport à certains calculs de [BA-B-CN], il nous permet de donner en même temps des formules plus générales que dans *loc. cit.* Les notations sont celles de paragraphes précédents. Pour tous entiers ℓ et p premiers entre eux et $\geqslant 1$ et pour tout entier $N \geqslant 1$ divisible par $p\ell$, nous formons les quantités suivantes:

$$G^{(n)}(z; q; \psi, \alpha) \overset{\text{DFN}}{=} \prod_{u \in \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle} G^{(N)}(zu; q), \qquad z \in E[N], \qquad \text{où} \quad n = \frac{N}{\ell p},$$

$$\Delta^{(p\ell)}(q, \psi, \alpha) \overset{\text{DFN}}{=} \Delta(q)^{2p^2\ell^2} \prod_{\substack{u \in \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle \\ u \neq 1}} G^{(p\ell)}(u; q),$$

et

$$A_p(z; \gamma; \langle \alpha \rangle) \overset{\text{DFN}}{=} \frac{1}{p} \prod_{\langle \psi \rangle \subset E[p]} \prod_{\varphi \in E[p]/\langle \psi \rangle} D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle),$$

où φ parcourt les points non triviaux de $E[p]/\langle \psi \rangle$ tandis que $\langle \psi \rangle$ décrit les sous-groupes cycliques d'ordre p de $E[p]$ et où z_0 est défini à partir de γ et de φ par la formule (3.3). On pose aussi

$$A_p(\gamma, \langle \alpha \rangle) \overset{\text{DFN}}{=} A_p(\gamma; \gamma, \langle \alpha \rangle);$$

cf. [BA-RO, Section 5], où ceci correspond au produit de résolvantes elliptiques de la Définition 3 de *loc. cit.*

Il vient alors, directement des définitions ci-dessus et de la proposition 3.9 (cf. preuve du théorème 3.12), le résultat suivant:

PROPOSITION 5.1. *Pour tout entier $N \geqslant 1$, divisible par $p\ell$, et pour tout $z \in E[N]$, $z \notin \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$, on a*

$$D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle)^{24N^2} = \frac{G^{(n)}(zz_0^{-1}; q, \psi, \alpha)\, \Delta^{(p\ell)}(q; \psi, \alpha)^{n^2}}{G^{(n)}(z; q, \psi, \alpha)\, G^{(n)}(z_0^{-1}; q, \psi, \alpha)},$$

$$\textit{où} \quad n = \frac{N}{p\ell}.$$

Le but de cet appendice est d'expliciter, d'une façon simple, les valuations de $D_q\mathrm{z}(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle)$ et $A_p(z; \gamma, \langle \alpha \rangle)$, lorsque z est un point de torsion convenable. Énonçons les résultats principaux de cet appendice:

THÉORÈME 5.2. *Pour tout* $z \in E[N]$ *et tout* $z_0 \in E[\ell_p]$, $z_0 \notin \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$, *posons* $z_1 = v_q(z)$, $(z_0)_1 = v_q(z_0)$, *ainsi que* $\psi_1 = v_q(\psi)$, $\alpha_1 = v_q(\alpha)$; *supposant alors que ni* z, *ni* zz_0^{-1} *n'appartiennent à* $\langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle$, *on a*

$$\begin{aligned} &v_q(D_q z(z; z_0, \langle \alpha \rangle \langle \psi \rangle) \\ &\quad = \frac{1}{2\ell p} d_{\langle \alpha \rangle}^2 d_{\langle \psi \rangle}^2 \left[B_2\left(\left\{ \frac{\ell p}{d_{\langle \alpha \rangle} d_{\langle \psi \rangle}} (z_1 - (z_0)_1) \right\}\right) \right. \\ &\qquad \left. - B_2\left(\left\{ \frac{\ell p}{d_{\langle \alpha \rangle} d_{\langle \psi \rangle}} z_1 \right\}\right) - B_2\left(\left\{ \frac{-\ell p}{d_{\langle \alpha \rangle} d_{\langle \psi \rangle}} (z_0)_1 \right\}\right) + B_2(0) \right] \end{aligned}$$

avec $d_{\langle \psi \rangle} = \text{p.g.c.d.}(p\psi_1, p)$ *et* $d_{\langle \alpha \rangle} = \text{p.g.c.d.}(\ell \alpha_1, \ell)$.

Remarque 5.3. Comme déjà noté dans la remarque 2.11 les entiers $d_{\langle \alpha \rangle}$ et $d_{\langle \psi \rangle}$ ne dépendent que des sous-groupes cycliques $\langle \alpha \rangle$ et $\langle \psi \rangle$ d'ordre respectif ℓ et p.

THÉORÈME 5.4. *Soit* p *premier, non divisible par* car(K). *Pour tout* $z \in E[N]$ *et tout* $\gamma \in E[\ell]$, *posons* $z_1 = v_q(z)$, $\gamma_1 = v_q(\gamma)$; *supposant alors que ni* z^p, *ni* $z^p\gamma$ *n'appartiennent à* $\langle \alpha \rangle$, *on a*:

$$\begin{aligned} &v_q(A_p(z; \gamma, \langle \alpha \rangle)) \\ &\quad = \frac{p}{2\ell} d_{\langle \alpha \rangle}^2 \left[B_2\left(\left\{ \frac{\ell}{d_{\langle \alpha \rangle}} (pz_1 + \gamma_1) \right\}\right) - B_2\left(\left\{ \frac{\ell}{d_{\langle \alpha \rangle}} \gamma_1 \right\}\right) \right. \\ &\qquad \left. - B_2\left(\left\{ \frac{\ell}{d_{\langle \alpha \rangle}} \left(z_1 + \left[\frac{1}{p} \right]_\ell \gamma_1 \right) \right\}\right) + B_2\left(\left\{ \frac{\ell}{d_{\langle \alpha \rangle}} \left[\frac{1}{p} \right]_\ell \gamma_1 \right\}\right) \right] \\ &\qquad + \frac{p-1}{2\ell} d_{\langle \alpha \rangle}^2 \left[(p+1) B_2(0) - B_2\left(\left\{ \frac{\ell p}{d_{\langle \alpha \rangle}} z_1 \right\}\right) - pB_2\left(\left\{ \frac{\ell}{d_{\langle \alpha \rangle}} z_1 \right\}\right) \right]. \end{aligned}$$

Démonstration des théorèmes 5.2 *et* 5.4. La preuve du théorème 5.2 est similaire à celle du théorème 3.12. En effet, grâce à la proposition 5.1, pour établir le théorème 5.2 il suffit de connaître les valuations des divers termes figurant dans le membre de droite dans l'égalité de la proposition 5.1. En appliquant directement le lemme 2.3(iii), plusieurs fois, aux définitions de $\Delta^{(p\ell)}(q, \psi, \alpha)$ et $G^{(n)}(z; q, \psi, \alpha)$, on obtient:

$$v_q(\Delta^{(p\ell)}(q, \psi, \alpha)) = 2p\ell \cdot d_{\langle \alpha \rangle}^2 d_{\langle \psi \rangle}^2. \tag{5.5}$$

D'autre part, remarquons que $G^{(n)}(z; q, \psi, \alpha) = \prod_{j=0}^{\ell-1} G^{(n\ell)}(z\alpha^j; q, \psi)$ donc d'après la proposition 2.10, on a:

$$\frac{1}{12N^2} v_q(G^{(n)}(z; q, \psi, \alpha)) = \frac{d^2_{\langle\alpha\rangle} d^2_{\langle\psi\rangle}}{p\ell} B_2\left(\left\{\frac{p\ell}{d_{\langle\alpha\rangle} d_{\langle\psi\rangle}} z_1\right\}\right). \tag{5.6}$$

Les égalités (5.5) et (5.6) permettent aisément d'en déduire le théorème 5.2.

Démontrons le théorème 5.4. En effet, d'après la définition de $A_p(z; \gamma, \langle\alpha\rangle)$ on a

$$v_p(A_p(z; \gamma, \langle\alpha\rangle)) = \sum_{\substack{\langle\psi\rangle \subset E[p] \\ \text{cyclique d'ordre}_p}} \sum_{\varphi \in E[p]/\langle\psi\rangle} v_p(D_q z(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)).$$

Il y a un seul sous-groupe cyclique d'ordre p dans $E[p]$ de la forme $\langle\psi\rangle$ avec ψ unité, car dans ce théorème p est supposé *premier*, *non divisible par* $car(K)$, c'est le groupe des racines p-ièmes de 1, et il y en a p possible lorsque ψ n'est pas une unité. Donc

$$\begin{aligned} v_p(A_p(z; \gamma, \langle\alpha\rangle)) = &\sum_{s=1}^{p-1} v_q(D_q z(z, z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)) \\ &+ p \sum_{s=1}^{p-1} v_q(D_q z(z; z_0, \langle\alpha\rangle\langle\psi\rangle)) \end{aligned}$$

où pour déterminer z_0 à l'aide de la formule (3.3) on choisit dans la dernière somme (lorsque ψ n'est pas une unité)

$$\varphi = \xi_p^s, \qquad 1 \leqslant s \leqslant p-1,$$

et dans la première somme (lorsque ψ est une unité)

$$\varphi = q^{s/p}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant p-1.$$

Alors, à partir du théorème 5.2 et du lemme 2.3(iii), on déduit le théorème 5.4.

Une application est la suivante: supposons l'entier ℓ impair, non divisible par $car(K)$. Soit m un entier compris entre 1 et $\ell-1$, premier avec ℓ. Alors, si (α, γ) forme une base de $E[\ell]$ et si $(\ell, pm+1) = 1$, la quantité

$$Z_p^{(m)} = \prod_{\substack{1 \leqslant t \leqslant \ell-1 \\ t \text{ premier à } \ell}} A_p(\gamma^{mt}; \gamma^t, \langle\alpha\rangle) \tag{5.7}$$

est bien définie.

Introduisons quelques notations.

DÉFINITION 5.8. Pour α et γ points de $E[\ell]$, on pose $\alpha_1 = v_q(\alpha)$, $\gamma_1 = v_q(\gamma)$ et $d_{\langle\alpha\rangle} = \text{p.g.c.d.}(\ell\alpha_1, \ell)$, $d_{\langle\gamma\rangle} = \text{p.g.c.d.}(\ell\gamma_1, \ell)$. Alors le dénominateur noté d du produit

$$\frac{1}{d_{\langle\alpha\rangle}} v_q(\gamma^\ell) = \frac{\ell}{d_{\langle\alpha\rangle}} \gamma_1 \in \frac{1}{d_{\langle\alpha\rangle}} \mathbf{Z}$$

s'écrit

$$d = \frac{d_{\langle\alpha\rangle}}{\text{p.g.c.d.}(d_{\langle\alpha\rangle}, d_{\langle\psi\rangle})}.$$

Pour prouver le corollaire 5.10 ci-dessous, on utilise le résultat suivant avec $N = d$.

LEMME 5.9. *On a*

$$\sum_{k \in (\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^\times} B_2\left(\left\{\frac{k}{N}\right\}\right) = \frac{1}{N} B_2(0) \prod_{\substack{\ell_i \text{ premier} \\ \ell_i | N}} (1 - \ell_i).$$

On déduit alors du théorème 5.4, pour $z = \gamma^m$:

COROLLAIRE 5.10. *Soit ℓ entier et p premier, non divisibles par car(K), tels que $(\ell, p) = 1$. On suppose que (α, γ) est une base de $E[\ell]$; les entiers $d_{\langle\alpha\rangle}$ et d sont ceux de la définition 5.8 ci-dessus. Alors la valuation q-adique de $Z_p^{(m)}$ est indépendante de l'entier m premier à ℓ, tel que $(\ell, pm+1) = 1$, et est donnée par la formule suivante*:

$$\frac{(p-1)(p+1)}{12} d_{\langle\alpha\rangle}^2 \left[1 - (-1)^{\text{card } J} \frac{1}{d^2} \prod_{\ell_i \in J} \ell_i\right] \cdot \prod_{i \in I} \left(1 - \frac{1}{\ell_i}\right)$$

où I (resp. J) désigne l'ensemble des diviseurs premiers de ℓ (resp. d).

En particulier, soient ℓ et p premiers, non divisibles par *car*(K), tels que $(\ell, p(p+1)) = 1$ et $\ell \geqslant 3$. Alors, dans la situation régulière où α est une unité de sorte que

$$d_{\langle\gamma\rangle} = 1, \qquad d = d_{\langle\alpha\rangle} = \ell,$$

et compte tenu de la symétrie $B_2(x) = B_2(1-x)$, la formule du corollaire 5.10 donne

$$v_q\left(\prod_{t=1}^{(\ell-1)/2} A_p(\gamma^t, \langle\alpha\rangle)\right) = \frac{(p-1)(p+1)(\ell+1)(\ell-1)}{24}. \qquad (5.11)$$

On retrouve là, pour $\ell \notin \{2, 3\}$, l'exposant du "discriminant régulier" $D_{E/F,\,\mathrm{reg}}$, cf. [BA-RO, Section 5, Th. 8].

REMERCIEMENTS

Ils vont au referee, dont les remarques attentives nous ont permis d'améliorer ce texte en plusieurs points.

BIBLIOGRAPHIE

[BA] A. Bayad, "Résolvantes elliptiques et éléments de Stickelberger," Bordeaux I, Thèse (soutenue le 24 avril 1992).

[BA-B-CN] A. Bayad, W. Bley, et Ph. Cassou-Noguès, Sommes arithmétiques et éléments de Stickelberger, *J. Algebra* **179**, No. 1 (1996), 145–190.

[BA-RO] A. Bayad et G. Robert, Une relation de distribution additive satisfaite par une famille de fonctions elliptiques, *Bull. Soc. Math. France.*

[K] D. Kubert, Product formulae on elliptic curves, *Invent. Math.* **117** (1994), 227–273.

[K-L] D. Kubert et S. Lang, "Modular Units," Grundlehren der Math. Wiss., Vol. 244, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1981.

[L] S. Lang, "Introduction to Modular Forms," Grundlehren der Math. Wiss., Vol. 222, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1976.

[ROQ] P. Roquette, "Analytic Theory of Elliptic Function over Local Fields," Hamburger Mathematische Einzelschriften, Vandenhoeck et Ruprecht, Göttingen, 1970.