C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I, p. 455-460, 1997
Théorie des nombres/*Number Theory*

Note sur une forme de Jacobi méromorphe

Abdelmejid BAYAD et Gilles ROBERT

A. B. : Université d'Evry Val d'Essonne, Département de Mathématiques, boulevard des Coquibus, 91025 Evry Cedex, France.
E-mail : bayad@lami.univ-evry.fr

G. R. : Université de Grenoble I, UFR de Mathématiques BP 74, Institut Fourier, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France.
E-mail : grobert@fourier.ujf-grenoble.fr

Résumé. Soit L un réseau complexe. Nous étudions les propriétés d'une fonction $D_L(z;\varphi)$, périodique de périodes L en la seconde variable, et analytique en la première variable, normalisée par $\lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi)=1$; cette fonction est liée par un facteur exponentiel simple à la forme $F_\tau(u,v)=\theta'(0)\theta(u+v)/(\theta(u)\theta(v))$ analytique en $\tau\in\mathcal{H}$ (= demi-plan supérieur) et $u,v\in\mathbb{C}$, introduite dans [7], § 3, où le couple (u,v) est proportionnel à (z,φ) et θ désigne le produit triple de Jacobi.

Notre résultat principal est que D_L vérifie aussi une relation de distribution additive simple, de nature arithmétique. De façon plus précise, si Λ est un réseau tel que $L\subset\Lambda$ et $[\Lambda:L]=l$, on a :

$$\sum_t D_L(lz;\varphi+t)=D_\Lambda(z;\varphi),$$

où t parcourt un système complet de représentants dans $\mathbb{C}$ de Λ/L. On retrouve des résultats connus, lorsque φ est un point de torsion de $\mathbb{C}/L$.

A Jacobi meromorphic form

Abstract. *Let L be a complex lattice. Our object of study is a function $D_L(z;\varphi)$, periodic with period lattice L in the second variable, and analytic in the first variable with normalization condition $\lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi)=1$; up to an exponential factor, this function is related to the form $F_\tau(u,v)=\theta'(0)\theta(u+v)/(\theta(u)\theta(v))$ (see [7], § 3), analytic in $\tau\in\mathcal{H}$ (=upper half plane) and in $u,v\in\mathbb{C}$, with (u,v) proportional to (z,φ) and θ the Jacobi's triple product.*

Our main result is that D_L also satisfies a simple additive distribution relation. Indeed, if Λ is a lattice such that $L\subset\Lambda$ and $[\Lambda:L]=l$, we have:

$$\sum_t D_L(lz;\varphi+t)=D_\Lambda(z;\varphi),$$

where t runs over a representative system of Λ/L. When φ is a torsion point of $\mathbb{C}/L$, we recover known results.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

Abridged English Version

Let $\mathcal{H}$ be the upper half plane. In [7], § 3, one comes upon a Jacobi form $F_\tau(u,v)$, with $\tau \in \mathcal{H}$ and $u, v \in \mathbb{C}$, related to Jacobi's triple product

$$\theta(u) \stackrel{\text{def}}{=} q^{1/8}(e^{u/2} - e^{-u/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u}),$$

where $q = e^{2\pi i\tau}$, by the formula

$$F_\tau(u,v) = \frac{\theta'(0)\theta(u+v)}{\theta(u)\theta(v)}. \tag{1}$$

Here, we slightly amend this function in the following way: we put

$$D_L(z;\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w_2}{2\pi i} \exp\left(-\frac{u\mathrm{Re}(v)}{2\pi\,\mathrm{Im}(\tau)}\right) F_\tau(u,v), \tag{2}$$

where L is a complex lattice with basis (w_1, w_2), $w_1/w_2 \in \mathcal{H}$, and $u = \frac{2\pi i}{w_2}z$, $v = \frac{2\pi i}{w_2}\varphi$, $\tau = \frac{w_1}{w_2}$.

For $x, y \in \mathbb{C}$, let $e(x) = e^{2\pi i x}$ and $E_L(x;y) = \frac{1}{2i}\dfrac{\bar{x}y - \bar{y}x}{a(L)}$ with $a(L) = |w_2|^2\,\mathrm{Im}(\tau)$, the surface of the fundamental parallelogram of L. The function D_L is no more analytic in v nor in τ, but we have:

a) D_L do not depend of the oriented basis (w_1, w_2) of L;

b) $D_L(z;\varphi+\rho) = D_L(z;\varphi)$ for any $\rho \in L$;

c) $D_L(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho;\varphi))D_L(z;\varphi)$ for any $\rho \in L$;

d) The function D_L satisfies the functional equation $D_L(z;\varphi)e(-E_L(z;\varphi)) = D_L(\varphi;z)$.

These properties can be seen to follow, for d) from the above identity (1), and for a) and b), c) from [7], § 3, th.(vi) and (v), where modular and elliptic properties of F_τ are described.

e) Moreover, we also have the additive distribution formula:

THEOREM 1. – *Let L and Λ be two complex lattices such that $L \subset \Lambda$ and $[\Lambda : L] = l$. Then, we have* $\sum_{t\in\Lambda/L} D_L(l\varphi; z+t) = D_\Lambda(\varphi;z)$.

To prove this theorem we rewrite it, using d) and the equality $E_\Lambda = lE_L$, in the form:

$$\sum_{t\in\Lambda/L} D_L(z+t; l\varphi)e(-E_L(t;l\varphi)) = D_\Lambda(z;\varphi). \tag{3}$$

Formula (3), using the analytic variable, is more convenient to give a proof of e). Observe that:

$$D_L(z;\varphi) = e(E_L(z;\varphi)/2)\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}, \tag{4}$$

where $\mathcal{K}_L$ is the well-known Klein function of [4] (or [2]) satisfying:

$$\mathcal{K}_L(u+\rho) = \chi_L(\rho)e\big(E_L(\rho;u)/2\big)\mathcal{K}_L(u) \tag{5}$$

for each $\rho \in L$ with $\chi_L(\rho) = 1$ (resp. -1) if $\rho \in 2L$ (resp. $\rho \in L - 2L$).

The formulas (4) and (5) give a direct proof of a)-d). To deduce (4) from (2) and conversely, one needs a way to relate $\mathcal{K}_L$ and Jacobi's triple product θ; by [2], § 1, Remark 3, it is given by the formula:

$$\mathcal{K}_L(z) = \frac{w_2}{2\pi i} \quad \exp\left(\frac{u(\overline{u}-u)}{8\pi\,\mathrm{Im}(\tau)}\right) \quad \frac{\theta(u)}{\theta'(0)}, \quad u = \frac{2\pi i}{w_2}z.$$

Proof of Theorem 1. – To conclude the proof, one introduces the resolvent-like sum

$$S_\Lambda(z;\varphi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{t\in\Lambda/L} D_L(z+t;l\varphi)e(-E_L(t;l\varphi)).$$

LEMMA 2. – *For any $\rho\in\Lambda$, one has $S_\Lambda(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho;\varphi))S_\Lambda(z;\varphi)$.*

Then consider the quotient $z\mapsto S_\Lambda(z;\varphi)/D_\Lambda(z;\varphi)$; it is a meromorphic function of z, and the simple zeros of $z\mapsto 1/D_\Lambda(z;\varphi)$, whose set is Λ, are taking care of the poles of $S_\Lambda(z;\varphi)$. Hence the quotient in question has only poles, each of them simple, taken among the set of zeros of $z\mapsto D_\Lambda(z;\varphi)$, that is $\Lambda-\varphi$; now comparing the identity c) and lemma 2, one observes that Λ is among the periods of the quotient. But, modulo Λ, the quotient has at most one simple pole so that it is a constant elliptic function of z (for fixed Λ and $\varphi\in\mathbb{C}-\Lambda$). Taking the limit when $z\to 0$, as $\lim\limits_{z\to 0}\mathcal{K}_L(z)/z = 1$, one finds

$$\lim_{z\to 0} zS_\Lambda(z;\varphi) = 1 = \lim_{z\to 0} zD_L(z;\varphi),$$

and the constant is 1. *Formula* (3) *and hence theorem* 1 *are proved.*

Remark 3. – When φ is a *torsion point* of $\mathbb{C}/L$, then $z\mapsto D_L(z;\varphi)$ is periodic for some sublattice of L. So, by choosing conveniently L and Λ, one recovers the results of [2], § 4 (*see* also [3] and [1]).

Nota. – Our theorem 1 is equivalent to formula (3.19), §3, p. 292, of [6].

---

1. Généralités

Soit $\mathcal{H}$ le demi-plan supérieur. Pour tout réseau complexe L, si (w_1,w_2) désigne une base de L telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2)>0$, on pose $\tau = w_1/w_2\in\mathcal{H}$ et on définit l'aire de L par :

$$a(L) = \frac{1}{2i}\begin{vmatrix} w_1 & \overline{w}_1 \\ w_2 & \overline{w}_2 \end{vmatrix} = \frac{w_1\overline{w}_2 - w_2\overline{w}_1}{2i} = |w_2|^2\,\mathrm{Im}(\tau)\,;$$

c'est un nombre réel >0 indépendant du choix de la base orientée (w_1,w_2) de L. Posons alors $H_L(u;v) = \frac{\bar{u}v}{a(L)}$ et $E_L(u;v) = \frac{1}{2i}\frac{\bar{u}v-\bar{u}v}{a(L)}$, $(u,v)\in\mathbb{C}\times\mathbb{C}$. La forme $\mathbb{R}$-linéaire $E_L = \mathrm{Im}\,H_L$ est alternée ; on a $E_L(w_1;w_2) = -1$ et donc E_L est entière sur $L\times L$. Dans toute la suite, on pose $e(x) = e^{2\pi ix}$, $x\in\mathbb{C}$.

2. Une forme de Jacobi méromorphe

Dans [7], § 3, on rencontre, introduite comme intermédiaire, la forme de Jacobi $F_\tau(u,v)$, où $\tau\in\mathcal{H}$ et u,v appartiennent à $\mathbb{C}$. Dans le théorème de *loc.cit.*, Don Zagier en énonce plusieurs propriétés ; notamment son écriture comme série :

$$F_\tau(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\eta^{-n}}{q^{-n}\xi-1} - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\xi^m}{q^{-m}\eta^{-1}-1},$$

où $q = e^{2\pi i\tau}$, $\xi = e^u$, $\eta = e^v$, pourvu que $\mathrm{Re}(u) < 2\pi\,\mathrm{Im}(\tau)$ et $-\mathrm{Re}(v) < 2\pi\,\mathrm{Im}(\tau)$, et comme quotient de fonctions thêtas :

$$F_\tau(u,v) = \frac{\theta'(0)\theta(u+v)}{\theta(u)\theta(v)}, \tag{2.1}$$

où θ est le produit triple de Jacobi :

$$\theta(u) \overset{\text{déf}}{=} q^{1/8}(e^{u/2} - e^{-u/2}) \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)(1-q^n e^u)(1-q^n e^{-u}).$$

L'écriture (2.1) montre que $F_\tau(u,v)$ s'étend méromorphiquement à toutes les valeurs de u, v. Elle possède (voir *loc.cit.*) un pôle simple en u de résidu η^{-n} au point $2\pi i(n\tau + s)$, où $n, s \in \mathbb{Z}$ et $\eta = e^v$, et un pôle simple en v de résidu ξ^{-m} au point $2\pi i(m\tau + r)$, où $m, r \in \mathbb{Z}$ et $\xi = e^u$, et elle est holomorphe lorsque u et v n'appartiennent pas au réseau $\Lambda = 2\pi i(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z})$.

Introduisons la fonction

$$D_L(z;\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \frac{w_2}{2\pi i} \exp\left(-\frac{u\mathrm{Re}(v)}{2\pi\,\mathrm{Im}(\tau)}\right) F_\tau(u,v), \tag{2.2}$$

où L est un réseau complexe de base (w_1, w_2), telle que $w_1/w_2 \in \mathcal{H}$, et où l'on a posé $u = \frac{2\pi i}{w_2}z$, $v = \frac{2\pi i}{w_2}\varphi$.

On perd l'analyticité vis-à-vis de v et de τ, mais en contrepartie la fonction D_L vérifie :

D_1) a) elle ne dépend pas de la base (w_1, w_2), telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$, du réseau L;

b) elle ne dépend que de φ modulo L;

c) on a $D_L(z+\rho;\varphi) = e(E_L(\rho;\varphi))D_L(z;\varphi)$ lorsque $\rho \in L$;

D_2) on a l'équation fonctionnelle $D_L(z;\varphi)e(-E_L(z;\varphi)) = D_L(\varphi;z)$;

D_3) elle satisfait une relation de distribution additive lorsque l'on change de réseau. Celle-ci est particulièrement simple, exprimée relativement à la seconde variable, non-holomorphe. De façon plus précise, on a :

THÉORÈME 1. – *Soient L et Λ deux réseaux complexes tels que $L \subset \Lambda$ et $[\Lambda : L] = l$, où $[\Lambda : L]$ désigne le nombre d'éléments de Λ/L. Alors, on a :*

$$\sum_{t\in T} D_L\big(l\varphi; z+t\big) = D_\Lambda\big(\varphi; z\big),$$

où T désigne un système complet de représentants dans $\mathbb{C}$ de Λ/L.

Toutefois, nous la reformulons d'abord, à l'aide de D_2), en la première variable : les fonctions D_L et D_Λ dépendant holomorphiquement de celle-ci, la démonstration de la relation de distribution en sera facilitée. Comme $E_\Lambda = lE_L$, on trouve, tous calculs faits :

THÉORÈME 1 bis. – *Plaçons-nous sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 1. Alors, on a :*

$$\sum_{t\in T} D_L\big(z+t; l\varphi\big)e(-E_L(t;l\varphi)) = D_\Lambda(z;\varphi).$$

Remarque 2. – i) Dans le cas où φ est le paramètre d'un point de *torsion* de $\mathbb{C}/L$, les fonctions $z \mapsto D_L(z;\varphi)$ sont périodiques pour un sous-réseau de L, et vérifient une relation de distribution additive (*voir* [2], § 4); cette relation est due à Frobenius (*voir* [3], p. 91). Son analogue rigide est démontrée dans [1].

ii) Les propriétés D_1-a) et b), c) ci-dessus peuvent être déduites respectivement des points (vi) (propriété modulaire) et (v) (propriété elliptique) du théorème déjà cité de [7], § 3. Quant à D_2), elle résulte de l'équation $F_\tau(u,v) = F_\tau(v,u)$ vérifiée par F_τ (voir (2.1)).

3. Démonstration de la relation de distribution additive

Comme dans [2], introduisons la fonction de Klein $\mathcal{K}_L(z)$, $z \in \mathbb{C}$, définie par le produit infini

$$\mathcal{K}_L(z) \stackrel{\text{déf}}{=} z e^{-\frac{1}{2}zz^*} \prod_{\ell \in L, \ell \neq 0} \Big(1 - \frac{z}{\ell}\Big) e^{\frac{z}{\ell} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\ell}\right)^2},$$

où, écrivant $z = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, on note $z^* = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$ pour η_1 et η_2 les périodes de « deuxième espèce » associées aux périodes de « première espèce » ω_1 et ω_2 (*voir* [5]). La fonction $z \mapsto \mathcal{K}_L(z)$, ne dépend pas du choix de la base (w_1, w_2) de L, telle que $\mathrm{Im}(w_1/w_2) > 0$.

i) La fonction $\mathcal{K}_L$ vérifie le résultat suivant :

Proposition 3. – *Pour tout $\rho \in L$, on a :*

$$\mathcal{K}_L(u+\rho) = \chi_L(\rho) e\big(E_L(\rho; u)/2\big)\mathcal{K}_L(u),$$

où l'on a posé $\chi_L(\rho) = \begin{cases} 1 & si\ \rho \in 2L, \\ -1 & si\ \rho \in L - 2L. \end{cases}$

ii) La fonction

$$\theta_L : u \underset{\text{déf}}{\longmapsto} e\Big(\frac{1}{4i} H_L(u\,;\,u)\Big)\mathcal{K}_L(u) \tag{3.1}$$

est holomorphe en z ; d'après [2], § 1, remarque 3, on a :

$$\theta_L(z) = \frac{w_2}{2\pi i} \quad \exp\Big(-\frac{u^2}{8\pi\,\mathrm{Im}(\tau)}\Big) \ \frac{\theta(u)}{\theta'(0)} \quad \text{avec } u = \frac{2\pi i}{w_2} z. \tag{3.2}$$

Les identités (3.1) et (3.2) ci-dessus permettent d'écrire $\mathcal{K}_L$ à l'aide de θ et vice-versa.

iii) En outre, de la formule (2.1) satisfaite par $F_\tau(u,v)$, on déduit alors l'équivalence de la définition (2.2) de $D_L(z;\varphi)$ avec l'identité suivante :

$$D_L(z;\varphi) = e(E_L(z;\varphi)/2)\frac{\mathcal{K}_L(z+\varphi)}{\mathcal{K}_L(z)\mathcal{K}_L(\varphi)}. \tag{3.3}$$

Cette écriture (3.3) rend manifeste l'équation D_2), § 2, vérifiée par D_L ; de plus, l'indépendance de (3.3) pour le choix de la base orientée (w_1, w_2) de L (resp. l'usage de la proposition 3) redonne les propriétés D_1-a) et b), c), § 2, de D_L. Par suite, d'après D_1-b) (ou bien D_2) et D_1-c)), § 2, la fonction de t

$$t \mapsto D_L\big(z+t;\varphi\big)e(-E_L(t;\varphi)), \quad t+z \notin L, \tag{3.4}$$

ne dépend que de la classe de t modulo L.

Revenons aux notations du théorème 1, et sommons (3.4) sur un système complet T de représentants dans $\mathbb{C}$ de Λ/L ; il vient :

LEMME 4. – *Pour tous $z \in \mathbb{C} - \Lambda$, $\varphi \in \mathbb{C} - \frac{1}{l}L$, la somme*

$$S_\Lambda(z;\varphi) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{t \in T} D_L(z+t; l\varphi) e(-E_L(t; l\varphi))$$

ne dépend pas du choix de T. De plus, pour tout $\rho \in \Lambda$, on a $S_\Lambda(z+\rho;\varphi) = e(E_\Lambda(\rho;\varphi))S_\Lambda(z;\varphi)$.

Démonstration. – Nous venons de montrer que S_Λ, somme d'expressions du type (3.4), pour $t \in T$, est indépendante du choix du système T de représentants de Λ modulo L.

De plus, comme l'ensemble d'indice T mod $L = \Lambda/L$ est invariant par l'addition de $\rho \in \Lambda$, on a :

$$S_\Lambda(z+\rho;\varphi)/S_\Lambda(z;\varphi) = e(E_L(\rho; l\varphi))\,;$$

d'où l'égalité voulue puisque $lE_L = E_\Lambda$.

D'autre part, vu le lemme 4 et l'identité (3.3), on obtient :

LEMME 5. – *Les deux fonctions $z \mapsto D_\Lambda(z;\varphi)$ et $z \mapsto S_\Lambda(z;\varphi)$ sont méromorphes, et tous leurs pôles sont simples. On a :*

$$\{\textit{pôles de } S_\Lambda(z;\varphi)\} \subset \{\textit{pôles de } D_\Lambda(z;\varphi)\} = \Lambda.$$

De plus, seuls les points de $\Lambda - \varphi$ sont des zéros de $z \mapsto D_\Lambda(z;\varphi)$; ceux-ci sont tous simples.

Démontrons le théorème 1 *bis.* – On considère la fonction quotient définie par $z \mapsto S_\Lambda(z;\varphi)/D_\Lambda(z;\varphi)$. D'après le lemme 4 et la propriété D_1-c), § 2, cette fonction est périodique pour le réseau de périodes Λ. En outre, le lemme 5 assure que le nombre de ses pôles modulo Λ est inférieur ou égal à 1. Ceci n'est possible que si elle est constante. En conclusion, les deux fonctions $z \mapsto D_\Lambda(z;\varphi)$ et $z \mapsto S_\Lambda(z;\varphi)$ diffèrent d'une constante multiplicative non nulle près. Comme $\lim\limits_{u \to 0} \mathcal{K}_L(u)/u = 1$, on conclut que

$$\lim_{z \to 0} zS_\Lambda(z;\varphi) = 1 = \lim_{z \to 0} zD_\Lambda(z;\varphi).$$

Donc le théorème 1 bis est démontré.

Remarque 7. – Pour tout γ point de l-division de $\mathbb{C}/L$, on a :

$$D_\Lambda(z;\varphi+\gamma) = \sum_{t \in T} D_L(z+t; l\varphi) e(-E_L(t; l\varphi)) e\Big(-\frac{1}{l}E_L(lt; l\gamma)\Big),$$

où $e(-\frac{1}{l}E_L(lt; l\gamma))$ est une racine l-ième de 1. En choisissant correctement les réseaux L et Λ, on retrouve le résultat du § 4 de [2] lorsque φ *est point de torsion* de $\mathbb{C}/L$.

Nota. – L'énoncé du théorème 1 est plus simple, mais équivalent à la formule (3.19), § 3, p. 292 de [6].

Note remise le 21 mai 1997, acceptée après révision le 7 juillet 1997.

Références bibliographiques

[1] **Bayad A**. Valuation q-adique et relation de distribution additive pour certaines fonctions q-périodiques, à paraître dans *J. Number Theory*

[2] **Bayad A. et Robert G**. Amélioration d'une congruence pour certains éléments de Stickelberger quadratiques, à paraître dans *Bull. Soc. Math. France.*

[3] **Frobenius F. G., 1882**. Über die elliptischen Functionen zweiter Art *Ges. Abhand. b.* II, p. 81-96 = *J. reine angew. Math.*, 93, p. 53-68.

[4] **Kubert D. et Lang S., 1981**. *Modular units*, (Grundlehren der math. Wiss. 244), Springer-Verlag.

[5] **Lang S., 1973**. *Elliptic functions*, Addison-Wesley

[6] **Schertz R., 1991**. Galoismodulstruktur und elliptische Funktionen, *J. Number Theory*, p. 287-326.

[7] **Zagier D., 1991**. Periods of modular forms and Jacobi theta functions, *Invent. math*, 104, p. 449-465.