RACCOLTA DI ESERCIZI PER I CORSI PRELIMINARI

V PARTE: TRIGONOMETRIA

MISURE DEGLI ANGOLI IN GRADI E IN RADIANTI

Nota; nel seguito, per la misura degli angoli in gradi, viene utilizzato il sistema "sessadecimale", cioè una versione semplificata del sistema sessagesimale: il grado è la trecentosessantesima parte dell'angolo giro, ma invece di utilizzare primi e secondi si usano i decimali di grado (perciò ad esempio 22°,5 equivale a 22°30').

Dati i seguenti angoli espressi in gradi, convertirli in radianti

1. 60° $\{R.\ \frac{\pi}{3}\}$ **2.** 225° $\{R.\ \frac{5\pi}{4}\}$ **3.** 315° $\{R.\ \frac{7\pi}{4}\}$ **4.** 330° $\{R.\ \frac{11\pi}{6}\}$

5. 36° $\{R.\ \frac{\pi}{5}\}$ **6.** 54° $\{R.\ \frac{3\pi}{10}\}$ **7.** 252° $\{R.\ \frac{7\pi}{5}\}$ **8.** 10° $\{R.\ \frac{\pi}{18}\}$

9. 432° $\{R.\ \frac{12\pi}{5}\}$ **10.** 4°,5 $\{R.\ \frac{\pi}{40}\}$ **11.** 186° $\{R.\ \frac{31\pi}{30}\}$ **12.** 47°,25 $\{R.\ \frac{21\pi}{80}\}$

Dati i seguenti angoli espressi in radianti, convertirli in gradi

13. $\frac{3\pi}{5}$ $\{R.\ 108°\}$ **14.** $\frac{7\pi}{12}$ $\{R.\ 105°\}$ **15.** $\frac{27\pi}{20}$ $\{R.\ 243°\}$ **16.** $\frac{11\pi}{10}$ $\{R.\ 198°\}$

17. $\frac{3\pi}{8}$ $\{R.\ 67°,5\}$ **18.** $\frac{11\pi}{16}$ $\{R.\ 123°,75\}$ **19.** $\frac{7\pi}{50}$ $\{R.\ 25°,2\}$ **20.** $\frac{43\pi}{72}$ $\{R.\ 107°,5\}$

21. $\frac{157\pi}{540}$ $\{R.\ 52°,\bar{3}\}$ **22.** $\frac{1123\pi}{17820}$ $\{R.\ 11°,\overline{34}\}$ **23.** $\frac{697\pi}{1440}$ $\{R.\ 87°,125\}$

FUNZIONI GONIOMETRICHE

Per ciascuno dei seguenti angoli, di cui sono assegnati il quadrante di appartenenza e il valore del seno, calcolare coseno, tangente e cotangente

24. α nel primo quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = \frac{12}{13}$ $\{R.\ \cos\alpha = \frac{5}{13},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{12}{5},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{5}{12}\}$

25. α nel primo quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = \frac{2}{7}$ $\{R.\ \cos\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{7},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{15},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{2}\}$

26. α nel secondo quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = \frac{20}{29}$ $\{R.\ \cos\alpha = -\frac{21}{29},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{20}{21},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{21}{20}\}$

27. α nel secondo quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{18}$ $\{R.\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{323}}{18},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{323}},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\sqrt{323}\}$

28. α nel terzo quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$ $\{R.\ \cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{21}},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{21}}{2}\}$

29. α nel quarto quadrante, con $\mathrm{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{17}}{8}$ $\{R.\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{47}}{8},\ \mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{17}{47}},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\sqrt{\frac{47}{17}}\}$

Per ciascuno dei seguenti angoli, di cui sono assegnati il quadrante di appartenenza e il valore del coseno, calcolare seno, tangente e cotangente

30. α nel primo quadrante, con $\cos\alpha = \frac{77}{85}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{36}{85},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{36}{77},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{77}{36}\}$

31. α nel primo quadrante, con $\cos\alpha = \frac{\sqrt{41}}{9}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{10}}{9},\ \mathrm{tg}\alpha = 2\sqrt{\frac{10}{41}},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{41}{10}}\}$

32. α nel secondo quadrante, con $\cos\alpha = -\frac{2}{9}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{\sqrt{77}}{9},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{77}}{2},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{77}}\}$

33. α nel terzo quadrante, con $\cos\alpha = -\frac{40}{41}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{9}{41},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{9}{40},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{40}{9}\}$

34. α nel quarto quadrante, con $\cos\alpha = \frac{9}{10}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{10},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{91}}{9},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{9}{\sqrt{91}}\}$

35. α nel quarto quadrante, con $\cos\alpha = \frac{\sqrt{39}}{8}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{5}{8},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{39}},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{39}}{5}\}$

Per ciascuno dei seguenti angoli, di cui sono assegnati il quadrante di appartenenza e il valore della tangente, calcolare seno, coseno e cotangente

36. α nel primo quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = \frac{24}{7}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{24}{25},\ \cos\alpha = \frac{7}{25},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{7}{24}\}$

37. α nel primo quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = 11$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{11}{\sqrt{122}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{122}},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{11}\}$

38. α nel secondo quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{3}{5}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}},\ \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{5}{3}\}$

39. α nel terzo quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = \frac{17}{7}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{17\sqrt{2}}{26},\ \cos\alpha = -\frac{7\sqrt{2}}{26},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{7}{17}\}$

40. α nel terzo quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = 57$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{57}{5\sqrt{130}},\ \cos\alpha = -\frac{1}{5\sqrt{130}},\ \mathrm{cotg}\alpha = \frac{1}{57}\}$

41. α nel quarto quadrante, con $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2}{3}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{13}},\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},\ \mathrm{cotg}\alpha = -\frac{3}{2}\}$

Per ciascuno dei seguenti angoli, di cui sono assegnati il quadrante di appartenenza e il valore della cotangente, calcolare seno, coseno e tangente

42. α nel primo quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{20}{99}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{99}{101},\ \cos\alpha = \frac{20}{101},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{99}{20}\}$

43. α nel primo quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = 25$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{1}{\sqrt{626}},\ \cos\alpha = \frac{25}{\sqrt{626}},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{25}\}$

44. α nel secondo quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = -\frac{3}{8}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = \frac{8}{\sqrt{73}},\ \cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{73}},\ \mathrm{tg}\alpha = -\frac{8}{3}\}$

45. α nel terzo quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{11}{15}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{15}{\sqrt{346}},\ \cos\alpha = -\frac{11}{\sqrt{346}},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{15}{11}\}$

46. α nel terzo quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{4}{25}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{25}{\sqrt{641}},\ \cos\alpha = -\frac{4}{\sqrt{641}},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{25}{4}\}$

47. α nel quarto quadrante, con $\mathrm{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{13}}{5}$ $\{R.\ \mathrm{sen}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{38}},\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{13}{38}},\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{\sqrt{13}}\}$

FUNZIONI GONIOMETRICHE INVERSE

Esprimere in ciascuno dei seguenti casi l'angolo α, tenendo conto dell'intervallo in cui esso cade.
NOTA: nelle risposte che seguono, nel caso del primo quadrante di è utilizzata la funzione arcoseno.

48. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{17},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\{R.\ \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{1}{17}\}$

49. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{8}{17},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\{R.\ \alpha = \arccos\left(-\frac{15}{17}\right)\}$

50. $\operatorname{sen}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ $\{R.\ \alpha = \arccos\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\}$

51. $\cos\alpha = -\frac{3}{4},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ $\{R.\ \alpha = \pi + \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{7}}{4}\}$

52. $\cos\alpha = -\frac{9}{41},\ -\pi < \alpha < -\frac{\pi}{2}$ $\{R.\ \alpha = \operatorname{arcsen}\frac{40}{41} - \pi$, oppure $\alpha = -\arccos\left(-\frac{9}{41}\right)\}$

53. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{59}}{30},\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ $\{R.\ \alpha = -\operatorname{arcsen}\frac{29}{30}\}$

54. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{17},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ $\{R.\ \alpha = 2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{3}{\sqrt{298}}\}$

55. $\cos\alpha = \frac{40}{41},\ 2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ $\{R.\ \alpha = 2\pi + \operatorname{arcsen}\frac{9}{41}\}$

56. $\cos\alpha = -\frac{7}{33},\ \frac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ $\{R.\ \alpha = 2\pi + \arccos\left(-\frac{7}{33}\right)\}$

EQUAZIONI GONIOMETRICHE ELEMENTARI

Risolvere le seguenti equazioni goniometriche elementari, utilizzando anche le funzioni goniometriche inverse se necessario

48. $\operatorname{sen}x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\{R.\ \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\ ;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\}$

49. $\operatorname{sen}x = \frac{5}{6}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{5}{6} + 2k\pi\ ;\ \pi - \operatorname{arcsen}\frac{5}{6} + 2k\pi\}$

50. $\cos x = \frac{12}{13}$ $\{R.\ \pm\arccos\frac{12}{13} + 2k\pi\}$

51. $\operatorname{tg}x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\{R.\ \frac{5\pi}{6} + k\pi\}$

52. $\operatorname{tg}x = \frac{7}{13}$ $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{7}{13} + k\pi\}$

53. $\operatorname{tg}x = -\frac{19}{17}$ $\{R.\ -\operatorname{arctg}\frac{19}{17} + k\pi\}$

54. $\cos x = -\frac{5}{8}$ $\{R.\ \pm\arccos\left(-\frac{5}{8}\right) + 2k\pi\}$

55. $\operatorname{cotg}x = \frac{7}{\sqrt{11}}$ $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{11}}{7} + k\pi\}$

56. $\operatorname{sen}x = \sqrt{5} - 2$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{5} - 2\right) + 2k\pi\ ;\ \pi - \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{5} - 2\right) + 2k\pi\}$

57. $\operatorname{sen}x=\sqrt{5}+2$ $\{R.\ \textit{assurda}\}$

58. $\cos x=\dfrac{\sqrt{5}+2}{10}$ $\{R.\ \pm\arccos\dfrac{\sqrt{5}+2}{10}+2k\pi\ \}$

59. $\cos x=\dfrac{-7-\sqrt{5}}{9}$ $\{R.\ \textit{assurda}\}$

In ciascuna delle seguenti equazioni, l'applicazione di opportune formule consente di ottenere un'equazione contenente una sola funzione goniometrica, oppure tramite scomposizione è possibile ottenere più equazioni goniometriche elementari. Dopo aver determinato tutte le soluzioni, scrivere esplicitamente in ordine crescente quelle che cadono tra 0 e 2π

60. $2\cos^2 x-5\operatorname{sen}x+1=0$ $\{R.\ \dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5\pi}{6}\ \}$

61. $2\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen}x=0$ $\{R.\ k\pi,\ -\dfrac{\pi}{6}+2k\pi,\ \dfrac{7\pi}{6}+2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $0,\ \pi,\ \dfrac{7\pi}{6},\ \dfrac{11\pi}{6},\ 2\pi\}$

62. $10\operatorname{sen}^2 x+7\cos x=17$

$\{R.\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \pm\arccos\dfrac{1}{5}+2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $\dfrac{\pi}{3},\ \arccos\dfrac{1}{5},\ 2\pi-\arccos\dfrac{1}{5},\ \dfrac{5\pi}{3}\ \}$

63. $6\operatorname{sen}x\cos x-4\operatorname{sen}x+9\cos x-6=0$

$\{R.\ \pm\arccos\dfrac{2}{3}+2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $\arccos\dfrac{2}{3},\ 2\pi-\arccos\dfrac{2}{3}\ \}$

64. $3\operatorname{sen}x\cos x+3\operatorname{tg}x+10\operatorname{sen}x=0$

$\{R.\ \pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right),\ 2\pi-\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)\}$

65. $2\operatorname{sen}^3 x+\cos^2 x+\operatorname{sen}x=3$ $\{R.\ 2k\pi$; soluzioni tra 0 e 2π: $0,\ \pi,\ 2\pi\}$

66. $8(\operatorname{sen}^2 x+\cos x)=11$ $\{R.\ \textit{nessuna soluzione}\}$

67. $16\operatorname{sen}x\cos^2 x+4\cos^2 x-4\operatorname{sen}x-1=0$

$\{R.\ \pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ \pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ -\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4}+2k\pi;\ \pi+\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4}+2k\pi;$

soluzioni tra 0 e 2π: $\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi+\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4},\ \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3},\ 2\pi-\operatorname{arcsen}\dfrac{1}{4}\ \}$

FORMULE DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE, FORMULE DI DUPLICAZIONE

68. Siano α e β gli angoli del primo quadrante per i quali è $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{24}{25}$ e $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{3}{5}$. Calcolare seno e coseno degli angoli $\alpha+\beta$ e $\alpha-\beta$.

$\{R.\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\dfrac{117}{125},\ \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{44}{125}\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta)=\dfrac{3}{5},\ \cos(\alpha-\beta)=\dfrac{4}{5}\}$

69. Detto α l'angolo del primo quadrante per i quali è $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{77}{85}$ e β l'angolo del secondo quadrante per il quale è $\operatorname{sen}\beta=\dfrac{9}{41}$, calcolare seno e coseno di $\alpha+\beta$.

$\{R.\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta)=-\dfrac{2756}{3485},\ \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{2133}{3485}\}$

70. Detto α l'angolo del secondo quadrante per il quale è $\operatorname{sen}\alpha = \frac{40}{41}$, calcolare seno e coseno di $\alpha + \frac{\pi}{6}$.
$\{R.\ \operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{-40 - 9\sqrt{3}}{82},\ \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{31\sqrt{2}}{82}\}$

71. Detto α l'angolo del primo quadrante per il quale è $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, calcolare seno e coseno di 4α.
$\{R.\ \operatorname{sen}4\alpha = \frac{28560}{28561},\ \cos 4\alpha = -\frac{239}{28561}\}$

72. Se sen $2\alpha > 0$ e cos $2\alpha < 0$, in quale quadrante giace α? e in quale quadrante giace 4 α?
{*R. α giace nel primo quadrante, mentre 4α può far parte del terzo o del quarto*}

Esprimere in forma più compatta i seguenti angoli

73. $\operatorname{arcsen}\frac{3}{5} + \arccos\frac{12}{13}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{56}{65}\}$

74. $\arccos\frac{1}{6} + \arccos\frac{5}{6}$ $\{R.\ \arccos\frac{5-\sqrt{385}}{36}\}$

75. $\arccos\left(-\frac{40}{41}\right) + \arccos\left(-\frac{56}{65}\right)$ $\{R.\ 2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{1943}{2665}\}$

76. $2\operatorname{arcsen}\frac{1}{\sqrt{11}}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{2\sqrt{10}}{11}\}$

77. $2\arccos\frac{15}{17}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{240}{289}\}$

78. $\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{4}{11}$ $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{53}{43}\}$

79. $\operatorname{arctg}\frac{6}{5} + \operatorname{arctg}\frac{11}{4}$ $\{R.\ \pi - \operatorname{arctg}\frac{79}{46}\}$

80. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{9} + \operatorname{arcsen}\frac{12}{13}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{525}{533}\}$

81. $2\operatorname{arctg}3 + \operatorname{arcsen}\frac{20}{29}$ $\{R.\ \pi + \operatorname{arcsen}\frac{17}{145}\}$

82. $\operatorname{arctg}7 - \operatorname{arctg}4$ $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{3}{29}\}$

83. $2\operatorname{arctg}\frac{51}{5} - \arccos\frac{20}{101}$ $\{R.\ \arccos\left(-\frac{515}{132613}\right)\}$

FORMULE DI BISEZIONE

Per ciascuno dei seguenti angoli, di cui sono assegnati il quadrante di appartenenza e una funzione goniometrica, calcolare seno, coseno e tangente dell'angolo dimezzato

84. α nel primo quadrante, con $\cos\alpha = \frac{9}{41}$ $\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{\sqrt{41}}, \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{41}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{4}{5}\}$

85. α nel primo quadrante, con $\operatorname{sen}\alpha = \frac{11}{61}$ $\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{121}},\ \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{10}{\sqrt{121}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{10}\}$

86. α nel secondo quadrante, con $\operatorname{sen}\alpha=\frac{24}{25}$ $\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{5},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{3}\}$

87. α nel primo quadrante, con $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{3}$

$\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{58-3\sqrt{58}}{29}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{58+3\sqrt{58}}{29}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{58}-3}{7}\}$

88. α nel secondo quadrante, con $\operatorname{tg}\alpha=-4$

$\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{17+\sqrt{17}}{34}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{17-\sqrt{17}}{34}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{17}+1}{4}\}$

89. α nel terzo quadrante, con $\operatorname{sen}\alpha=-\frac{15}{17}$ $\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\frac{5}{\sqrt{34}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{\sqrt{34}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{3}\}$

90. α nel terzo quadrante, con $\operatorname{tg}\alpha=7$

$\{R.\ \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{10+\sqrt{2}}{20}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{10-\sqrt{2}}{20}},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{5\sqrt{2}+1}{7}\}$

ALTRE EQUAZIONI GONIOMETRICHE

I seguenti esercizi comprendono vari casi di equazioni risolubili con uno dei metodi noti (applicazione di formule di addizione, sottrazione e moltiplicazione, equazioni omogenee in seno e coseno ed equazioni riconducibili ad omogenee, equazioni lineari in seno e coseno, ecc.)
NOTA: per brevità, si è omesso il calcolo esplicito delle soluzioni comprese tra 0 e 2π.

91. $\cos\frac{x}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\{R.\ \pm\frac{\pi}{2}+6k\pi\}$

92. $\operatorname{tg}\left(3x-\frac{x}{7}\right)=\sqrt{3}$ $\{R.\ \frac{10}{63}\pi+k\frac{\pi}{3}\}$

93. $\operatorname{sen}x=\cos 3x$ $\{R.\ \frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{4}+k\pi\}$

94. $\operatorname{sen}^2x+\operatorname{sen}x-\cos^2x$ $\{R.\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\}$

95. $\operatorname{tg}^3x-1+\operatorname{tg}^2x-\operatorname{cotg}x=0$ $\{R.\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi\}$

96. $12\cos^3x+11\cos 2x+6\cos x+12=0$ $\{R.\ (2k+1)\pi;\ \pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\ \pm\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)+2k\pi\}$

97. $3\operatorname{sen}^2x-4\operatorname{sen}x\cos x+\cos^2x=0$ $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+k\pi;\frac{\pi}{4}+k\pi\}$

98. $13\operatorname{sen}^2x+3\operatorname{sen}2x=8$ $\{R.\ -\operatorname{arctg}2+k\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{4}{5}+k\pi\}$

99. $2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}2x=3\cos 3x+9\cos x$ $\{R.\ (2k+1)\frac{\pi}{2};\ \pm\frac{\pi}{3}+k\pi\}$

100. $\operatorname{sen}x+3\cos x-1=0$ $\{R.\ \frac{\pi}{2}+2k\pi;\ -\operatorname{arcsen}\frac{4}{5}+2k\pi\}$

101. $2\cos x-9\operatorname{sen}x+7=0$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{15}{17}+2k\pi;\ \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)+2k\pi\}$

102. $2\operatorname{sen}x+3\cos x+3=0$ $\{R.\ (2k+1)\pi;\ \pi+\operatorname{arcsen}\frac{12}{13}+2k\pi\}$

DISEQUAZIONI GONIOMETRICHE

Di seguito sono riportati alcuni casi semplici di disequazioni goniometriche, risolubili anche con l'ausilio di un grafico.
NOTA: per brevità, è stato riportato solo un sottoinsieme di soluzioni, di solito limitato ad un opportuno intervallo di ampiezza 2π; è ovviamente possibile, grazie alla periodicità, scrivere tutto l'insieme delle soluzioni..

103. $\operatorname{sen} x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\{R.\ \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}\}$

104. $\cos x \geq \frac{1}{2}$ $\{R.\ -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}\}$

105. $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\{R.\ \frac{3\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\}$

106. $\operatorname{sen} x > \frac{5}{11}$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{5}{11} < x < \pi - \operatorname{arcsen}\frac{5}{11}\}$

107. $\operatorname{sen} x \leq -\frac{\sqrt{3}}{4}$ $\{R.\ \pi + \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{4} \leq x \leq 2\pi - \operatorname{arcsen}\frac{\sqrt{3}}{4}\}$

108. $\cos x > -\frac{4}{13}$ $\{R.\ -\arccos\left(-\frac{4}{13}\right) < x < \arccos\left(-\frac{4}{13}\right)\}$

109. $\operatorname{sen} x \geq \cos x$ $\{R.\ \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}\}$

110. $2\operatorname{sen} x - \cos x < 0$ $\{R.\ \operatorname{arctg} 2 - \pi < x < \operatorname{arctg} 2\}$

111. $11\operatorname{sen} x - 3\cos x \geq 9$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{12}{13} \leq x \leq \arccos\left(-\frac{4}{5}\right)\}$

112. $31\cos x - 33\operatorname{sen} x > 23$ $\{R.\ \operatorname{arcsen}\frac{24}{25} - \pi < x < \operatorname{arcsen}\frac{9}{41}\}$

APPLICAZIONI GEOMETRICHE

Negli esercizi che seguono è necessario applicare alcuni semplici teoremi di trigonometria (teoremi sui triangoli rettangoli, teorema dei seni).

113. Se in un triangolo *ABC*, rettangolo in *A*, l'ipotenusa misura $\frac{36}{\sqrt{3}}$ cm e il cateto *AB* misura 18 cm, qual è l'ampiezza dell'angolo $C\hat{B}A$? $\{R.\ \frac{\pi}{6}\}$

114. Se in un triangolo *ABC*, rettangolo in *A*, l'ipotenusa misura 50 cm e il cateto *AB* misura $25\sqrt{2}$ cm, qual è l'ampiezza dell'angolo $B\hat{C}A$? $\{R.\ \frac{\pi}{4}\}$

115. Se in un triangolo *ABC* i due cateti *BC* e *AB* misurano rispettivamente 21 cm e 20 cm, qual è l'ampiezza dell'angolo $B\hat{C}A$? $\{R.\ \operatorname{arctg}\frac{20}{21}\}$