El papel de términos super lineales de primer orden en el comportamiento local y global en tiempo de ecuaciones parabólicas no lineales

M. Magliocca

Departamento de Matematicas
Universidad de Roma Tor Vergata

Valencia, 12/09/2017

Acerca de el marco super lineal

Presentación

Nos planteamos problemas parabólicos cuyo modelo mas sencillo es

$$\begin{cases} u_t - \mathrm{div}\,(A(t,x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = |\nabla u|^q + f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $0 < T \leq \infty$.

Estamos interesados en resultados de existencia, de regularidad (decaimiento en tiempo corto y largo) y de unicidad de soluciones.

Puntos Claves

- $1 < p < N$ y perdimos homogeneidad.
- La matriz $A(t,x)$ está acotada, es coerciva y con coeficientes medibles, así que no tenemos ni teoría de los semigrupos, ni regularidad de el kernel, ¡tampoco D^2u!
- Datos no acotados llevan hasta soluciones no acotadas.
- El crecimiento q en el término gradiente es super lineal.

Presentación

Nos planteamos problemas parabólicos cuyo modelo mas sencillo es

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(A(t,x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right) = |\nabla u|^q + f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $0 < T \leq \infty$.

Estamos interesados en resultados de existencia, de regularidad (decaimiento en tiempo corto y largo) y de unicidad de soluciones.

Puntos Claves

- $1 < p < N$ y perdimos homogeneidad.
- La matriz $A(t,x)$ está acotada, es coerciva y con coeficientes medibles, así que no tenemos ni teoría de los semigrupos, ni regularidad de el kernel, ¡tampoco $D^2 u$!
- Datos no acotados llevan hasta soluciones no acotadas.
- El crecimiento q en el término gradiente es super lineal.

Presentación

Nos planteamos problemas parabólicos cuyo modelo mas sencillo es

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\,(A(t,x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = |\nabla u|^q + f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $0 < T \leq \infty$.

Estamos interesados en resultados de existencia, de regularidad (decaimiento en tiempo corto y largo) y de unicidad de soluciones.

Puntos Claves

- $1 < p < N$ y perdimos homogeneidad.
- La matriz $A(t,x)$ está acotada, es coerciva y con coeficientes medibles, así que no tenemos ni teoría de los semigrupos, ni regularidad de el kernel, ¡tampoco $D^2 u$!
- Datos no acotados llevan hasta soluciones no acotadas.
- El crecimiento q en el término gradiente es super lineal.

Presentación

Nos planteamos problemas parabólicos cuyo modelo mas sencillo es

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\left(A(t,x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right) = |\nabla u|^q + f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $0 < T \leq \infty$.

Estamos interesados en resultados de existencia, de regularidad (decaimiento en tiempo corto y largo) y de unicidad de soluciones.

Puntos Claves

- $1 < p < N$ y perdimos homogeneidad.
- La matriz $A(t,x)$ está acotada, es coerciva y con coeficientes medibles, así que no tenemos ni teoría de los semigrupos, ni regularidad de el kernel, ¡tampoco $D^2 u$!
- Datos no acotados llevan hasta soluciones no acotadas.
- El crecimiento q en el término gradiente es super lineal.

Presentación

Nos planteamos problemas parabólicos cuyo modelo mas sencillo es

$$\begin{cases} u_t - \text{div}\,(A(t,x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = |\nabla u|^q + f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ acotado, $Q_T = (0,T) \times \Omega$, $S_T = (0,T) \times \partial\Omega$, $0 < T \leq \infty$.

Estamos interesados en resultados de existencia, de regularidad (decaimiento en tiempo corto y largo) y de unicidad de soluciones.

Puntos Claves

- $1 < p < N$ y perdimos homogeneidad.
- La matriz $A(t,x)$ está acotada, es coerciva y con coeficientes medibles, así que no tenemos ni teoría de los semigrupos, ni regularidad de el kernel, ¡tampoco $D^2 u$!
- Datos no acotados llevan hasta soluciones no acotadas.
- El crecimiento q en el término gradiente es super lineal.

Problemas coercivos VS Super lineales

Problemas estrictamente coercivos

- La teoría L^2 (i.e. $u_0 \in L^2(\Omega)$) funciona y la L^σ, $\sigma \geq 1$, también (i.e. $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$).
- Hay efecto regularizante y decaimiento en tiempo largo.

Problemas coercivos VS Super lineales

Problemas estrictamente coercivos

- La **teoría L^2** (i.e. $u_0 \in L^2(\Omega)$) funciona y la L^σ, $\sigma \geq 1$, también (i.e. $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$).
- Hay **efecto regularizante** y **decaimiento en tiempo largo**.
- Necesitamos una condición de compatibilidad entre q y u_0 con el fin de que el problema admita una solución (de cualquier tipo): básicamente, necesitamos desarrollar una teoría L^σ adecuada con $\sigma = \sigma(q)$.
- Pensando en el **problema con potencia super lineal**

$$u_t - \Delta u = |u|^q \quad \text{con } q > 1$$

sabemos que no tiene soluciones globales y hay fenómenos de **explosión**. Ademas, ¡hay contraejemplos de no existencia cuando $q > 1$ y $u_0 \in L^\nu(\Omega)$ si $\nu < \bar{\nu}(q)$!

Problemas coercivos VS Super lineales

Problemas estrictamente coercivos

- La **teoría L^2** (i.e. $u_0 \in L^2(\Omega)$) funciona y la L^σ, $\sigma \geq 1$, también (i.e. $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$).
- Hay **efecto regularizante** y **decaimiento en tiempo largo**.

- Necesitamos una condición de compatibilidad entre q y u_0 con el fin de que el problema admita una solución (de cualquier tipo): básicamente, necesitamos desarrollar una teoría L^σ adecuada con $\sigma = \sigma(q)$.
- Pensando en el **problema con potencia super lineal**

$$u_t - \Delta u = |u|^q \quad \text{con } q > 1$$

sabemos que no tiene soluciones globales y hay fenómenos de **explosión**. Ademas, ¡hay contraejemplos de no existencia cuando $q > 1$ y $u_0 \in L^\nu(\Omega)$ si $\nu < \bar{\nu}(q)$!

Problemas coercivos VS Super lineales

Problemas estrictamente coercivos

- La **teoría L^2** (i.e. $u_0 \in L^2(\Omega)$) funciona y la L^σ, $\sigma \geq 1$, también (i.e. $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$).
- Hay **efecto regularizante** y **decaimiento en tiempo largo**.

Características de problemas super lineales

- Necesitamos una condición de compatibilidad entre q y u_0 con el fin de que el problema admita una solución (de cualquier tipo): básicamente, necesitamos desarrollar una teoría L^σ adecuada con $\sigma = \sigma(q)$.
- Pensando en el **problema con potencia super lineal**

$$u_t - \Delta u = |u|^q \quad \text{con } q > 1$$

sabemos que no tiene soluciones globales y hay fenómenos de **explosión**. Ademas, ¡hay contraejemplos de no existencia cuando $q > 1$ y $u_0 \in L^\nu(\Omega)$ si $\nu < \bar{\nu}(q)$!

Problemas coercivos VS Super lineales

Problemas estrictamente coercivos

- La **teoría L^2** (i.e. $u_0 \in L^2(\Omega)$) funciona y la L^σ, $\sigma \geq 1$, también (i.e. $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$).
- Hay **efecto regularizante** y **decaimiento en tiempo largo**.

Características de problemas super lineales

- Necesitamos una condición de compatibilidad entre $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{u_0}$ con el fin de que el problema admita una solución (de cualquier tipo): básicamente, necesitamos desarrollar una teoría L^σ adecuada con $\boldsymbol{\sigma = \sigma(q)}$.
- Pensando en el **problema con potencia super lineal**

$$u_t - \Delta u = |u|^{q} \quad \text{con } q > 1$$

✎ H. Brezis & T. Cazenave, (1996).
sabemos que no tiene soluciones globales y hay fenómenos de **explosión**. Ademas, ¡hay contraejemplos de no existencia cuando $q > 1$ y $u_0 \in L^\nu(\Omega)$ si $\nu < \bar{\nu}(q)$!

Marco Acotado VS No Acotado

- Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces el decaimiento es fácil (principio del máximo). ¿Que pasa si $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$?
- La unicidad puede fallar hablando de soluciones *no acotadas*, de hecho

$$\exists\ u > 0 \text{ solución de } u_t - \Delta u = |\nabla u|^2,\ u(0,x) = 0.$$

Como tenemos $q < p$, la clase natural del nuestro problema tendrá la forma

$$\left\{\text{soluciones } u : |u|^\sigma \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))\right\} \text{ con } \sigma = \sigma(q).$$

Marco Acotado VS No Acotado

- Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces el **decaimiento** es fácil (principio del máximo). ¿Que pasa si $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$?
- La **unicidad** puede fallar hablando de soluciones *no acotadas*, de hecho

$$\exists\ u > 0 \text{ solución de } u_t - \Delta u = |\nabla u|^2,\ u(0,x) = 0.$$

La clase correcta de funciones es la siguiente

$$(e^u - 1) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Como tenemos $q < p$, la clase natural del nuestro problema tendrá la forma

$$\Big\{ \text{soluciones } u : \quad |u|^\beta \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \Big\} \quad \text{con} \quad \beta = \beta(q).$$

Marco Acotado VS No Acotado

- Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces el **decaimiento** es fácil (principio del máximo). ¿Que pasa si $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$?
- La **unicidad** puede fallar hablando de soluciones *no acotadas*, de hecho

$$\exists\ u > 0 \text{ solución de } u_t - \Delta u = |\nabla u|^2,\ u(0,x) = 0.$$

La clase correcta de funciones es la siguiente

$$(e^u - 1) \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

✎ **B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio & I. Peral, (2008).**

Como tenemos $q < p$, la clase natural del nuestro problema tendrá la forma

$$\left\{ \text{soluciones } u : \quad |u|^\beta \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \right\} \quad \text{con} \quad \beta = \beta(q).$$

Marco Acotado VS No Acotado

- Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces el **decaimiento** es fácil (principio del máximo). ¿Que pasa si $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$?
- La **unicidad** puede fallar hablando de soluciones *no acotadas*, de hecho

$$\exists\ u > 0 \text{ solución de } u_t - \Delta u = |\nabla u|^2,\ u(0,x) = 0.$$

La clase correcta de funciones es la siguiente

$$(e^u - 1) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

✎ **B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio & I. Peral, (2008).**

Como tenemos $q < p$, la clase natural del nuestro problema tendrá la forma

$$\left\{\text{soluciones } u : \quad |u|^\beta \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))\right\} \quad \text{con} \quad \beta = \beta(q).$$

Marco Acotado VS No Acotado

- Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, entonces el **decaimiento** es fácil (principio del máximo). ¿Que pasa si $u_0 \notin L^\infty(\Omega)$?
- La **unicidad** puede fallar hablando de soluciones *no acotadas*, de hecho

$$\exists\ u > 0 \text{ solución de } u_t - \Delta u = |\nabla u|^2,\ u(0,x) = 0.$$

La clase correcta de funciones es la siguiente

$$(e^u - 1) \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)).$$

✎ **B. Abdellaoui, A. Dall'Aglio & I. Peral, (2008).**

Como tenemos $q < p$, la clase natural del nuestro problema tendrá la forma

$$\left\{\text{soluciones } u : \quad |u|^\beta \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))\right\} \quad \text{con} \quad \beta = \beta(q).$$

Cuestión de puntos de vista

Cuestión de puntos de vista

Pensamos en

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, ¿cuales q super lineales podemos considerar?

Si tomamos u como función test, llegamos a

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \iint_{Q_T} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le \iint_{Q_T} |\nabla u|^q |u|\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

Cuestión de puntos de vista

Pensamos en

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, ¿cuales q super lineales podemos considerar?

Si tomamos u como función test, llegamos a

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le c\iint_{Q_T} |u|^{\frac{2}{2-q}}\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

gracias a la desigualdad de Young.

Cuestión de puntos de vista

Pensamos en

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, ¿cuales q super lineales podemos considerar?

Si tomamos u como función test, llegamos a

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le c\iint_{Q_T} |u|^{\frac{2}{2-q}}\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

gracias a la desigualdad de Young. Entonces, para aplicar Gagliardo-Nirenberg (G-N), necesitamos que

$$\frac{2}{2-q} \le 2\left(\frac{N+2}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{1 < q \le 2 - \frac{N}{N+2}} \quad \rightsquigarrow \quad \text{¿es todo?}$$

Cuestión de puntos de vista

Pensamos en

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, ¿cuales q super lineales podemos considerar?

Si tomamos u como función test, llegamos a

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le c\iint_{Q_T} |u|^{\frac{2}{2-q}}\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

gracias a la desigualdad de Young. Entonces, para aplicar Gagliardo-Nirenberg (G-N), necesitamos que

$$\frac{2}{2-q} \le 2\left(\frac{N+2}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 < q \le 2 - \frac{N}{N+2} \quad \rightsquigarrow \quad \text{¿es todo?}$$

Si $q < 2$ es super lineal, ¿cual u_0 podemos considerar?

Elegimos $u^{\sigma-1}$ como función test y *luego* fijamos un $\sigma = \sigma(q) > 1$ adecuado que cierre la estimación para q super lineales.

Cuestión de puntos de vista

Pensamos en

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q \quad \text{in} \quad Q_T.$$

Si $u_0 \in L^2(\Omega)$, ¿cuales q super lineales podemos considerar?

Si tomamos u como función test, llegamos a

$$\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\iint_{Q_T} |\nabla u|^2\,dx\,dt \le c\iint_{Q_T} |u|^{\frac{2}{2-q}}\,dx\,dt + \int_\Omega |u_0|^2\,dx$$

gracias a la desigualdad de Young. Entonces, para aplicar Gagliardo-Nirenberg (G-N), necesitamos que

$$\frac{2}{2-q} \le 2\left(\frac{N+2}{N}\right) \quad \Rightarrow \quad 1 < q \le 2 - \frac{N}{N+2} \quad \rightsquigarrow \quad \text{¿es todo?}$$

Si $q < 2$ es super lineal, ¿cual u_0 podemos considerar?

Elegimos $u^{\sigma-1}$ como función test y *luego* fijamos un $\sigma = \sigma(q)$ adecuado que cierre la estimación por q super lineales.

Desde el punto de vista de q

La condición de compatibilidad

La relación entre la velocidad de crecimiento super lineal $\boldsymbol{q}$ y el dado inicial $u_0 \in L^{\boldsymbol{\sigma}}(\Omega)$ que nos asegura la existencia de soluciones u es

$$u_0 \in L^{\sigma}(\Omega) \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{N(q-1)}{2-q}.$$

Citamos

✎ **M. Ben-Artzi, P. Souplet & F. Weissler, (2001).**

que estudiaron el problema de Cauchy super lineal con operador de Laplace.

Desde el punto de vista de q

La condición de compatibilidad

La relacion entre la velocidad de crecimiento super lineal $\boldsymbol{q}$ y el dado inicial $u_0 \in L^{\boldsymbol{\sigma}}(\Omega)$ que nos asegura la existencia de soluciones u es

$$u_0 \in L^{\sigma}(\Omega) \quad \text{con} \quad \sigma = \frac{N(q-1)}{2-q}.$$

Citamos

✎ **M. Ben-Artzi, P. Souplet & F. Weissler, (2001).**

que estudiaron el problema de Cauchy super lineal con operador de Laplace.

Un resultado de no existencia

¿Que pasa si eligimos $u_0 \in L^{\mu}(\Omega)$ con $1 \leq \mu < \sigma$?
Razonando por contradicción, se puede probar que tal solución no existe porque no encaja en la clase de regularidad necesaria.

El nivel super lineal

¿Que significa la palabra ”super lineal” en el nuestro contexto?

Acerca de hipótesis y umbrales

Consideramos
$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

Entonces **cerramos la estimación** si y solo si
$$\boldsymbol{aq} \le \boldsymbol{b}. \tag{D}$$

Además, estamos en el **marco super lineal** si y solo si
$$\frac{\omega \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{b}} > 1. \tag{U}$$

Acerca de hipótesis y umbrales

Consideramos
$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^a(Q_T)$. Eligemos $(1+u)^{\sigma-1} - 1$, $\sigma > 1$, como función test y intentamos probar una estimación del tipo

$$\| |\nabla u|^b \|_{L^1(Q_T)} \le c \|f\|^{\omega}_{L^a(Q_T)}.$$

Entonces **cerramos la estimación** si y solo si

$$aq \le b. \tag{D}$$

Además, estamos en el **marco super lineal** si y solo si

$$\frac{\omega q}{b} > 1. \tag{U}$$

Acerca de hipótesis y umbrales

Consideramos

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^a(Q_T)$. Eligemos $(1+u)^{\sigma-1} - 1$, $\sigma > 1$, como función test y intentamos probar una estimación del tipo

$$\||\nabla u|^b\|_{L^1(Q_T)} \overset{f=|\nabla u|^q}{\leq} c\||\nabla u|^q\|_{L^a(Q_T)}^{\omega}.$$

Entonces **cerramos la estimación** si y solo si

$$\boldsymbol{aq \leq b}. \tag{D}$$

Además, estamos en el marco super lineal si y solo si

$$\frac{\omega \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{b}} > 1. \tag{U}$$

Acerca de hipótesis y umbrales

Consideramos

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^a(Q_T)$. Eligemos $(1+u)^{\sigma-1} - 1$, $\sigma > 1$, como función test y intentamos probar una estimación del tipo

$$\| |\nabla u|^{\boldsymbol{b}} \|_{L^1(Q_T)} \overset{f=|\nabla u|^q}{\leq} c \| |\nabla u|^{\boldsymbol{q}} \|^{\omega}_{L^{\boldsymbol{a}}(Q_T)}.$$

Entonces cerramos la estimación si y solo si

$$\boldsymbol{aq} \leq \boldsymbol{b}. \tag{D}$$

Además, estamos en el marco super lineal si y solo si

$$\frac{\omega \boldsymbol{q}}{\boldsymbol{b}} > 1. \tag{U}$$

Acerca de hipótesis y umbrales

Consideramos

$$\begin{cases} u_t - \Delta_p u = f & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = 0 & \text{en } \Omega, \end{cases}$$

con $f \in L^a(Q_T)$. Eligemos $(1+u)^{\sigma-1} - 1$, $\sigma > 1$, como función test y intentamos probar una estimación del tipo

$$\| |\nabla u|^{\boldsymbol{b}} \|_{L^1(Q_T)} \overset{f=|\nabla u|^q}{\leq} c \| |\nabla u|^{\boldsymbol{q}} \|^{\boldsymbol{\omega}}_{L^a(Q_T)}.$$

Entonces cerramos la estimación si y solo si

$$\boldsymbol{aq} \leq \boldsymbol{b}. \tag{D}$$

Además, estamos en el marco super lineal si y solo si

$$\frac{\boldsymbol{\omega q}}{\boldsymbol{b}} > \mathbf{1}. \tag{U}$$

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\dfrac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...
- No G-N y $f \in L^a(Q_T)$ permiten $1 < p <$ [illegible]

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\dfrac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...

$$\||\nabla u|^{b_1}\|_{L^1(Q_T)} \le c \||\nabla u|^q\|_{L^a(Q_T)}^{b_1 \frac{N+2}{p(N+1)-N}}, \qquad b_1 = b_1(\sigma, a).$$

- No G-N y $f \in L^\sigma(Q_T)$ permiten $1 < p \le \dfrac{2N}{N+\sigma}$ y también $1 < p < N$...

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\dfrac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...

$$\||\nabla u|^{b_1}\|_{L^1(Q_T)} \leq c\||\nabla u|^{q}\|_{L^a(Q_T)}^{b_1 \frac{N+2}{p(N+1)-N}}, \qquad b_1 = b_1(\sigma, a).$$

  - La condición de cierre **(D)** implica $\boldsymbol{\sigma \geq \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}}$.

- No G-N y $f \in L^\sigma(Q_T)$ permiten $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+\sigma}$ y también $1 < p < N$...

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\dfrac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...

$$\big\||\nabla u|^{b_1}\big\|_{L^1(Q_T)} \leq c \big\||\nabla u|^{q}\big\|_{L^a(Q_T)}^{b_1 \frac{N+2}{p(N+1)-N}}, \qquad b_1 = b_1(\sigma, a).$$

  - La condición de cierre (D) implica $\sigma \geq \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$.
  - La condición **(U)** nos da el umbral de super linealidad $\boldsymbol{q > \dfrac{p(N+1)-N}{N+2}}$.

- No G-N y $f \in L^\sigma(Q_T)$ permiten $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+\sigma}$ y también $1 < p < N$...

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\frac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...

$$\||\nabla u|^{b_1}\|_{L^1(Q_T)} \le c\||\nabla u|^q\|_{L^a(Q_T)}^{b_1 \frac{N+2}{p(N+1)-N}}, \qquad b_1 = b_1(\sigma, a).$$

  - La condición de cierre (D) implica $\sigma \ge \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$.
  - La condición (U) nos da el umbral de super linealidad $q > \dfrac{p(N+1)-N}{N+2}$.

- No G-N y $f \in L^\sigma(Q_T)$ permiten $1 < p \le \dfrac{2N}{N+\sigma}$ y también $1 < p < N$...

$$\||\nabla u|^{b_2}\|_{L^1(Q_T)} \le c\||\nabla u|^q\|_{L^\sigma(Q_T)}^{\sigma}, \qquad b_2 = \frac{p}{2}\sigma.$$

Buscando a el umbral super lineal

- Si G-N y $f \in L^a(Q_T)$ entonces $\dfrac{2N}{N+\sigma} < p < N \Rightarrow$ echando cuentas...

$$\| |\nabla u|^{b_1} \|_{L^1(Q_T)} \leq c \| |\nabla u|^q \|_{L^a(Q_T)}^{b_1 \frac{N+2}{p(N+1)-N}}, \qquad b_1 = b_1(\sigma, a).$$

  - La condición de cierre (D) implica $\sigma \geq \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$.
  - La condición (U) nos da el umbral de super linealidad $q > \dfrac{p(N+1)-N}{N+2}$.

- No G-N y $f \in L^\sigma(Q_T)$ permiten $1 < p \leq \dfrac{2N}{N+\sigma}$ y también $1 < p < N$...

$$\| |\nabla u|^{b_2} \|_{L^1(Q_T)} \leq c \| |\nabla u|^q \|_{L^\sigma(Q_T)}^{\sigma}, \qquad b_2 = \frac{p}{2}\sigma.$$

  - La condición de cierre **(D)** implica $q \leq \dfrac{p}{2}$ que significa que estamos o bien en el caso sub lineal $q < \dfrac{p}{2}$ o en el lineal $q = \dfrac{p}{2}$.

Hipótesis sobre dados y umbral super lineal

Suponiendo $\sigma = \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$ (i.e. dado inicial óptimo $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$), sigue que

$$p > \frac{2N}{N+\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad q > \frac{p}{2}.$$

Concluyendo, el umbral super lineal es

$$q = \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\}.$$

¿Que pasa con las hipótesis sobre f cuando hay crecimiento super lineal?

Hipótesis sobre dados y umbral super lineal

Suponiendo $\sigma = \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$ (i.e. dado inicial óptimo $u_0 \in L^{\sigma}(\Omega)$), sigue que

$$p > \frac{2N}{N+\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad q > \frac{p}{2}.$$

Concluyendo, el umbral super lineal es

$$q = \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\}.$$

¿Que pasa con las hipótesis sobre f cuando hay crecimiento super lineal?

Hipótesis sobre dados y umbral super lineal

Suponiendo $\sigma = \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$ (i.e. dado inicial óptimo $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$), sigue que

$$p > \frac{2N}{N+\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad q > \frac{p}{2}.$$

Concluyendo, el umbral super lineal es

$$q = \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\}.$$

¿Que pasa con las hipótesis sobre f cuando hay crecimiento super lineal?

$$f \in L^r(0,T;L^m(\Omega))$$

Hipótesis sobre dados y umbral super lineal

Suponiendo $\sigma = \dfrac{N(q-(p-1))}{p-q}$ (i.e. dado inicial óptimo $u_0 \in L^{\sigma}(\Omega)$), sigue que

$$p > \frac{2N}{N+\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad q > \frac{p}{2}.$$

Concluyendo, el umbral super lineal es

$$q = \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\}.$$

¿Que pasa con las hipótesis sobre f cuando hay crecimiento super lineal?

$$f \in L^r(0,T;L^m(\Omega))$$

$$\text{con} \quad (r,m) \quad \text{t.q.} \quad \frac{N\sigma}{m} + \frac{N(p-2)+p\sigma}{r} \le N(p-1)+p\sigma.$$

En dibujos

Soluciones con dados iniciales $L^1(\Omega)$

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ y dados medidas están admitidos.

En dibujos

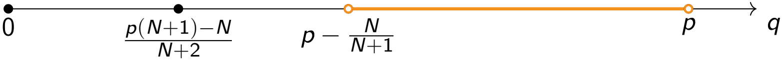
El caso $2 \leq p < N$

Soluciones con dados iniciales $L^1(\Omega)$

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ y dados medidas están admitidos.

En dibujos

El caso $2 \leq p < N$



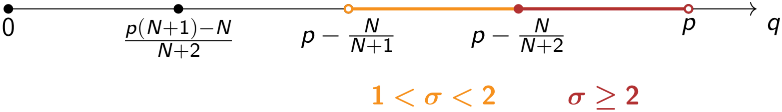
Soluciones con dados iniciales $L^{\sigma}(\Omega)$

Soluciones con dados iniciales $L^{1}(\Omega)$

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ y dados medidas están admitidos.

En dibujos

El caso $2 \leq p < N$



Soluciones con energía acotada: por lo menos $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

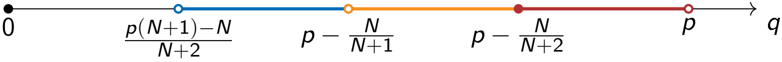
Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

Soluciones con dados iniciales $L^1(\Omega)$

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ y dados medidas están admitidos.

En dibujos

El caso $2 \leq p < N$



$\boldsymbol{\sigma < 1}$ $\boldsymbol{1 < \sigma < 2}$ $\boldsymbol{\sigma \geq 2}$

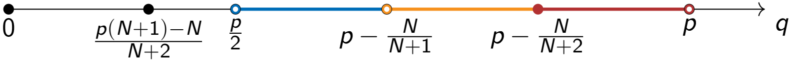
Soluciones con energía acotada: por lo menos $u_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$.

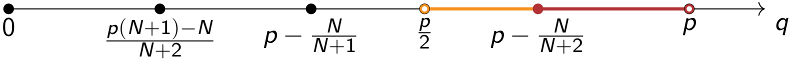
Soluciones con dados iniciales $L^1(\Omega)$

Soluciones con energía no acotada: u_0, f puede que no estén en $L^2(\Omega)$, $L^{p'}(0, T; W^{-1,p'}(\Omega))$ y dados medidas están admitidos.

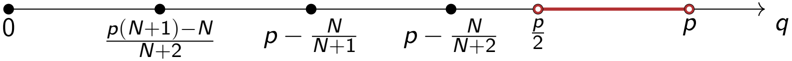
El caso $\frac{2N}{N+1} < p < 2$



El caso $\frac{2N}{N+2} < p \leq \frac{2N}{N+1}$



El caso $\frac{2N}{N+\sigma} < p \leq \frac{2N}{N+2}$



El problema y las hipótesis de estructura

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(t,x,u,\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

- $a(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\ \alpha > 0 : \quad \alpha|\xi|^p \le a(t,x,u,\xi) \cdot \xi, \tag{A1}$$

$$\exists\ \lambda > 0 : \quad |a(t,x,u,\xi)| \le \lambda[|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + h(t,x)]$$
$$\text{con} \quad h \in L^{p'}(Q_T), \tag{A2}$$

$$(a(t,x,u,\xi) - a(t,x,u,\eta)) \cdot (\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \ne \eta; \tag{A3}$$

- $H(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\ \gamma > 0 : \ |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \quad \text{con}$$

$$\max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p$$

El problema y las hipótesis de estructura

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div} a(t,x,u,\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

- $a(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \alpha > 0 : \quad \alpha|\xi|^p \le a(t,x,u,\xi)\cdot\xi, \tag{A1}$$

$$\exists\, \lambda > 0 : \quad |a(t,x,u,\xi)| \le \lambda[|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + h(t,x)] \quad \text{con} \quad h \in L^{p'}(Q_T), \tag{A2}$$

$$(a(t,x,u,\xi) - a(t,x,u,\eta))\cdot(\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \ne \eta; \tag{A3}$$

- $H(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \gamma > 0 : \ |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \quad \text{con} \quad \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p. \tag{H}$$

El problema y las hipótesis de estructura

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}\, a(t,x,u,\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & \text{en } Q_T, \\ u = 0 & \text{sobre } S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{P}$$

- $a(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \alpha > 0 : \quad \alpha|\xi|^p \leq a(t,x,u,\xi)\cdot\xi, \tag{A1}$$

$$\exists\, \lambda > 0 : \quad |a(t,x,u,\xi)| \leq \lambda[|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + h(t,x)] \quad \text{con} \quad h \in L^{p'}(Q_T), \tag{A2}$$

$$(a(t,x,u,\xi) - a(t,x,u,\eta))\cdot(\xi-\eta) > 0 \quad \forall \xi \neq \eta; \tag{A3}$$

- $H(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \gamma > 0 : \ |H(t,x,\xi)| \leq \gamma|\xi|^q + f(t,x) \quad \text{con} \quad \max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p. \tag{H}$$

El problema y las hipótesis de estructura

$$
\begin{cases}
u_t - \operatorname{div}\, a(t,x,u,\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & \text{en } Q_T, \\
u = 0 & \text{sobre } S_T, \\
u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega.
\end{cases} \tag{P}
$$

- $a(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \alpha > 0 : \quad \alpha|\xi|^p \leq a(t,x,u,\xi)\cdot\xi, \tag{A1}$$

$$\exists\, \lambda > 0 : \quad |a(t,x,u,\xi)| \leq \lambda[|u|^{p-1} + |\xi|^{p-1} + h(t,x)]$$
$$\text{con} \quad h \in L^{p'}(Q_T), \tag{A2}$$

$$(a(t,x,u,\xi) - a(t,x,u,\eta))\cdot(\xi - \eta) > 0 \quad \forall \xi \neq \eta; \tag{A3}$$

- $H(t,x,u,\xi) : (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función de Carathéodory t.q.

$$\exists\, \gamma > 0 : \ |H(t,x,\xi)| \leq \gamma|\xi|^q + f(t,x) \quad \text{con}$$
$$\max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p. \tag{H}$$

Hipótesis sobre los dados

- Si fijamos

$$u_0 \in L^{\sigma}(\Omega) \quad \text{with} \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} \qquad (\mathrm{ID}_\sigma)$$

y

$$f \in L^r(0,T;L^m(\Omega)) \qquad (\mathrm{F}_{r,m})$$

$$\text{con} \quad (m,r) \quad \text{t.q.} \quad \frac{N\sigma}{m} + \frac{N(p-2)+p\sigma}{r} \leq N(p-1)+p\sigma.$$

Hipótesis sobre los dados

- Si fijamos

$$u_0 \in L^{\sigma}(\Omega) \quad \text{with} \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} \qquad (\mathrm{ID}_\sigma)$$

y

$$f \in L^r(0,T;L^m(\Omega)) \qquad (\mathrm{F}_{r,m})$$

$$\text{con} \quad (m,r) \quad \text{t.q.} \quad \frac{N\sigma}{m} + \frac{N(p-2)+p\sigma}{r} \le N(p-1)+p\sigma.$$

- Si $\max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}$ fijamos

$$u_0 \in L^1(\Omega) \qquad (\mathrm{ID}_1)$$

y

$$f \in L^1(Q_T). \qquad (\mathrm{F}_1)$$

Hipótesis sobre los dados

- Si fijamos

$$u_0 \in L^{\sigma}(\Omega) \quad \text{with} \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} \qquad (\mathrm{ID}_\sigma)$$

y

$$f \in L^{r}(0,T;L^{m}(\Omega))$$

$$\text{con} \quad (m,r) \quad \text{t.q.} \quad \frac{N\sigma}{m} + \frac{N(p-2)+p\sigma}{r} \leq N(p-1)+p\sigma. \qquad (\mathrm{F}_{r,m})$$

- Si $\max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}$ fijamos

$$u_0 \in L^{1}(\Omega) \qquad (\mathrm{ID}_1)$$

y

$$f \in L^{1}(Q_T). \qquad (\mathrm{F}_1)$$

dados L^1

Resultados de Existencia

Soluciones de energía acotada y renormalizadas

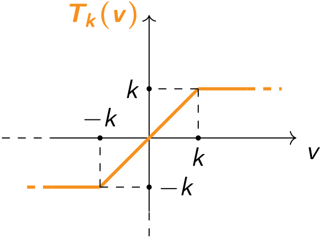
Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

$$T_k(v) = \max\{-k, \min\{k, v\}\}$$



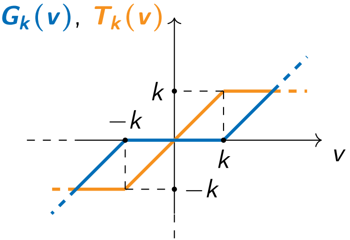
Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

$$T_k(v) = \max\{-k, \min\{k, v\}\}$$

$$G_k(v) = (|v| - k)_+ \mathrm{sign}(v)$$

$$v = T_k(v) + G_k(v)$$



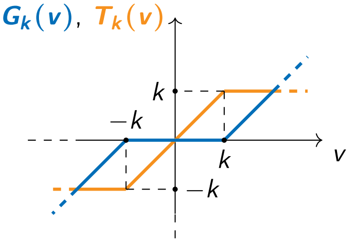
Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

$$T_k(v) = \max\{-k, \min\{k, v\}\}$$

$$G_k(v) = (|v| - k)_+ \mathrm{sign}(v)$$

$$v = T_k(v) + G_k(v)$$



Enfoque no lineal standard

Vamos a emplear métodos de aproximación (i.e. u_n), entonces necesitamos

- una cota (en alguna norma) sobre u_n;
- las convergencias c.p.p. de $u_n \to u$ y $\nabla u_n \to \nabla u$;
- la convergencia fuerte en $L^1(Q_T)$ del r.h.s..

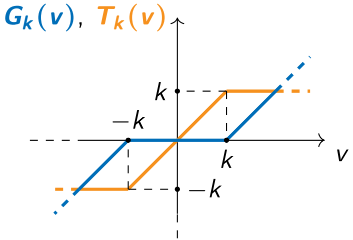
Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

$$T_k(v) = \max\{-k, \min\{k, v\}\}$$

$$G_k(v) = (|v| - k)_+ \mathrm{sign}(v)$$

$$v = T_k(v) + G_k(v)$$



Enfoque no lineal standard

Vamos a emplear métodos de aproximación (i.e. u_n), entonces necesitamos

- una cota (en alguna norma) sobre u_n;
- las convergencias c.p.p. de $u_n \to u$ y $\nabla u_n \to \nabla u$;
- la convergencia fuerte en $L^1(Q_T)$ del r.h.s..

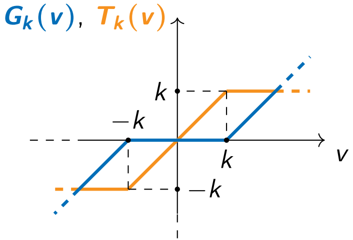
Herramientas y estrategias

Las funciones truncada & de conjunto de nivel

$$T_k(v) = \max\{-k, \min\{k, v\}\}$$

$$G_k(v) = (|v| - k)_+ \mathrm{sign}(v)$$

$$v = T_k(v) + G_k(v)$$



Enfoque no lineal standard

Vamos a emplear métodos de aproximación (i.e. u_n), entonces necesitamos

- una cota (en alguna norma) sobre u_n;
- las convergencias c.p.p. de $u_n \to u$ y $\nabla u_n \to \nabla u$;
- la convergencia fuerte en $L^1(Q_T)$ del r.h.s..

El resultado de existencia

Teorema

Supongamos las condiciones de Leray-Lions (A1)-(A2) y la de crecimiento en (H).

Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen $(F_{r,m})$, (ID_σ) si

- *Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen (F_1), (ID_1) si*

$$\max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q. $C([0,T]; L^\sigma(\Omega))$ y $(1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

- *Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q. $C([0,T]; L^1(\Omega))$.*

El resultado de existencia

Teorema

Supongamos las condiciones de Leray-Lions (A1)-(A2) y la de crecimiento en (H).

Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen $(F_{r,m})$, (ID_σ) si

.

- *Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen (F_1), (ID_1) si*

$$max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q.
$C([0,T];L^\sigma(\Omega))$ *y* $(1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

- *Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q.* $C([0,T];L^1(\Omega))$.

El resultado de existencia

Teorema

Supongamos las condiciones de Leray-Lions (A1)-(A2) y la de crecimiento en (H).

Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen $(F_{r,m})$, (ID_σ) si

.

- *Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen (F_1), (ID_1) si*

$$max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q.
$C([0,T];L^\sigma(\Omega))$ *y* $(1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}}u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

- *Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q.* $C([0,T];L^1(\Omega))$.

El resultado de existencia

Teorema

Supongamos las condiciones de Leray-Lions (A1)-(A2) y la de crecimiento en (H).

Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen $(F_{r,m})$, (ID_σ) si

.

- *Supongamos que los dados f y u_0 satisfacen (F_1), (ID_1) si*

$$max\left\{\frac{p}{2}, \frac{p(N+1)-N}{N+2}\right\} < q < p - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q. $C([0,T];L^\sigma(\Omega))$ y $(1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}}u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

- *Entonces hay por lo menos una solución renormalizada u de (P) t.q. $C([0,T];L^1(\Omega))$.*

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t}u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \operatorname{div} a(t, x, w, \nabla w) = H(t, x, \nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2} G_k(w)$ como función test, obteniendo

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t}u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \text{div } a(t, x, w, \nabla w) = H(t, x, \nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2}G_k(w)$ como función test, obteniendo

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t} u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \operatorname{div} a(t, x, w, \nabla w) = H(t, x, \nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2} G_k(w)$ como función test, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_\Omega |G_k(w(t))|^\sigma \, dx + c_1 \iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \, dx\, ds \\ + \lambda \iint_{Q_t} |G_k(w)|^{\sigma-2} G_k(w) w \, dx\, ds \le c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx\, ds \\ + c_3 \iint_{Q_t} |f| \chi_{\{|f| \le k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx\, ds \\ + c_3 \iint_{Q_t} |f| \chi_{\{|f| > k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx\, ds + \int_\Omega |G_k(u_0)|^\sigma \, dx. \end{aligned}$$

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t}u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \operatorname{div} a(t, x, w, \nabla w) = H(t, x, \nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2}G_k(w)$ como función test, obteniendo

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega |G_k(w(t))|^\sigma \, dx + c_1 \iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \, dx \, ds \\
&+ \lambda k \iint_{Q_t} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx \, ds \le c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx \, ds \\
&+ c_3 k \iint_{Q_t} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx \, ds \\
&+ c_3 \iint_{Q_t} |f| \chi_{\{|f|>k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx \, ds + \int_\Omega |G_k(u_0)|^\sigma \, dx.
\end{aligned}$$

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t} u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \operatorname{div} a(t,x,w,\nabla w) = H(t,x,\nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2} G_k(w)$ como función test, obteniendo

$$\begin{aligned}\int_\Omega |G_k(w(t))|^\sigma \,dx + c_1 \iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \,dx\,ds \\ \leq c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1} \,dx\,ds \\ + c_3 \iint_{Q_t} |f| \chi_{\{|f|>k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1} \,dx\,ds + \int_\Omega |G_k(u_0)|^\sigma \,dx.\end{aligned}$$

La cota a priori

Definimos $w = e^{-\lambda t} u$, de manera que ganamos un término mas en la ecuación

$$w_t + \lambda w - \operatorname{div} a(t, x, w, \nabla w) = H(t, x, \nabla w)$$

que nos va a permitir evitar condiciones de pequeñez sobre los dados.

Tomamos $|G_k(w)|^{\sigma-2} G_k(w)$ como función test, obteniendo

$$\int_\Omega |G_k(w(t))|^\sigma \, dx + c_1 \iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \, dx\, ds$$
$$\leq c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx\, ds$$
$$+ c_3 \iint_{Q_t} |f| \chi_{\{|f|>k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1} \, dx\, ds + \int_\Omega |G_k(u_0)|^\sigma \, dx.$$

Tratando con el r.h.s.

1. El término gradiente super lineal:

$$c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1}\, dx\, ds$$
$$\overset{\text{H.}}{\leq} \int_0^t \left(\int_\Omega |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\, dx\, ds \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_\Omega |G_k(w)|^{(\sigma+p-2)+\frac{p(q-(p-1))}{p-q}}\, dx\, ds \right)^{\frac{p-q}{p}}.$$

2. El término que involucra $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$:

Tratando con el r.h.s.

1. El término gradiente super lineal:

$$c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1}\,dx\,ds$$

$$\overset{\text{H.+S.}}{\leq} c_S \int_0^t \left(\int_\Omega |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\,dx\,ds \right) \left(\int_\Omega |G_k(w)|^{\frac{N(q-(p-1))}{p-q}}\,dx\,ds \right)^{\frac{p-q}{N}}.$$

2. El término que involucra $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$:

Tratando con el r.h.s.

1. El término gradiente super lineal:

$$c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1}\, dx\, dt$$

$$\overset{\text{H.+S.}}{\leq} \boldsymbol{c_S c_2 \| G_k(w) \|^{q-(p-1)}_{L^\infty(0,t;L^\sigma(\Omega))}} \left(\iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\, dx\, ds \right).$$

2. El término que involucra $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$:

Tratando con el r.h.s.

1. El término gradiente super lineal:

$$c_2 \iint_{Q_t} |\nabla G_k(w)|^q |G_k(w)|^{\sigma-1}\, dx\, dt$$

$$\overset{\text{H.+S.}}{\leq} \boldsymbol{c_S c_2 \|G_k(w)\|^{q-(p-1)}_{L^\infty(0,t;L^\sigma(\Omega))}} \left(\iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\, dx\, ds \right).$$

2. El término que involucra $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$:

$$c_3 \iint_{Q_t} |f|\chi_{\{|f|>k\}} |G_k(w)|^{\sigma-1}\, dx\, ds$$

$$\overset{\text{G-N+Y.}}{\leq} \boldsymbol{c_4 \|G_k(w)\|^{a}_{L^\infty(0,t;L^\sigma(\Omega))}} \left(\iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\, dx\, ds \right)$$

$$+ c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))}.$$

Conclusion

3. Fijamos δ_0 t.q. $2\max\left\{ c_4\delta_0^{\frac{a}{\sigma}}, c_S c_2 \delta_0^{\frac{q-(p-1)}{\sigma}} \right\} = \frac{c_1}{2}$ y k_0 que satisface

$$\|G_k(u_0)\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} + c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} < \delta_0 \qquad \forall k \geq k_0$$

y también

$$T^* := \sup\{\tau \in [0,T] : \|G_k(w(t))\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} \leq \delta_0 \ \forall t \leq \tau\} > 0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} |G_k(w(t))|^{\sigma}\, dx + \frac{c_1}{2} \iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \, dx\, ds$$

$$\leq c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} + \int_{\Omega} |G_k(u_0)|^{\sigma}\, dx \quad \forall t \leq T^*.$$

4. Un argumento de contradicción nos permite extender la desigualdad arriba en todo el intervalo de tiempo $[0,T]$ y, por fin, la cota a priori de toda la función u se recupera a través de estimaciones mas sencillas sobre la $T_{k_0}(u)$.

Conclusion

3. Fijamos δ_0 t.q. $2\max\left\{c_4\delta_0^{\frac{a}{\sigma}}, c_S c_2 \delta_0^{\frac{q-(p-1)}{\sigma}}\right\} = \frac{c_1}{2}$ y k_0 que satisface

$$\|G_k(u_0)\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} + c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} < \delta_0 \qquad \forall k \geq k_0$$

y también

$$T^* := \sup\{\tau \in [0,T] : \|G_k(w(t))\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} \leq \delta_0 \ \forall t \leq \tau\} > 0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} |G_k(w(t))|^{\sigma}\,dx + \frac{c_1}{2}\iint_{Q_t} |\nabla[G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p\,dx\,ds$$
$$\leq c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} + \int_{\Omega}|G_k(u_0)|^{\sigma}\,dx \quad \forall t \leq T^*.$$

4. Un argumento de contradicción nos permite extender la desigualdad arriba en todo el intervalo de tiempo $[0,T]$ y, por fin, la cota a priori de toda la función u se recupera a través de estimaciones mas sencillas sobre la $T_{k_0}(u)$.

Conclusion

3. Fijamos δ_0 t.q. $2\max\left\{c_4\delta_0^{\frac{a}{\sigma}}, c_S c_2 \delta_0^{\frac{q-(p-1)}{\sigma}}\right\} = \frac{c_1}{2}$ y k_0 que satisface

$$\|G_k(u_0)\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} + c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} < \delta_0 \qquad \forall k \geq k_0$$

y también

$$T^* := \sup\{\tau \in [0,T] : \|G_k(w(t))\|^{\sigma}_{L^{\sigma}(\Omega)} \leq \delta_0 \ \forall t \leq \tau\} > 0 \quad \forall k \geq k_0.$$

Entonces

$$\int_{\Omega} |G_k(w(t))|^{\sigma}\, dx + \frac{c_1}{2}\iint_{Q_t} |\nabla [G_k(w)]^{\frac{\sigma+p-2}{p}}|^p \, dx\, ds$$
$$\leq c_5 \||f|\chi_{\{|f|>k\}}\|^{b}_{L^r(0,T;L^m(\Omega))} + \int_{\Omega} |G_k(u_0)|^{\sigma}\, dx \quad \forall t \leq T^*.$$

4. Un argumento de contradicción nos permite extender la desigualdad arriba en todo el intervalo de tiempo $[0,T]$ y, por fin, la cota a priori de toda la función u se recupera a través de estimaciones mas sencillas sobre la $T_{k_0}(u)$.

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^{\sigma}(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo $|G_k(u)|^{\sigma-2}G_k(u)$;
- es decir $M = M(G_k(u_0), |\Omega|, q, p, \sigma)$ además que de los parámetros del problema;
- la es

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^{\sigma}(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo $|G_k(u)|^{\sigma-2}G_k(u)$;
- la constante en la cota a priori depende de los dados a través de una relación de equi-integrabilidad, es decir $M = M(G_k(u_0), |f|\chi_{\{|f|>k\}})$ ademas que de los parámetros del problema;
- la clase de regularidad es

$$\left\{ u \text{ resolviendo (P):} \quad (1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \right\}. \qquad \text{(CR)}$$

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo$|G_k(u)|^{\sigma-2}G_k(u)$;
- la constante en la cota a priori depende de los dados a través de una relación de equi-integrabilidad, es decir $M = M(G_k(u_0), |f|\chi_{\{|f|>k\}})$ ademas que de los parámetros del problema;
- la clase de regularidad es

$$\left\{ u \text{ resolviendo (P):} \quad (1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \right\}. \qquad \text{(CR)}$$

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo $|G_k(u)|^{\sigma-2}G_k(u)$;
- la constante en la cota a priori depende de los dados a través de una relación de equi-integrabilidad, es decir $M = M(G_k(u_0), |f|\chi_{\{|f|>k\}})$ ademas que de los parámetros del problema;
- la clase de regularidad es

$$\left\{u \text{ resolviendo (P)}: \quad (1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\right\}. \qquad \text{(CR)}$$

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^\sigma(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo$|G_k(u)|^{\sigma-2}G_k(u)$;
- la constante en la cota a priori depende de los dados a través de una relación de equi-integrabilidad, es decir $M = M(G_k(u_0), |f|\chi_{\{|f|>k\}})$ ademas que de los parámetros del problema;
- la clase de regularidad es

$$\left\{ u \text{ resolviendo (P)}: \quad (1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \right\}. \qquad \text{(CR)}$$

Resumiendo...

El hecho de que haya un término super lineal en el the r.h.s. implica que

- tenemos que eligir u_0 en un espacio de Lebesgue adecuado $u_0 \in L^{\sigma}(\Omega)$, $\sigma = \sigma(q)$ de manera que u exista;
- necesitamos funciones test de tipo potencia que se concentren en el conjunto donde u es grande, por ejemplo $|G_k(u)|^{\sigma-2} G_k(u)$;
- la constante en la cota a priori depende de los dados a través de una relación de equi-integrabilidad, es decir $M = M(G_k(u_0), |f|\chi_{\{|f|>k\}})$ ademas que de los parámetros del problema;
- la clase de regularidad es

$$\left\{ u \text{ resolviendo (P):} \quad (1+|u|)^{\frac{\sigma-2}{p}} u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \right\}. \tag{CR}$$

Características parecidas han sidos observadas previamente en

✎ **N. Grenon, F. Murat & A. Porretta, (2014).**

en el caso estacionario.

El caso $q = p - \frac{N}{N+1}$

$$q = p - \frac{N}{N+1} \Rightarrow \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} = 1.$$

Sin embargo, igual que en el caso estacionario [GreMuPo], necesitamos mas que dados L^1.

- Consideramos $u_0 \in L^{1+\omega}(\Omega)$, $f \in L^{1+\omega}(Q_T)$. De esa manera, podemos razonar como en el caso $q > \left\{\frac{p}{2}, p - \frac{N}{N+1}\right\}$. La única diferencia es que, ahora, la constante M en la cota a priori ya no depende de $G_k(u_0)$, $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$ sino de $\|u_0\|_{L^\sigma(\Omega)}$, $\|f\|_{L^r(0,T;L^m(\Omega))}$.
- Podemos considerar dados en espacios de Orlicz in $L^1(log\ L)^\beta$, $\beta > 1$.

El caso $q = p - \frac{N}{N+1}$

$$q = p - \frac{N}{N+1} \Rightarrow \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} = 1.$$

Sin embargo, igual que en el caso estacionario [GreMuPo], necesitamos mas que dados L^1.

Dos enfoques

- Consideramos $u_0 \in L^{1+\omega}(\Omega)$, $f \in L^{1+\omega}(Q_T)$. De esa manera, podemos razonar como en el caso $q > \left\{\frac{p}{2}, p - \frac{N}{N+1}\right\}$.
  La única diferencia es que, ahora, la constante M en la cota a priori ya no depende de $G_k(u_0)$, $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$ sino de $\|u_0\|_{L^\sigma(\Omega)}$, $\|f\|_{L^r(0,T;L^m(\Omega))}$.
- Podemos considerar dados en espacios de Orlicz in $L^1(log\ L)^\beta$, $\beta > 1$.

El caso $q = p - \frac{N}{N+1}$

$$q = p - \frac{N}{N+1} \Rightarrow \quad \sigma = \frac{N(q-(p-1))}{p-q} = 1.$$

Sin embargo, igual que en el caso estacionario [GreMuPo], necesitamos mas que dados L^1.

Dos enfoques

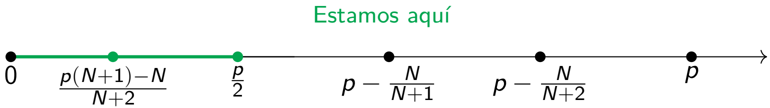
- Consideramos $u_0 \in L^{1+\omega}(\Omega)$, $f \in L^{1+\omega}(Q_T)$. De esa manera, podemos razonar como en el caso $q > \left\{\frac{p}{2}, p - \frac{N}{N+1}\right\}$. La única diferencia es que, ahora, la constante M en la cota a priori ya no depende de $G_k(u_0)$, $|f|\chi_{\{|f|>k\}}$ sino de $\|u_0\|_{L^\sigma(\Omega)}$, $\|f\|_{L^r(0,T;L^m(\Omega))}$.
- Podemos considerar dados en espacios de Orlicz in $L^1(log\ L)^\beta$, $\beta > 1$.

El caso sub lineal con $1 < p < 2$

El umbral q cambia en $\boldsymbol{q = \frac{p}{2}}$ y ahora no necesitamos emplear una función test como la de tipo $G_k(\cdot)$ y eso por lo del el comportamiento sub lineal de el r.h.s.. En particular, hemos mejorado el umbral q considerado en donde los autores tuvieron en cuenta problemas sub lineales con

$$q = \frac{p(N+1)-N}{N+2} \left(< \frac{p}{2} \right).$$

El caso sub lineal con $1 < p < 2$

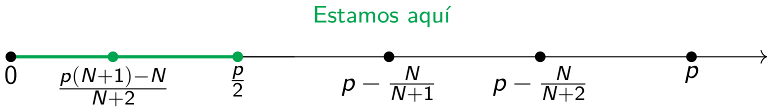


El umbral q cambia en $\boldsymbol{q = \frac{p}{2}}$ y ahora no necesitamos emplear una función test como la de tipo $G_k(\cdot)$ y eso por lo del el comportamiento sub lineal de el r.h.s..

En particular, hemos mejorado el umbral q considerado en donde los autores tuvieron en cuenta problemas sub lineales con

$$q = \frac{p(N+1)-N}{N+2} \left(< \frac{p}{2}\right).$$

El caso sub lineal con $1 < p < 2$



El umbral q cambia en $\boldsymbol{q = \frac{p}{2}}$ y ahora no necesitamos emplear una función test como la de tipo $G_k(\cdot)$ y eso por lo del el comportamiento sub lineal de el r.h.s.. En particular, hemos mejorado el umbral q considerado en

✎ **R. Di Nardo, F. Feo & O. Guibé, (2011).**

✎ **M. M. Porzio, (1999).**

donde los autores tuvieron en cuenta problemas sub lineales con

$$q = \frac{p(N+1)-N}{N+2} \left(< \frac{p}{2}\right).$$

Efectos regularizante,
Decaimiento en tiempo corto y largo cuando $f = 0$

Trabajo junto con A. Porretta

¿Que podemos esperar?

Objectivo: Probar efectos regularizante y decaimiento en tiempo largo para (P) cuando $f = 0$, i.e.

$$\exists\, \gamma > 0: \quad |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q, \quad q \text{ super lineal.}$$

¡NO ES TAN OBVIO!

¿Que podemos esperar?

Objectivo: Probar efectos regularizante y decaimiento en tiempo largo para (P) cuando $f = 0$, i.e.

$$\exists\, \gamma > 0 : \quad |H(t,x,\xi)| \leq \gamma |\xi|^q, \quad q \text{ super lineal.}$$

¡NO ES TAN OBVIO!

De hecho

✎ M. M. Porzio, (2011).

$$u_t - \operatorname{div} a(t,x,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in } Q_T \quad \text{with} \quad u_0 \in L^\sigma(\Omega),\ \sigma \geq 1$$

y

✎ A. Porretta, (2001).

$$u_t - \operatorname{div} a(t,x,u,\nabla u) = |u|^q \text{ in } Q_T \quad \text{with} \quad q > 1,\ u_0 \in L^\sigma(\Omega),\ \sigma \geq \bar\sigma(q)$$

satisfacen

$$\|u(t)\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq e^{\pm Ct} \|u_0\|_{L^\sigma(\Omega)} \ (\sigma \geq 2) \quad \text{and} \quad \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq e^{\pm Ct} \frac{\|u_0\|_{L^\sigma(\Omega)}}{t^{\frac{N}{2\sigma}}}.$$

Hay decaimiento...¿o explosión?

Una condición de pequeñez

Hay un valor $\delta_0 = \delta_0(N, q)$ t.q. para cada $k > 0$ y $\delta < \delta_0$ que satisfacen

$$\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall\, k > 0$$

entonces

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall t \in [0, T],\ k > 0.$$

La contracción en $L^\infty(\Omega)$

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $k = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{c.p.p. } t \in (0, T).$$

Hay decaimiento...¿o explosión?

Una condición de pequeñez

Hay un valor $\delta_0 = \delta_0(N, q)$ t.q. para cada $k > 0$ y $\delta < \delta_0$ que satisfacen

$$\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall\, k > 0$$

entonces

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall t \in [0, T], \; k > 0.$$

La contracción en $L^\infty(\Omega)$

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $k = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{c.p.p. } t \in (0, T).$$

Hay decaimiento...¿o explosión?

Una condición de pequeñez

Hay un valor $\delta_0 = \delta_0(N, q)$ t.q. para cada $k > 0$ y $\delta < \delta_0$ que satisfacen

$$\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall\, k > 0$$

entonces

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \quad \forall t \in [0, T],\ k > 0.$$

La contracción en $L^\infty(\Omega)$

Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$ y $k = \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$, entonces

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{c.p.p. } t \in (0, T).$$

Regularidad $L^\sigma - L^\sigma$

Jugando con la pequeñez de $\|G_k u(t)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta$ para k bastante grande y para cada $0 \leq t \leq T$, logramos probar que la norma $L^\sigma(\Omega)$ de la cola

- converge a zero con velocidad polinomial si $2 < p < N$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \left(\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{-(p-2)} + ct \right)^{-\frac{1}{p-2}} \quad \forall t \geq 0;$$

- converge a zero con velocidad exponencial si $p = 2$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq e^{-ct} \|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} \quad \forall t \geq 0;$$

- se extingue en tiempo finido si $1 < p < 2$

$$G_k(u(t)) = 0 \qquad \forall t \geq \overline{T};$$

Regularidad $L^\sigma - L^\sigma$

Jugando con la pequeñez de $\|G_k u(t)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta$ para k bastante grande y para cada $0 \leq t \leq T$, logramos probar que la norma $L^\sigma(\Omega)$ de la cola

- converge a zero con velocidad polinomial si $2 < p < N$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \left(\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{-(p-2)} + ct \right)^{-\frac{1}{p-2}} \quad \forall t \geq 0;$$

- converge a zero con velocidad exponencial si $p = 2$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq e^{-ct} \|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} \quad \forall t \geq 0;$$

- se extingue en tiempo finido si $1 < p < 2$

$$G_k(u(t)) = 0 \qquad \forall t \geq \overline{T};$$

Regularidad $L^\sigma - L^\sigma$

Jugando con la pequeñez de $\|G_k u(t)\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta$ para k bastante grande y para cada $0 \le t \le T$, logramos probar que la norma $L^\sigma(\Omega)$ de la cola

- converge a zero con velocidad polinomial si $2 < p < N$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \le \left(\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{-(p-2)} + ct\right)^{-\frac{1}{p-2}} \quad \forall t \ge 0;$$

- converge a zero con velocidad exponencial si $p = 2$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \le e^{-ct}\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} \quad \forall t \ge 0;$$

- se extingue en tiempo finido si $1 < p < 2$

$$G_k(u(t)) = 0 \qquad \forall t \ge \overline{T};$$

y también que...

$L^\sigma - L^\infty$: el efecto regularizante

...la cola converge a zero en norma $L^\infty(\Omega)$

- con velocidad polinomial si $2 < p < N$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{\frac{p\sigma}{N(p-2)+p\sigma}} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \le ct^{-\frac{1}{p-2}} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

- con velocidades polinomial y exponencial $p = 2$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \le ce^{-\lambda_1 t} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

siempre para $k \gg 1$.

$L^\sigma - L^\infty$: el efecto regularizante

...la cola converge a zero en norma $L^\infty(\Omega)$

- con velocidad polinomial si $2 < p < N$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{\frac{p\sigma}{N(p-2)+p\sigma}} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ct^{-\frac{1}{p-2}} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

- con velocidades polinomial y exponencial $p = 2$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ce^{-\lambda_1 t} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

siempre para $k \gg 1$.

$L^\sigma - L^\infty$: el efecto regularizante

...la cola converge a zero en norma $L^\infty(\Omega)$

- con velocidad polinomial si $2 < p < N$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{\frac{p\sigma}{N(p-2)+p\sigma}} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ct^{-\frac{1}{p-2}} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

- con velocidades polinomial y exponencial $p = 2$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ce^{-\lambda_1 t} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

siempre para $k \gg 1$.

⇨ **La cola $G_k(u)$ decae como si fuera un problema coercivo!** ⇦

$L^\sigma - L^\infty$: el efecto regularizante

...la cola converge a zero en norma $L^\infty(\Omega)$

- con velocidad polinomial si $2 < p < N$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)}^{\frac{p\sigma}{N(p-2)+p\sigma}} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ct^{-\frac{1}{p-2}} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

- con velocidades polinomial y exponencial $p = 2$:

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c\|G_k(u_0)\|_{L^\sigma(\Omega)} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$
$$\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ce^{-\lambda_1 t} \quad \text{para} \quad t \gg 1;$$

siempre para $k \gg 1$.

⇨ **La cola $G_k(u)$ decae como si fuera un problema coercivo!** ⇦

En particular $\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ct^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}}$ en tiempo corto.

Punto de inflexión

Combinando el decaimiento de $\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)}$ con la condición de pequeñez $\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \delta_0$ y con la contracción $\|u(t+\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$, logramos probar que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{por} \quad t \to \infty.$$

Punto de inflexión

Combinando el decaimiento de $\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)}$ con la condición de pequeñez $\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \delta_0$ y con la contracción $\|u(t+\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$, logramos probar que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{por} \quad t \to \infty.$$

$$\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \xrightarrow{\text{lleva a}} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \omega$$

si $k \gg 1$ ... si $t \gg 1$

Punto de inflexión

Combinando el decaimiento de $\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)}$ con la condición de pequeñez $\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \delta_0$ y con la contracción $\|u(t+\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$, logramos probar que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{por} \quad t \to \infty.$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{c}\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \\ \text{si } k \gg 1\end{array} \arrow[r, bend left, "\text{lleva a}"] & \begin{array}{c}\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \omega \\ \text{si } t \gg 1\end{array} \arrow[l, bend left, "\text{en lugar de}"]
\end{tikzcd}$$

Punto de inflexión

Combinando el decaimiento de $\|G_k(u(t))\|_{L^\infty(\Omega)}$ con la condición de pequeñez $\|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} \leq \delta_0$ y con la contracción $\|u(t+\tau)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u(\tau)\|_{L^\infty(\Omega)}$, logramos probar que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0 \quad \text{por} \quad t \to \infty.$$

$$\begin{tikzcd} \begin{array}{c} \|G_k(u(t))\|_{L^\sigma(\Omega)} < \delta \\ \text{si } k \gg 1 \end{array} \arrow[r, bend left, "\text{lleva a}"] & \begin{array}{c} \|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} < \omega \\ \text{si } t \gg 1 \end{array} \arrow[l, bend left, "\text{en lugar de}"] \end{tikzcd}$$

Al fin y al cabo...

...el problema (P) se porta como si fuera *coercivo* para tiempos largos.

Desde la cola hasta la solución

Teorema (M. M. & A. Porretta)

Supongamos que (A), (H) con $f = 0$, o (ID_σ), $(F_{r,m})$ y (RC) o (ID_1), (F_1). Entonces, para τ bastante grande, las soluciones de (P)

- *decaen con velocidad polinomial si $2 < p < N$:*

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{u_0} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{\tau,u_0} t^{-\frac{1}{p-2}} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *decae con velocidades polinomial y exponencial si $p = 2$:*

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{u_0} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{\tau,u_0} e^{-\lambda_1 t} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *se extingue en tiempo finito si $1 < p < 2$, i.e.*

$$\exists\, \overline{T}: \quad u(t) = 0 \qquad \forall t \geq \overline{T}.$$

Desde la cola hasta la solución

Teorema (M. M. & A. Porretta)

Supongamos que (A), (H) *con* $f = 0$, *o* (ID_σ), $(F_{r,m})$ *y* (RC) *o* (ID_1), (F_1). *Entonces, para* τ *bastante grande, las soluciones de* (P)

- *decaen con velocidad polinomial si* $2 < p < N$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{u_0} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{\tau,u_0} t^{-\frac{1}{p-2}} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *decae con velocidades polinomial y exponencial si* $p = 2$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{u_0} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{\tau,u_0} e^{-\lambda_1 t} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *se extingue en tiempo finito si* $1 < p < 2$, *i.e.*

$$\exists\, \overline{T} : \quad u(t) = 0 \qquad \forall t \ge \overline{T}.$$

Desde la cola hasta la solución

Teorema (M. M. & A. Porretta)

Supongamos que (A), (H) *con* $f = 0$, *o* (ID_σ), $(F_{r,m})$ *y* (RC) *o* (ID_1), (F_1). *Entonces, para* τ *bastante grande, las soluciones de (P)*

- *decaen con velocidad polinomial si* $2 < p < N$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{u_0} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{\tau,u_0} t^{-\frac{1}{p-2}} \quad \text{para} \quad t \gg \tau;$$

- *decae con velocidades polinomial y exponencial si* $p = 2$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{u_0} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad \text{para} \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_{\tau,u_0} e^{-\lambda_1 t} \quad \text{para} \quad t \gg \tau;$$

- *se extingue en tiempo finito si* $1 < p < 2$, *i.e.*

$$\exists\, \overline{T}: \quad u(t) = 0 \qquad \forall t \geq \overline{T}.$$

Desde la cola hasta la solución

Teorema (M. M. & A. Porretta)

Supongamos que (A), (H) *con* $f = 0$, *o* (ID_σ), $(F_{r,m})$ *y* (RC) *o* (ID_1), (F_1). *Entonces, para* τ *bastante grande, las soluciones de* (P)

- *decaen con velocidad polinomial si* $2 < p < N$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{u_0} t^{-\frac{N}{N(p-2)+p\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{\tau,u_0} t^{-\frac{1}{p-2}} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *decae con velocidades polinomial y exponencial si* $p = 2$:

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{u_0} t^{-\frac{N}{2\sigma}} \quad para \quad t \ll 1,$$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le c_{\tau,u_0} e^{-\lambda_1 t} \quad para \quad t \gg \tau;$$

- *se extingue en tiempo finito si* $1 < p < 2$, *i.e.*

$$\exists\ \overline{T} : \quad u(t) = 0 \qquad \forall t \ge \overline{T}.$$

Resultados de Comparación y Unicidad

Dos enfoques diferentes

Trabajo junto con T. Leonori

Problemas de las técnicas de comparación

Objectivo: Si u, v son sub/super soluciones tales que $u \leq v$ sobre S_T, $u(0) \leq v(0)$ con $u(0)$, $v(0) \in L^{\nu}(\Omega)$ y $\nu = \max\{1, \sigma\}$, entonces $u \leq v$ en Q_T.

Pb. 1: El marco no acotado.

Tenemos que escribir las ecuaciónes principales en u en términos de su parte acotada u_k mas un resto R_k cuantificado.

Pb. 2: El r.h.s..

Tenemos que poner hipótesis adecuadas sobre la diferencia $H(t,x,\nabla u) - H(t,x,\nabla v)$ ademas que $|H(t,x,\xi)| \leq |\xi|^q + f$, q super lineal.

Pb. 3: $1 < p < N$ y operadores generales en forma de divergencia.

Tenemos que distinguir entre el caso $1 < p \leq 2$ y $2 \leq p < N$, tanto en problemas como en estrategias.

Problemas de las técnicas de comparación

Objectivo: Si u, v son sub/super soluciones tales que $u \leq v$ sobre S_T, $u(0) \leq v(0)$ con $u(0)$, $v(0) \in L^{\nu}(\Omega)$ y $\nu = \max\{1, \sigma\}$, entonces $u \leq v$ en Q_T.

Pb. 1: El marco no acotado.

Tenemos que escribir las ecuaciónes principales en u en términos de su parte acotada u_k mas un resto R_k cuantificado.

Pb. 2: El r.h.s..

Tenemos que poner hipótesis adecuadas sobre la diferencia $H(t, x, \nabla u) - H(t, x, \nabla v)$ ademas que $|H(t, x, \xi)| \leq |\xi|^q + f$, q super lineal.

Pb. 3: $1 < p < N$ y operadores generales en forma de divergencia.

Tenemos que distinguir entre el caso $1 < p \leq 2$ y $2 \leq p < N$, tanto en problemas como en estrategias.

Problemas de las técnicas de comparación

Objectivo: Si u, v son sub/super soluciones tales que $u \leq v$ sobre S_T, $u(0) \leq v(0)$ con $u(0)$, $v(0) \in L^{\nu}(\Omega)$ y $\nu = \max\{1, \sigma\}$, entonces $u \leq v$ en Q_T.

Pb. 1: El marco no acotado.

Tenemos que escribir las ecuaciónes principales en u en términos de su parte acotada u_k mas un resto R_k cuantificado.

Pb. 2: El r.h.s..

Tenemos que poner hipótesis adecuadas sobre la diferencia $H(t,x,\nabla u) - H(t,x,\nabla v)$ ademas que $|H(t,x,\xi)| \leq |\xi|^q + f$, q super lineal.

✎ **G. Barles & A. Porretta, (2006).**

Pb. 3: $1 < p < N$ y operadores generales en forma de divergencia.

Tenemos que distinguir entre el caso $1 < p \leq 2$ y $2 \leq p < N$, tanto en problemas como en estrategias.

Problemas de las técnicas de comparación

Objectivo: Si u, v son sub/super soluciones tales que $u \leq v$ sobre S_T, $u(0) \leq v(0)$ con $u(0)$, $v(0) \in L^{\nu}(\Omega)$ y $\nu = \max\{1, \sigma\}$, entonces $u \leq v$ en Q_T.

Pb. 1: El marco no acotado.

Tenemos que escribir las ecuaciónes principales en u en términos de su parte acotada u_k mas un resto R_k cuantificado.

Pb. 2: El r.h.s..

Tenemos que poner hipótesis adecuadas sobre la diferencia $H(t, x, \nabla u) - H(t, x, \nabla v)$ ademas que $|H(t, x, \xi)| \leq |\xi|^q + f$, q super lineal.

✎ **G. Barles & A. Porretta, (2006).**

Pb. 3: $1 < p < N$ y operadores generales en forma de divergencia.

Tenemos que distinguir entre el caso $1 < p \leq 2$ y $2 \leq p < N$, tanto en problemas como en estrategias.

✎ **A. Porretta, (2008).**

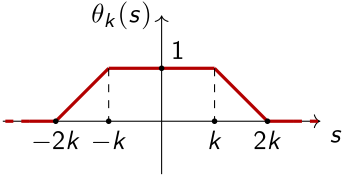
Solución 1: el marco no acotado

Solución 1: Definimos la versión regularizada de $T_k(\cdot)$ como

$$u_k = \int_0^u (\theta_k(s))^{\frac{1}{p-1}}\, ds$$

donde

$$\theta_k(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq k, \\ \dfrac{2k-|s|}{k} & k < |s| \leq 2k, \\ 0 & |s| > 2k. \end{cases}$$



Entonces

$$u_t - \operatorname{div}\, a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u)$$

se vuelve en

$$(u_k)_t - \operatorname{div}\, a(t,x,\nabla u_k) = H(t,x,\nabla u_k) + R_k.$$

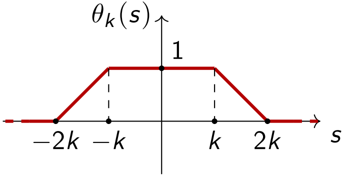
Solución 1: el marco no acotado

Solución 1: Definimos la versión regularizada de $T_k(\cdot)$ como

$$u_k = \int_0^u (\theta_k(s))^{\frac{1}{p-1}}\, ds$$

donde

$$\theta_k(s) = \begin{cases} 1 & |s| \leq k, \\ \dfrac{2k-|s|}{k} & k < |s| \leq 2k, \\ 0 & |s| > 2k. \end{cases}$$



Entonces

$$u_t - \text{div } a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u)$$

se vuelve en

$$(u_k)_t - \text{div } a(t,x,\nabla u_k) = H(t,x,\nabla u_k) + R_k.$$

Soluciones 2 & 3: el r.h.s. y la ecuación principal

$$\exists\, \gamma \text{ t.q. } |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \tag{H}$$

La estrategia de linealización ($p=2$)

$$u_t - \operatorname{div} a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u);$$

$$\exists\, \bar\gamma > 0: \quad |H(t,x,\xi) - H(t,x,\eta)| \le \bar\gamma|\xi-\eta|\left[g(t,x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right]$$
$$\text{con} \quad \mathbf{1 \le q \le 2 - \frac{N}{N+2}}. \tag{ℓH}$$

El argumento de convexidad ($p=2$)

$$u_t - \operatorname{div}\,(A(t,x)\nabla u) = H_1(t,x,\nabla u) + H_2(t,x,\nabla u);$$

$$H_1\left(t,x,\varepsilon\xi + (1-\varepsilon)\eta\right) \le \varepsilon H_1(t,x,\xi) + (1-\varepsilon)H_1(t,x,\eta),$$
$$H_1(t,x,\xi) \quad \text{como en} \quad (H); \tag{cH1}$$

$$\exists\, L > 0: \quad |H_2(t,x,\xi) - H_2(t,x,\eta)| \le L|\xi-\eta|,$$
$$H_2(t,x,(1-\varepsilon)\xi) - (1-\varepsilon)H_2(t,x,\xi) \le 0 \tag{cH2}$$
$$\text{con} \quad \mathbf{1 < q < 2}.$$

Soluciones 2 & 3: el r.h.s. y la ecuación principal

$$\exists\, \gamma \text{ t.q. } |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \tag{H}$$

La estrategia de linealización ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div} a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u);$$

$$\exists\, \bar\gamma > 0 : \quad |H(t,x,\xi) - H(t,x,\eta)| \le \bar\gamma|\xi-\eta|\left[g(t,x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right]$$

$$\text{con} \quad 1 \le q \le 2 - \frac{N}{N+2}. \tag{ℓH}$$

El argumento de convexidad ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div}\,(A(t,x)\nabla u) = H_1(t,x,\nabla u) + H_2(t,x,\nabla u);$$

$$H_1\,(t,x,\varepsilon\xi + (1-\varepsilon)\eta) \le \varepsilon H_1(t,x,\xi) + (1-\varepsilon)H_1(t,x,\eta),$$

$$H_1(t,x,\xi) \quad \text{como en} \quad (H); \tag{cH1}$$

$$\exists\, L > 0 : \quad |H_2(t,x,\xi) - H_2(t,x,\eta)| \le L|\xi-\eta|,$$

$$H_2(t,x,(1-\varepsilon)\xi) - (1-\varepsilon)H_2(t,x,\xi) \le 0 \tag{cH2}$$

$$\text{con} \quad 1 < q < 2.$$

Soluciones 2 & 3: el r.h.s. y la ecuación principal

$$\exists\ \gamma \text{ t.q. } \ |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \tag{H}$$

La estrategia de linealización ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div}\ a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u);$$

$$\exists\ \bar\gamma > 0 : \quad |H(t,x,\xi) - H(t,x,\eta)| \le \bar\gamma|\xi-\eta|\left[g(t,x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1}\right] \quad \text{con} \quad \mathbf{1 \le q \le 2 - \frac{N}{N+2}}. \tag{ℓH}$$

El argumento de convexidad ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div}\ (A(t,x)\nabla u) = H_1(t,x,\nabla u) + H_2(t,x,\nabla u);$$

$$H_1\left(t,x,\varepsilon\xi + (1-\varepsilon)\eta\right) \le \varepsilon H_1(t,x,\xi) + (1-\varepsilon)H_1(t,x,\eta), \quad H_1(t,x,\xi) \quad \text{como en} \quad (H); \tag{cH1}$$

$$\exists\ L > 0 : \quad |H_2(t,x,\xi) - H_2(t,x,\eta)| \le L|\xi-\eta|, \quad H_2(t,x,(1-\varepsilon)\xi) - (1-\varepsilon)H_2(t,x,\xi) \le 0 \tag{cH2}$$

$$\text{con} \quad \mathbf{1 < q < 2}.$$

Soluciones 2 & 3: el r.h.s. y la ecuación principal

$$\exists\, \gamma \text{ t.q. } \quad |H(t,x,\xi)| \le \gamma|\xi|^q + f(t,x) \tag{H}$$

La estrategia de linealización ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div}\, a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u);$$

$$\exists\, \bar\gamma > 0 : \quad |H(t,x,\xi) - H(t,x,\eta)| \le \bar\gamma|\xi - \eta| \left[g(t,x) + |\xi|^{q-1} + |\eta|^{q-1} \right]$$
$$\text{con} \quad \mathbf{1 \le q \le 2 - \frac{N}{N+2}}. \tag{ℓH}$$

El argumento de convexidad ($p = 2$)

$$u_t - \operatorname{div}\,(A(t,x)\nabla u) = H_1(t,x,\nabla u) + H_2(t,x,\nabla u);$$

$$H_1\,(t,x,\varepsilon\xi + (1-\varepsilon)\eta) \le \varepsilon H_1(t,x,\xi) + (1-\varepsilon)H_1(t,x,\eta),$$
$$H_1(t,x,\xi) \quad \text{como en} \quad (H); \tag{cH1}$$

$$\exists\, L > 0 : \quad |H_2(t,x,\xi) - H_2(t,x,\eta)| \le L|\xi - \eta|,$$
$$H_2(t,x,(1-\varepsilon)\xi) - (1-\varepsilon)H_2(t,x,\xi) \le 0 \tag{cH2}$$

$$\text{con} \quad \mathbf{1 < q < 2}.$$

La estrategia de linealización ($p = 2$)

Teorema (T. Leonori & M. M.)

Supongamos que u/v sean sub/super soluciones de

$$\begin{cases} u_t - div\, a(t,x,\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & in\ Q_T, \\ u = 0 & on\ S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \end{cases}$$

tales que $u \le v$ sobre S_T, $u(0) \le v(0)$ con $u(0)$, $v(0) \in L^\nu(\Omega)$ y $\nu = max\{1,\sigma\}$. Supongamos (H), (ℓH) y

- (ID_σ), $(F_{r,m})$, (RC) *y* $g \in L^{N+2}(Q_T)$ *si*
$$2 - \frac{N}{N+1} < q \le 2 - \frac{N}{N+2};$$
- (ID_1), (F_1) *y* $g \in L^d(Q_T)$ *por* $d > N+2$ *si*
$$1 \le q < 2 - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces $u \le v$ en Q_T.

Generalizaciones y observaciones

- Perdemos el intervalo de super linealidad

$$p-\frac{N}{N+2}<q<p$$

cuando $1<p\leq 2$! Necesitemos una regularidad mejor con respecto a el gradiente

$$|\nabla u|\in L^{N(q-(p-1))+2q-p}(Q_T)$$

que sería innatural en este intervalo porque

$$N(q-(p-1))+2q-p>p \quad \text{si} \quad \sigma>2.$$

Generalizaciones y observaciones

Cons ▶ Perdemos el intervalo de super linealidad

$$\boldsymbol{p - \frac{N}{N+2} < q < p}$$

cuando $1 < p \leq 2$! Necesitemos una regularidad mejor con respecto a el gradiente

$$|\nabla u| \in L^{N(q-(p-1))+2q-p}(Q_T)$$

que sería innatural en este intervalo porque

$$N(q-(p-1)) + 2q - p > p \quad \text{si} \quad \boldsymbol{\sigma > 2}.$$

Generalizaciones y observaciones

Cons

- Perdemos el intervalo de super linealidad

$$\boldsymbol{p - \frac{N}{N+2} < q < p}$$

cuando $1 < p \leq 2$! Necesitemos una regularidad mejor con respecto a el gradiente

$$|\nabla u| \in L^{N(q-(p-1))+2q-p}(Q_T)$$

que sería innatural en este intervalo porque

$$N(q-(p-1)) + 2q - p > p \quad \text{si} \quad \boldsymbol{\sigma > 2}.$$

Pros

- Mantenemos la ecuación principal

$$u_t - \text{div } a(t, x, \nabla u) = H(t, x, \nabla u)$$

así como (ℓH), si $1 < p < 2$.

El argumento convexidad

Teorema (T. Leonori & M. M.)

Supongamos u/v sean sub/super soluciones de

$$\begin{cases} u_t - div\,(A(t,x)\nabla u) = H(t,x,\nabla u) & in\ Q_T, \\ u = 0 & on\ S_T, \\ u(0,x) = u_0(x) & in\ \Omega, \end{cases}$$

tal que $u \le v$ *sobre* S_T, $u(0) \le v(0)$ *por* $u(0)$, $v(0) \in L^\nu(\Omega)$ *y* $\nu = max\{1, \sigma\}$. *Supongamos* (H), $(cH1)$, $(cH2)$ *y*

- (ID_σ), $(F_{r,m})$ *y* (RC) *si*
$$2 - \frac{N}{N+1} < q < 2;$$
- (ID_1) *y* (F_1) *si*
$$1 < q < 2 - \frac{N}{N+1}.$$

Entonces $u \le v$ *en* Q_T.

Generalizaciones en el caso $2 < p < N$

Cons

- Planteamos $u_t - \text{div}\,(A(x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = H(t,x,\nabla u)$ porque tenemos que rescalar en el tiempo por lo de la no homogeneidad.
- Perdemos el intervalo $\dfrac{p(N+1)-N}{N+2} < q \leq p-1$ porque necesitamos potencias de el gradiente que sean $(p-1)$–convexas:

$$H(t,x,\xi) - (1-\varepsilon)^{p-1} H\left((1-\varepsilon)^{p-2}\, t, x, \frac{\eta}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\leq c\varepsilon^{1-q}\left|\xi-\eta\right|^{q} + L|\xi-\eta|\left(|\xi|^{\frac{p-2}{2}} + |\eta|^{\frac{p-2}{2}}\right) + \varepsilon M \quad \text{con} \quad p-1 < q < p.$$

- Necesitamos $v(0) \leq u_0 < \infty$, $f < M$ también.

Generalizaciones en el caso $2 < p < N$

Cons

- Planteamos $u_t - \operatorname{div}\left(A(x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right) = H(t, x, \nabla u)$ porque tenemos que **rescalar en el tiempo** por lo de la no homogeneidad.
- Perdemos el intervalo $\frac{p(N+1)-N}{N+2} < q \leq p-1$ porque necesitamos potencias de el gradiente que sean $(p-1)$–convexas:

$$H(t,x,\xi) - (1-\varepsilon)^{p-1} H\left(\mathbf{(1-\varepsilon)^{p-2}}\, t, x, \frac{\eta}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\leq c\varepsilon^{1-q}\left|\xi-\eta\right|^{q} + L|\xi-\eta|\left(|\xi|^{\frac{p-2}{2}} + |\eta|^{\frac{p-2}{2}}\right) + \varepsilon M \quad \text{con} \quad p-1 < q < p.$$

- Necesitamos $v(0) \leq v_0 < \infty$, $f < M < \infty$ también.

Generalizaciones en el caso $2 < p < N$

Cons

- Planteamos $u_t - \mathrm{div}\,(A(x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}) = H(t, x, \nabla u)$ porque tenemos que **rescalar en el tiempo** por lo de la no homogeneidad.
- Perdemos el intervalo $\frac{p(N+1)-N}{N+2} < q \le p-1$ porque necesitamos potencias de el gradiente que sean $(p-1)$–convexas:

$$H(t,x,\xi) - (1-\varepsilon)^{p-1} H\left(\boldsymbol{(1-\varepsilon)^{p-2}}\; t, x, \frac{\eta}{1-\varepsilon} \right)$$

$$\le c\varepsilon^{1-q} \big|\xi - \eta\big|^{q} + L|\xi-\eta| \left(|\xi|^{\frac{p-2}{2}} + |\eta|^{\frac{p-2}{2}} \right) + \varepsilon M \quad \text{con} \quad p-1 < q < p.$$

- Necesitamos $v(0) \le v_0 < \infty$, $f < M < \infty$ también.

Generalizaciones en el caso $2 < p < N$

Cons

- Planteamos $u_t - \operatorname{div}\left(A(x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right) = H(t, x, \nabla u)$ porque tenemos que **rescalar en el tiempo** por lo de la no homogeneidad.
- Perdemos el intervalo $\dfrac{p(N+1)-N}{N+2} < q \leq p-1$ porque necesitamos potencias de el gradiente que sean $(p-1)$–convexas:

$$H(t, x, \xi) - (1-\varepsilon)^{p-1} H\left(\boldsymbol{(1-\varepsilon)^{p-2}}\ t, x, \frac{\eta}{1-\varepsilon} \right)$$

$$\leq c\varepsilon^{1-q}\left|\xi - \eta\right|^{q} + L|\xi-\eta|\left(|\xi|^{\frac{p-2}{2}} + |\eta|^{\frac{p-2}{2}}\right) + \varepsilon M \quad \text{con} \quad p-1 < q < p.$$

- Necesitamos $v(0) \leq v_0 < \infty$, $f < M < \infty$ también.

Generalizaciones en el caso $2 < p < N$

Cons

- Planteamos $u_t - \operatorname{div}\left(A(x)\nabla u|\nabla u|^{p-2}\right) = H(t,x,\nabla u)$ porque tenemos que **rescalar en el tiempo** por lo de la no homogeneidad.
- Perdemos el intervalo $\dfrac{p(N+1)-N}{N+2} < q \le p-1$ porque necesitamos potencias de el gradiente que sean $(p-1)$–convexas:

$$H(t,x,\xi) - (1-\varepsilon)^{p-1} H\left(\boldsymbol{(1-\varepsilon)^{p-2}}\, t, x, \frac{\eta}{1-\varepsilon}\right)$$

$$\le c\varepsilon^{1-q}\left|\xi-\eta\right|^{q} + L|\xi-\eta|\left(|\xi|^{\frac{p-2}{2}} + |\eta|^{\frac{p-2}{2}}\right) + \varepsilon M \quad \text{con} \quad p-1 < q < p.$$

- Necesitamos $v(0) \le v_0 < \infty$, $f < M < \infty$ también.

Pros

- Recuperamos el intervalo de super linealidad $2 - \dfrac{N}{N+2} < q < 2$.

Trabajos

Resultados de Unicidad y Comparación

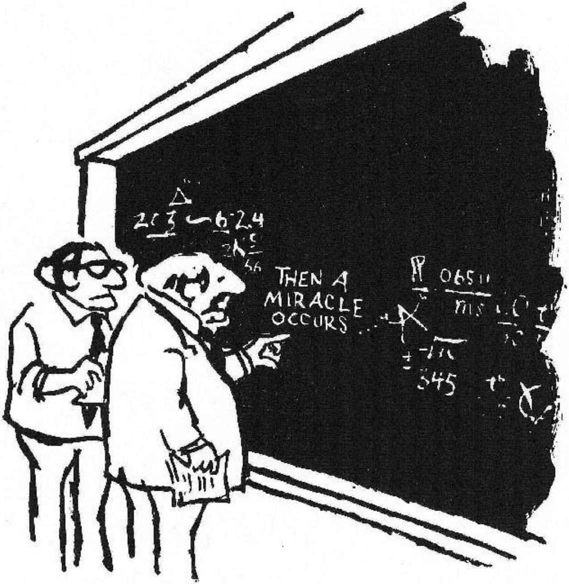
✎ **T. Leonori & M. Magliocca,**
Comparison results por unbounded soluciones of nonlinear parabolic equations with first order lowers,
preprint.

Resultados de Existencia

✎ **M. Magliocca,**
Existence results por a Cauchy-Dirichlet parabolic problem with a repulsive gradient term,
aceptado en Nonlin. An., disponible en arXiv:1703.00834.

Efectos regularizante, decaimiento en tiempo corto y largo

✎ **M. Magliocca & A. Porretta,**
Regularizing effects, decay y uniqueness results por a parabolic problem with a repulsive gradient term,
preprint disponible en arXiv.



"I think you should be more explicit here in step two."