

ESERCIZIO 1. Determinare per quali valori dei parametri reali a, b e c i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - 3x^2) + \sin(x + x^2) - ax^3 - bx^2 - cx}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - x^2) + \sin(x + x^2) - ax^3 - bx^2 - cx}{\cos(2x - x^2) - \cos(2x + x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + (\sin x)^2) - e^{\sin x} - \frac{(\sin x)^2}{2} - ax^2 - bx - c}{\log(1 + x^2)}$$

sono finiti. Quando sono nulli?

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{3}{2}} \left[\log \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \log \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - n \sin \left(\frac{1}{n} \right) \right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left[\cos \left(\frac{\sqrt{2}}{n} \right) - e^{-\frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^5}} \right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \left[\log \left(1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) + \log \left(1 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right], \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\frac{n}{2}}}.$$

ESERCIZIO 3. Determinare dei valori $n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, 4$, tali che

$$\frac{4n^3 + 1}{n^2 - n + 1} > 1000 \quad \forall n \geq n_1, \quad \frac{2n - 4}{3n^2 + n^3 - 2n} < 0,01 \quad \forall n \geq n_2,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} < \frac{13}{30} \quad \forall n \geq n_3, \quad 1 - 2 + 4 - \dots + (-1)^n 2^n > \frac{1001}{3} \quad \forall n \geq n_4.$$

ESERCIZIO 4. Studiare le seguenti funzioni (dominio, zeri, segno, asintoti, massimi, minimi, punti di flesso) e tracciarne i grafici.

$$f(x) = \frac{|x - 1|}{|x + 2|}, \quad g(x) = \frac{|x - 1|}{|x| + 2},$$

$$h(x) = \frac{x - 3}{\log |x - 3|}, \quad i(x) = \frac{1 + x}{x} - \log |x|.$$