Corso di Laurea in Informatica, a-a 2016 – 17
Analisi Matematica 1
Scheda 2, 14 Novembre 2016

Esercizio 1. Determinare quale dei seguenti insiemi è limitato, quanto valgono gli estremi superiore ed inferiore e se sono, rispettivamente, massimi e minimi.

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ |x+2| > 4\}$$

$$B = \mathbb{N} \cap \left(-\frac{10}{3}, 3\right)$$

$$C = \left\{x \in \mathbb{R} : \ |x+2| \leq 4 \text{ e } x^2 - 5x + 4 > 0\right\}$$

Esercizio 2. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2 + x + 1$, si determini la sua immagine e si verifichi se f è invertibile o no. Nel caso non lo sia, esiste un sottoinsieme $D \subset \mathbb{R}$ tale che $f\big|_D$ sia invertibile?

Esercizio 3. Determinare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \sin\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + n^3}{2^n + n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{4^n \sqrt{n+1}}.$$

Esercizio 4. Si determino due valori $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{n^3 + n \sin n}{1 + n + n^2} > 1000 \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{e} \quad 3^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{7^n} < e^{\frac{\log 3}{100}} \quad \forall n \geq n_2.$$

Esercizio 5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni composte:

$$\log(\log x), \qquad \sqrt[4]{x + \sin x},$$

$$\frac{x^2 - \cos(x^2)}{x^2 + (\cos x)^2}, \qquad e^{\sqrt[3]{x-2}}.$$

Esercizio 6. [1] Sia $f(x) = 3x + \sin x$ per $x \geq 0$. Calcolare g' sapendo che g è la funzione inversa di f. Quanto vale g' se $x = 3\pi$?

Esercizio 7. Sia $f(x) = x^4 e^{2x-1}$ per $x \geq 0$. Calcolare g' sapendo che g è la funzione inversa di f. Quanto vale g' se $x = e$?

Esercizio 8. Quali delle seguenti funzioni sono monotone nel loro dominio?

$$f(x) = -x^3 - x^2, \quad g(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad i(x) = \sqrt{1+x^2} - x.$$

Esercizio 9. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 5^x & \text{per } x \geq 1, \\ ax + b & \text{per } x < 1. \end{cases}$$

Determinare i valori dei parametri a, $b \in \mathbb{R}$ per cui f è derivabile in $\mathbb{R}$.

Esercizio 10. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \sin x + \frac{x^2}{2}}{x^3}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x - e^x \sin x}{x^2 \cos(x^2)},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 - \sin(x^2)}{x + 2x^2 - \log(1+x)}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^2}{x^4 + 1},$$

$$\lim_{x\to\infty} (x + \sin x) \log\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}\right), \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(x^2)}{1 - \frac{x^2}{2} - \cos x}.$$

[1] errata corrige testi esercizi 6, 7

Esercizio 11. Per quali valori reali a, b, c si ha che i limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-x^2)+\sin(x+x^2)+ax^3+bx^2+cx}{\sin x - x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(2x)-\sin(2x)+ax^3+bx^2+cx}{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}$$

esistono finiti?

Esercizio 12. Calcolare

- il polinomio di Taylor di grado 2 con centro in $x_0=1$ della funzione $f(x)=\log(1+2x^2)$;
- il polinomio di Maclaurin di grado 4 della funzione $f(x)=xe^{x^2-x^4}$;
- il polinomio di Maclaurin di grado 3 della funzione $f(x)=\sqrt{1+2x^2}$.