

CORSO DI LAUREA IN INFORMATICA, A-A 2016 – 17
ANALISI MATEMATICA 1
SCHEMA 1, 07 NOVEMBRE 2016

ESERCIZIO 1. Definiti gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 > 0\} \quad \text{e} \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 2|x - 2| \leq 3\}$$

dire quale tra gli insiemi $A \cup B$ e $A \cap B$ è limitato e quale è un intervallo.

ESERCIZIO 2. Definiti gli insiemi

$$C = \{x \in \mathbb{R} : 2 + x - x^2 > 0\} \quad \text{e} \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

determinare l'estremo superiore ed inferiore di $C \cup D$ e $C \cap D$. Sono anche minimo e massimo?

ESERCIZIO 3. Determinare l'estremo inferiore $\inf E$ e superiore $\sup E$ dell'insieme

$$E = \left\{ \frac{n-1}{1+n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dire se $\inf E$ e $\sup E$ sono, rispettivamente, un minimo e un massimo.

ESERCIZIO 4. Determinare l'immagine delle seguenti funzioni. Dire, inoltre, se sono iniettive, suriettive, biettive e, in tal caso, calcolarne l'inversa.

$$f(x) = \frac{1-3x}{x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

$$g(x) = 2 + \sin x, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0, \\ -x-1 & -1 < x < 0, \\ 2x+1 & x \leq -1. \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successioni:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - 2n^2}{n + \pi}, & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^3 + 9n^2} - \sqrt{n^4 + 1}}{n^2 + 2}, \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}, & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} - \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 6. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzioni:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}, \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}, & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{2x + x^3}. \end{aligned}$$

ESERCIZIO 7. Per quali valori dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ si ha che i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} a \frac{1 - \cos x}{2x^2} + 3bx \sin \frac{1}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} a \frac{1 - \cos x}{2x^2} + 3bx \sin \frac{1}{x}$$

convergono a 1?

ESERCIZIO 8. Studiare il carattere delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 4^n \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \cos(n\pi)}{n^3 + 3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + n^2}{2^n + n^2 5^n}.$$

ESERCIZIO 9. Si determinino due valori $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$n - \sqrt[3]{n^3 - 1} < 0,01 \quad \forall n \geq n_1 \quad \text{e} \quad \frac{6n^4 + 3n + 1}{3n^3 - 2n^2 - 5} > 1000 \quad \forall n \geq n_2.$$