Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Esercitazione corso Analisi 1, canale CIO-FR
Corso di Laurea in Ingegneria
Esercitatrice: Dot. Martina Magliocca
magliocc@mat.uniroma2.it

09 Novembre 2017
Infinitesimi, infiniti e continuità

Esercizio 1. Determinare

(A) l'ordine di infinitesimo α e la parte principale kx^α rispetto a x per $x \to 0$ delle seguenti funzioni:

(A.1) $\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}+x^2}$

(A.2) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

(A.3) $\sin(2x^2)\left(\sqrt{1+3x}-1\right)$

(A.4) $\dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{1+2x}-1$

(B) l'ordine di infinitesimo α e la parte principale k/x^α rispetto a $1/x$ per $x \to \infty$ delle seguenti funzioni:

(B.1) $\arctan\left(\dfrac{3}{x^2}\right)$

(B.2) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+\frac{1}{x}$

(B.3) $\log\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)$

(B.4) $e^{\frac{x+1}{x}}-e$

(C) l'ordine di infinitesimo α e la parte principale $k(x-x_0)^\alpha$ rispetto a $x-x_0$ per $x \to x_0$ delle seguenti funzioni:

(C.1) $1+\cos(x^2)$ con $x_0=\sqrt{\pi}$

(C.2) $\log x - \log 2$ con $x_0 = 2$

Esercizio 2. Studiare e classificare gli eventuali punti di discontinuità delle seguenti funzioni:

(2.a) $\dfrac{1-\cos x}{x}$

(2.b) $\dfrac{x+2}{|x|-2}$

(2.c) $\dfrac{1}{4+2^{\frac{1}{x}}}$

(2.d) $|\log x|e^{\frac{1}{\log x}}$

(2.e)
$$\begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & x \le 0 \\ \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{\pi}{2} & 0<x<1 \\ \arctan x & x \ge 1 \end{cases}$$

(2.f)
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x>0 \\ 3 & x=0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & x<0 \end{cases}$$

Esercizio 3. Determinare i valori di a, $b \in \mathbb{R}$ in modo tale che le seguenti funzioni risultino continue:

(3.a)

$$\begin{cases} a - \frac{2}{3}\sin x & \frac{3}{2}\pi < x < 2\pi \\ 2\cos x + a\sin x & 0 \le x \le \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

(3.b)

$$\begin{cases} \frac{1-\cos(x-1)}{(x-1)\arctan(a(x^2-1))} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

(3.c)

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + 4 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\log(1+\sin^2(bx))}{x^2} & x < 0 \end{cases}$$

(3.d)

$$\begin{cases} \sqrt{|x|}\log\left(1-\frac{1}{x}\right) + \frac{1-\cos(ax\sqrt{|x|})}{|x|^3} & x < 0 \\ b & x = 0 \\ \frac{\arcsin x}{\sqrt{x}} + 2 & x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 4. Studiare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$ la continuità di

$$f(x) = |x-1|^{\gamma}\left[\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) + 2\right]$$

classificando eventuali punti di discontinuità.

Esercizio 5. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili nei punti indicati:

(5.a) $\log\left(\sqrt[3]{x}\right) \quad x_0 = 1$

(5.b) $|\sin(x^2-2x)| \quad x_0 = 0$

(5.c) $|x|e^{|x+2|} \quad x_0 = -2$

(5.d) $\sqrt{x^2+x^4} \quad x_0 = 0$

Esercizio 6. Dire per quali valori di α e β le seguenti funzioni

(6.a)

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt[3]{\log^2|x|} & x \neq 0, \\ \alpha - 1 & x = 0. \end{cases}$$

(6.b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\alpha x)}{8x} & x < 0, \\ (\beta-1)\sqrt{x} - \cos x & x \ge 0. \end{cases}$$

sono continue e derivabili in $x = 0$. Negli altri casi classificare il tipo di discontinuità e di non derivabilità in $x = 0$.

Esercizio 7. Verificare che le funzioni

(7.a) $x^2 \log|x|$

(7.b) $|x|^x$

sono prolungabili con continuità per $x = 0$. Le funzioni così prolungate risultano derivabili in $x = 0$?

Esercizio 8. Calcolare le rette tangenti ai grafici delle funzioni

(8.a) $\log(6x-4)$ in $x = \pm 1$;

(8.b) $x^2 + \sqrt{5+4e^{-x}}$ in $x = 0$;

(8.c) $\frac{\cos(\pi x)+2}{4x^2}$ in $x = 1/2$;

(8.d) $\sin x \cos x$ in $x = \pi/4$.