Università degli Studi di Roma Tor Vergata

Esercitazione corso Analisi 1, canale CIO-FR
Corso di Laurea in Ingegneria
Esercitatrice: Dot. Martina Magliocca
magliocc@mat.uniroma2.it

21 Dicembre 2017
Integrali impropri

Esercizio 1. Discutere l'integrabilità in senso improprio dei seguenti integrali e calcolarne il valore:

(1.a) $\displaystyle\int_0^{\log 3} \frac{1}{e^x - 3}\, dx$

(1.b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{x+1}{x^2(1-x)}\, dx$

(1.c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 4x}\, dx$

(1.d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^3 \left(8 + x^4\right)^{-\frac{5}{3}} + 2xe^{-x}\, dx$

(1.e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{(x+2)(x^2+1)}\, dx$

(1.f) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}(2x-1)}\, dx$

Esercizio 2. Determinare

(2.a) il più piccolo valore di $n \in \mathbb{N}$ per cui

$$\int_2^{\infty} \frac{x}{(\sqrt{x^2+x})^n}\, dx$$

converge;

(2.b) tutti i valori di α, $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\alpha (4+9x)^{\beta+1}}\, dx$$

converge e calcolarlo con $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$;

(2.c) per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_2^3 \frac{x \sin^\alpha (x-2)}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$$

è convergente e calcolarlo con $\alpha = 0$;

(2.d) per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_\alpha^{\infty} \frac{1}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}\, dx$$

è convergente e calcolarlo per $\alpha = 6$.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

(3.a) il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x - \arctan x}{x^\alpha}\, dx$$

esiste finito e calcolarlo per $\alpha = 3$;

(3.b) il seguente integrale improprio

$$\int_1^\infty \frac{\log(x+2)}{(x^\alpha + x)^2}\, dx$$

esiste finito e calcolarlo per $\alpha = 1$;

(3.c) il seguente integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x^\alpha + x}}\, dx$$

esiste finito e calcolarlo per $\alpha = 1$;

(3.d) il seguente integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^\alpha}\, dx$$

esiste finito e calcolarlo per $\alpha = 1$;

(3.e) il seguente integrale improprio

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^\alpha}} \sin\left(\frac{1}{1+|\log x|}\right) dx$$

esiste finito.

Esercizio 4. Studiare la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{1+\cos^2 t}\, dt.$$