Université d'Evry Val d'Essonne **Enseignante :** Martina MAGLIOCCA
L2 Mathématiques pour la Physique 2022/2023

Devoir surveillé B et D

24 Octobre 2022

Durée : 1h30

Les notes de cours et/ou notes personnelles ne sont pas autorisés (sauf formulaire de DL).
Les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

- Calculer le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de

$$f(x) = \sin(\log(1+2x))$$

Solution : Puisque

$$\log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$$
$$\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + o(w^4)$$

on a, si $v = 2x$ et $w = \log(1+v)$, que

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(1+2x) - \frac{\log^3(1+2x)}{3!} + o(\log^4(1+2x)) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3) - \frac{\left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right)^3}{3!} + o\left(\left(2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right)^4\right) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3) \end{aligned}$$

- Déterminer, si elles existent, les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - 2x + 4x^2}{4x^\alpha}.$$

Solution :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\log(1+2x)) - 2x + 4x^2}{4x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{4x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Exercice 2

- Écrire le développement asymptotique de

$$f(x) = x^2 \sin\left(\log\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right)$$

à l'ordre 3 en $\pm\infty$.

Solution : Soit $t = 1/x$. Alors

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\sin(\log(1+2t)) = \frac{2}{t} - 2 + \frac{4}{3}t + o(t)$$

Donc

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Écrivez, si elles existent, les équations des asymptotes pour $\pm\infty$.

Solution :

$$y = -2 + 2x$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3y^3 - 4x^3}{3x^2 + 5y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Solution :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^3 - 4x^3}{3x^2 + 5y^2} = \lim_{r\to 0} r\frac{3\sin^3\theta - 4\cos^3\theta}{3 + 2\sin^2\theta}$$

Puisque

$$\left| r\frac{3\sin^3\theta - 4\cos^3\theta}{3 + 2\sin^2\theta} \right| \leq \frac{7r}{3} \qquad \forall\theta \in (0, 2\pi)$$

on a que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^3 - 4x^3}{3x^2 + 5y^2} = 0$$

- Calculer $\nabla f(x,y)$.

Solution :

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(3x^2+5y^2)^2}\begin{pmatrix} -6\left(2x^4+10x^2y^2+3xy^3\right) \\ 15y^4+27x^2y^2+40yx^3 \end{pmatrix} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

- Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Solution : On sait que $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Pour voir si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0 = f_y(0,0)$$

On calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{15y^4+27x^2y^2+40yx^3}{(3x^2+5y^2)^2}$$

Si $x=0$, la limite devient

$$\lim_{y\to 0}\frac{15y^4}{25y^4} = \frac{3}{5} \neq 0$$

donc $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

- Que peut-on conclure sur sa différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$?

Solution : On sait que, étant $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, alors f est différentiable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On vérifie si f est différentiable dans $(0,0)$, c'est-à-dire si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3y^3-5x^3}{(3x^2+5y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Puisque

$$\left.\frac{3y^3-5x^3}{(3x^2+5y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=0} = \frac{3y^3}{5y^3} \equiv \frac{3}{5} \neq 0$$

la fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4 Cherchez et corrigez l'erreur.
On souhaite déterminer l'équation du plan tangent à

$$f(x,y) = -x^4+y^3$$

dans le point $(x_0, y_0) = (-1, 2)$. Un/e étudiant/e propose la réponse

$$z_1 = -7 + 4(x+1) + 12(y-2).$$

Un autre dit que la bonne réponse est plutôt

$$z_2 = 7 - 4x^3(x+1) + 3y^2(y-2).$$

- Expliquer, sans calcul, pourquoi les réponses ne peuvent pas être correctes.

  Solution : L'équation de z_1 ne touche pas le graphe de f.
  L'équation de z_2 n'est pas un plan parce qu'il y a les puissances de x^3 et y^2.

- Quelles sont les erreurs commises dans le calculs précédents ?

  Solution : Dans l'équation de z_1 : $f(-1, 2) = 7$, pas -7.
  Dans l'équation de z_2 : le gradient n'a pas été calculé au point $(-1, 2)$.

- Donner la bonne réponse !

  Solution :

$$z = f(-1,2) + \nabla f(-1,2) \cdot (x+1, y-2) = 7 + 4(x+1) + 12(y-2).$$