Université d'Evry Val d'Essonne **Enseignante :** Martina MAGLIOCCA
L2 Mathématiques pour la Physique 2022/2023

Devoir surveillé A et C

24 Octobre 2022

Durée : 1h30

Les notes de cours et/ou notes personnelles ne sont pas autorisés (sauf formulaire de DL).

Les téléphones portables sont interdits.

Exercice 1

- Calculer le développement limité en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de

$$f(x) = \log(1 + \sin(2x)).$$

Solution : Puisque

$$\log(1+v) = v - \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + o(v^3)$$
$$\sin w = w - \frac{w^3}{3!} + o(w^4)$$

on a, si $v = \sin(w)$ et $w = 2x$, que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(2x) - \frac{\sin^2(2x)}{2} + \frac{\sin^3(2x)}{3} + o(\sin^3(2x)) \\ &= 2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4) - \frac{\left(2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2}{2} + \frac{\left(2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3}{3} + o\left(\left(2x - \frac{8x^3}{3!} + o(x^4)\right)^3\right) \\ &= 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

- Déterminer, si elles existent, les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin(2x)) - 2x + 3x^2}{3x^\alpha}.$$

Solution :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + \sin(2x)) - 2x + 3x^2}{3x^\alpha} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)}{3x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \alpha = 2 \\ 0 & \text{si } 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

Exercice 2

- Écrire le développement asymptotique de

$$f(x) = x^2 \log\left(1 + \sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)$$

à l'ordre 3 en $\pm\infty$.

Solution : Soit $t = 1/x$. Alors

$$f(x) = f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}\log(1+\sin(2t)) = \frac{2}{t} - 2 + \frac{4}{3}t + o(t)$$

Donc

$$f(x) = 2x - 2 + \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

- Écrivez, si elles existent, les équations des asymptotes pour $\pm\infty$.

Solution :

$$y = -2 + 2x$$

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2y^3 - 3x^3}{4x^2 + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

Solution :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^3 - 3x^3}{4x^2 + 3y^2} = \lim_{r\to 0} r\frac{2\sin^3\theta - 3\cos^3\theta}{3 + \cos^2\theta}$$

Puisque

$$\left| r\frac{2\sin^3\theta - 3\cos^3\theta}{3 + \cos^2\theta} \right| \leq \frac{5r}{3} \qquad \forall\theta \in (0, 2\pi)$$

on a que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^3 - 3x^3}{4x^2 + 3y^2} = 0$$

- Calculer $\nabla f(x,y)$.

Solution :

$$\nabla f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4x^2+3y^2)^2} \begin{pmatrix} -(12x^4+27x^2y^2+16xy^3) \\ 6(y^4+4x^2y^2+3yx^3) \end{pmatrix} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$?

Solution : On sait que $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Pour voir si $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, il faut vérifier si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = 0 = f_x(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_y(x,y) = 0 = f_y(0,0)$$

On calcule

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{12x^4+27x^2y^2+16xy^3}{(4x^2+3y^2)^2}$$

Si $y=0$, la limite devient

$$-\lim_{x\to 0} \frac{12x^4}{16x^4} = -\frac{3}{4} \neq 0$$

donc $f \notin C^1(\mathbb{R}^2)$.

- Que peut-on conclure sur sa différentiabilité dans $\mathbb{R}^2$?

Solution : On sait que, étant $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$, alors f est différentiable dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On vérifie si f est différentiable dans $(0,0)$, c'est-à-dire si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2y^3-3x^3}{(4x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Puisque

$$\left.\frac{2y^3-3x^3}{(4x^2+3y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{x=0} = \frac{2y^3}{3y^3} \equiv \frac{2}{3} \neq 0$$

la fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 4 Cherchez et corrigez l'erreur.

On souhaite déterminer l'équation du plan tangent à

$$f(x,y) = x^3 - y^4$$

dans le point $(x_0, y_0) = (2, 1)$. Un/e étudiant/e propose la réponse

$$z_1 = 7 + 3x^2(x-2) - 4y^3(y-1).$$

Un autre dit que la bonne réponse est plutôt

$$z_2 = 5 + 12(x-2) - 4(y-1).$$

- Expliquer, sans calcul, pourquoi les réponses ne peuvent pas être correctes.

  Solution : L'équation de z_1 n'est pas un plan parce qu'il y a les puissances de x^2 et y^3. L'équation de z_2 ne touche pas le graphe de f.

- Quelles sont les erreurs commises dans le calculs précédents ?

  Solution : Dans l'équation de z_1 : le gradient n'a pas été calculé au point $(2, 1)$. Dans l'équation de z_2 : $f(2, 1) = 7$, pas 5.

- Donner la bonne réponse !

  Solution :

$$z = f(2, 1) + \nabla f(2, 1) \cdot (x-2, y-1) = 7 + 12(x-2) - 4(y-1).$$