Aide-mémoire du cours

Mathématiques pour la Physique

Année 2022/2023

Enseignant :
Martina MAGLIOCCA

Présentation

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. Ici on a cherché à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages.
Ce polycopié ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure car on a très peu de temps et beaucoup de concepts nouveaux. Ce polycopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais ce n'est pas un livre auto-suffisant (**il est loin d'être exhaustif**) ! De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs (merci de me les communiquer !).

Je vous recommande de visiter **ma page web** pour toute information sur le cours et les mises-à-jour de ces notes, ainsi que l'**emploi du temps** à la page VT agenda.

Dernière mise-à-jour : **17/10/2022**

Martina MAGLIOCCA
Maîtresse de conférence
Bureau : 324
Email : martina.magliocca@univ-evry.fr
Web-page : https://math.maths.univ-evry.fr/mmartina/index.html

Laboratoire de Mathématiques et
Modélisation d'Évry (LaMME)
I.B.G.B.I, 23 Bvd de France
91 037 Évry Cedex
France

Table des matières

1 Notions de base et rappels . . . 7

1.1 Notation . . . 7

1.2 Rappels . . . 8

1.2.1 Dérivées de fonctions élémentaires . . . 8

1.2.2 La règle de l'Hôpital . . . 8

1.2.3 Équivalence . . . 11

1.2.4 Prépondérance . . . 12

1.2.5 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ . . . 13

2 Polynôme de Taylor et applications . . . 17

2.1 Polynôme de Taylor . . . 17

2.1.1 La linéarisation . . . 18

2.1.2 Polynôme de Taylor d'ordre n . . . 20

2.2 Application du Théorème de Peano . . . 30

2.2.1 Polynôme de Taylor et points critiques . . . 30

2.2.2 Polynôme de Taylor et limites . . . 31

2.3 Approximation de fonctions avec le polynôme de Taylor . . . 33

2.3.1 L'erreur . . . 33

2.3.2 Série de Taylor . . . 36

2.4 Exercices . . . 38

3 Fonctions de plusieurs variables . . . 43

3.1 Domaine et graphe . . . 43

3.2 Limites et continuité . . . 48

3.2.1 Voisinages . . . 48

3.2.2 Limites et continuité 49
3.2.3 Coordonnées polaires 53
3.3 Dérivées partielles 56
3.3.1 Dérivées directionnelles et partielles 56
3.3.2 Différentiabilité 66
3.4 Exercices 71

1. Notions de base et rappels

Table des matières

1.1 Notation 7

1.2 Rappels 8

- 1.2.1 Dérivées de fonctions élémentaires 8
- 1.2.2 La règle de l'Hôpital 8
- 1.2.3 Équivalence 11
- 1.2.4 Prépondérance 12
- 1.2.5 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$ 13

1.1. Notation

- $\log x = \log_e x$
- $\mathrm{Log} x = \log_{10} x$
- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$
- D_f : domaine de la fonction f
- $C^0(X) = \{\text{ensemble de fonctions continues en } X\}$
- $C^1(X) = \{\text{ensemble de fonctions } f \text{ telles que } f' \text{ est continues en } X\}$
- $C^n(X) = \left\{\text{ensemble de fonctions } f \text{ telles que } f^{(k)} \text{ est continue en } X \text{ avec } k = 1, \ldots, n\right\}$
- $C^\infty(X) = \{\text{ensemble de fonctions } f \text{ infiniment dérivables en } X\}$

1.2. Rappels

1.2.1. Dérivées de fonctions élémentaires

$f(x)$	D_f	$f'(x)$	$D_{f'}$
$\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sign} x = \dfrac{x}{\lvert x\rvert}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$
$a^x,\ a > 0$	$\mathbb{R}$	$a^x \log a$	$\mathbb{R}$
$\log \lvert x\rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\log_a \lvert x\rvert,\ a \neq 1,\ a > 0$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\dfrac{1}{x} \log_a e$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$\arcsin x$	$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(-1, 1)$
$\arctan x$	$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\tanh x$	$\mathbb{R}$	$1 - \tanh^2 x$	$\mathbb{R}$

1.2.2. La règle de l'Hôpital

Théorème 1.1 (Règle de l'Hôpital)**.** Soient f et g deux fonctions dérivables sur $(a, b) \subseteq$

$\mathbb{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, et telles que $g'(x)$ ne s'annule pas en (a, b).

- Si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell,$$
où ℓ est infini ou fini, on a
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$
Cette forme indéterminée est représentée par $\left[\frac{0}{0}\right]$.
- Si
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$
où ℓ est infini ou fini, on a
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$
Cette forme indéterminée est représentée par $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.
Les mêmes résultats s'appliquent si $x \to b^-$.

Observation 1.2 (Astuces).
- Si, en dérivant, nous avons encore une forme indéterminée, on peut appliquer le Théorème de l'Hopital à f' et g'. Bien sûr, "l'itération" du Théorème de l'Hopital dépend de la régularité de f et g.
- Supposons qu'on veut calculer la limite
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$
donc on la a la forme indéterminée $[0 \cdot \infty]$. On peut écrire la limite initiale de les façons suivantes :
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)\frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

et appliquer le Théorème de l'Hôpital.

Exemple 1.3.
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin x - x^4 + 4x^3}{x^5 - 5x^6}$$
On a $\lim_{x \to 0} \sin x - x^4 + 4x^3 = \lim_{x \to 0} x^5 - 5x^6 = -\infty$, Donc une forme indéterminée du

type $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.Si on applique le Théorème de Hôpital, on trouve

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sin x - x^4 + 4x^3)'}{(x^5-5x^6)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x - 4x^3 + 12x^2}{5x^4 - 35x^5}$$

et on a encore une forme indéterminée du type $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Mais, en itérant le processus, nous pouvons conclure que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x - x^4 + 4x^3}{x^5-5x^6} &= \frac{1}{5}\lim_{x\to-\infty}\frac{\cos x - 4x^3 + 12x^2}{x^4 - 6x^5}\\ &= \frac{1}{10}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sin x - 12x^2 + 24x}{2x^3 - 15x^4}\\ &= \frac{1}{60}\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cos x - 24x + 24}{x^2 - 10x^3}\\ &= \frac{1}{120}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sin x - 24}{x - 15x^2}\\ &= 0\end{aligned}$$

Exemple 1.4. ▶ **Cas** $\left[\frac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

On a $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, mais puisque

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{x'} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$$

le Théorème de l'Hôpital nous assure que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

▶ **Cas** $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2}$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, mais puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0$$

le Théorème de l'Hôpital nous assure que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x^2} = 0$$

▶ **Cas** $[0 \cdot \infty]$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)$$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x - \dfrac{\pi}{2} = 0$. On peut réécrire cette limite soit comme

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

soit

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\frac{1}{\arctan x - \frac{\pi}{2}}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

On considère seulement le premier cas, puisqu'il est plus simple (le résultat final est, de toute façon, le même). On calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = -1$$

donc le Théorème de l'Hôpital nous dit que

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\arctan x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$$

1.2.3. Équivalence

Définition 1.5 (Équivalence)**.** Soit f et g deux applications de D vers $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I \cap D, \quad f(x) = g(x)[1+\varphi(x)] \quad \text{et} \quad \lim_{x\to x_0} \varphi(x) = 0.$$

On note alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, cette définition est équivalente à

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Exemple 1.6. ▶ Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, $a_n \neq 0$, une fonction polynomiale, alors

$$P(x) \underset{\pm\infty}{\sim} a_n x^n \qquad P(x) \underset{0}{\sim} a_0 \quad \text{si } a_0 \neq 0$$

- Soit $Q(x) = \frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m}$, a_n, $b_m \neq 0$, une fonction rationnelle, alors

$$Q(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \frac{a_nx^n}{b_mx^m} \qquad Q(x) \underset{0}{\sim} \frac{a_0}{b_0} \quad \text{si } a_0,\, b_0 \neq 0$$

- Fonctions trigonométriques :

$$\sin x \underset{0}{\sim} x \qquad \tan x \underset{0}{\sim} x \qquad 1-\cos x \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{2}$$

- Fonctions logarithmes, exponentielles, puissance :

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x \qquad a^x - 1 \underset{0}{\sim} x \log a \quad (a > 0)$$

$$\log(1+x) \underset{0}{\sim} x \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Théorème 1.7. Soit f et g deux applications de D vers $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

Ce résultat est fondamentale car il permet de remplacer une limite par une limite plus simple.

➞ Attention

Si deux fonctions ont même limite, elles ne sont pas nécessairement équivalentes. Par exemple, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ mais $x \to x$ et $x \to x^2$ ne sont pas équivalentes en $+\infty$.

Voici quelques **propriétés de l'équivalence** :

- $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \quad \Rightarrow \quad fg \sim f_1g_1$
- $f \sim f_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{f} \sim \frac{1}{f_1}$ si f, f_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{f}{g} \sim \dfrac{f_1}{g_1}$ si g, g_1 ne s'annulent pas au voisinage de x_0
- $f \sim f_1 \quad \Rightarrow \quad f^n \sim f_1^n$, $n \in \mathbb{N}$
- $f \sim f_1 \quad \Rightarrow \quad f^\alpha \sim f_1^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ si f, f_1 sont strictement positives au voisinage x_0

➞ Attention

- $f \sim f_1$ et $g \sim g_1 \quad \not\Rightarrow \quad f+g \sim f_1+g_1$
- $f \sim f_1 \quad \not\Rightarrow \quad e^f \sim e^{f_1}$
- $f \sim f_1 \quad \not\Rightarrow \quad \log f \sim \log f_1$

1.2.4. Prépondérance

Définition 1.8 (Prépondérance)**.** Soit f et g deux applications de D vers $\mathbb{R}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 s'il existe un voisinage I de x_0 et une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall x \in I \cap D, \quad f(x) = g(x)\varphi(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = 0.$$

On note alors

$$f \underset{x_0}{=} o(g) \quad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de x_0, cette définition est équivalente à

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Exemple 1.9.

$$\log x \underset{\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad \log x \underset{0^+}{=} o(x^{-\alpha}) \qquad x^\alpha \underset{\infty}{=} o(e^x) \qquad |x|^\alpha \underset{-\infty}{=} o(e^{-x})$$

Voici quelques **propriétés de la prépondérance** :

- $f = o(1) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$
- $f = o(f_1)$ et $g = o(g_1) \quad \Rightarrow \quad fg = o(f_1 g_1)$
- $f = o(h)$ et $g = o(h) \quad \Rightarrow \quad f + g = o(h)$
- $f = o(f_1) \quad \Rightarrow \quad (fo(f_1))^n = f^n o(f_1^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ si f, f_1 sont strictement positives au voisinage de x_0
- $f \sim g \quad \Leftrightarrow \quad f - g = o(g)$

➡ Attention

- $f = o(f_1)$ et $g = o(g_1) \quad \not\Rightarrow \quad f + g = o(f_1 + g_1)$
- $f = o(f_1) \quad \not\Rightarrow \quad e^f = o(e^{f_1})$
- $f = o(f_1) \quad \not\Rightarrow \quad \log(f) = o(\log(f_1))$

1.2.5. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^N$

Voici quelques rappels sur les propriétés fondamentales de $\mathbb{R}^n$.
$\mathbb{R}^n$ est un **espace vectoriel** : étant donné $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)\mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, les opérations suivantes sont définies :

- **addition** : $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
- **multiplication par un scalaire** : $\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$
- **produit scalaire** : $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$

Définition 1.10 (Norme)**.** La norme (euclidienne) ou module d'un point $\boldsymbol{x}$ est un nombre réel non négatif, définis par

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^n$, on utilises les normes classiques suivantes par

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=0}^{n} |x_i|^p} \qquad \text{et} \qquad \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \sup\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Voici les **propriétés des normes**. On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application $N : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ possédant les propriétés suivantes :

- propriété de séparation $N(\boldsymbol{x}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = 0$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$
- propriété de homogénéité $N(\lambda \boldsymbol{x}) = |\lambda|\, N(\boldsymbol{x}$ pour tout $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$
- propriété de inégalité triangulaire $N(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) \leq N(\boldsymbol{x}) + N(\boldsymbol{y})$ pour tout $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$

Définition 1.11 (Distance)**.** La distance (euclidienne) entre deux points $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$ est un nombre réel non négatif, définis par

$$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Exemple 1.12. En $\mathbb{R}^2$:

$$(-1, 3) + (7, 2) = (6, 5) \qquad 4(-1, 3) = (-4, 12) \qquad (-1, 3) \cdot (7, 2) = -7 + 6 = -1$$

$$\|(-1, 3)\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \qquad d((-1, 3), (7, 2)) = \sqrt{8^2 + 1^2} = \sqrt{65}$$

La norme et la distance vérifient l'**inégalité triangulaire** :

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2 \qquad \text{et} \qquad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leq d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + d(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n.$$

En plus, l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** s'applique :

$$|\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}| \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Deux éléments $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ sont dits **orthogonaux** si $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$. Les éléments

$$\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \qquad \boldsymbol{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \qquad \ldots \qquad \boldsymbol{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

sont deux à deux orthogonales et vérifient $\|\boldsymbol{e}_i\|_2 = 1$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$.
L'ensemble $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ constitue donc une base orthonormale particulière de $\mathbb{R}^n$, également appelée **base canonique** de $\mathbb{R}^n$, puisque $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n$ pour chaque $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
En utilisant cette base pour définir une référence cartésienne, $\mathbb{R}^2$ est représenté géométriquement comme le plan et $\mathbb{R}^3$ comme l'espace. Par le théorème de Pythagore, donc,

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ coïncide avec le concept habituel de distance dans le plan ou dans l'espace ; de plus, on a

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2 \cos \alpha \qquad \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Si l'un des deux vecteurs est nul, l'angle α est indéterminé. Autrement,

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{x}\|_2 \|\boldsymbol{y}\|_2}\right) \in [0, \pi] \qquad \forall \boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\boldsymbol{0}\}$$

désigne l'angle entre les deux vecteurs $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{y}$; on a $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Ceci motive la définition du concept d'orthogonalité dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple 1.13. ▶ Les vecteurs $(1, 2, 3)$ et $(-6, 0, 2)$ sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ puisque $(1, 2, 3) \cdot (-6, 0, 2) = -6 + 0 + 6 = 0$.

▶ On calcule l'angle $\alpha \in [0, \pi]$ entre les vecteurs $(-3, 2, 0)$ et $(1, 0, -1)$:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(-3, 2, 0) \cdot (1, 0, -1)}{\|(-3, 2, 0)\|_2 \|(1, 0, -1)\|_2} = -\frac{3}{\sqrt{26}} < -\frac{1}{2} \\ \Rightarrow \quad \alpha &= \arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{26}}\right) \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \end{aligned}$$

Dans les chapitres suivants, nous utiliserons la notation $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$.

2. Polynôme de Taylor et applications

Table des matières

2.1 Polynôme de Taylor . . . 17
2.1.1 La linéarisation . . . 18
2.1.2 Polynôme de Taylor d'ordre n . . . 20
2.2 Application du Théorème de Peano . . . 30
2.2.1 Polynôme de Taylor et points critiques . . . 30
2.2.2 Polynôme de Taylor et limites . . . 31
2.3 Approximation de fonctions avec le polynôme de Taylor . . . 33
2.3.1 L'erreur . . . 33
2.3.2 Série de Taylor . . . 36
2.4 Exercices . . . 38

2.1. Polynôme de Taylor

Dans de nombreux domaines de l'analyse mathématique et de ses applications, il est crucial de pouvoir approximer une fonction en termes de fonctions plus simples, telles que les polynômes. Cette procédure permet en fait de décrire plus facilement certaines de leurs propriétés.
Dans ce chapitre, nous allons présenter une méthode permettant de décrire, à l'aide de polynômes, le comportement d'une fonction autour d'un point de son domaine.
Notre objectif est donc le suivant : nous cherchons la meilleure approximation de f avec un polynôme $T_n(x)$ de degré au plus n, c'est-à-dire

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x - x_0)^k$$

tel que

$$f(x) = T_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{lorsque } x \to x_0,$$

ou bien

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

2.1.1. La linéarisation

Considérons la fonction

$$f : (a, b) \to \mathbb{R} \quad \text{avec} \quad x_0 \in (a, b).$$

Nous savons déjà que si f est continue, alors

$$f(x) = \underline{f(x_0)} + o(1) \qquad \text{lorsque } x \to x_0. \tag{2.1}$$

De plus, si f est dérivable en x_0, alors nous pouvons améliorer la réécriture de f de la manière suivante

$$f(x) = \underline{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0) \qquad \text{lorsque } x \to x_0. \tag{2.2}$$

Si nous substituons, respectivement, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ dans (2.1) et (2.2) avec des autres quantités, ces égalités sont fausses. Cela signifie que les polynômes

$$\underline{f(x_0)} \qquad \text{et} \qquad \underline{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

sont les meilleures approximations, respectivement, constante et linéaire de f pour $x \to x_0$.

Définition 2.1 (Linéarisation)**.** Si on approche une fonction f au voisinage d'un point x_0 au moyen d'une fonction affine $L(x) = q + mx$, il est naturel de choisir la fonction L dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en x_0 :

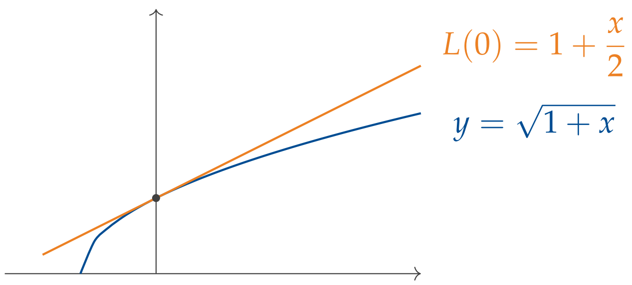
$$L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

La fonction L représente la linéarisation de f en x_0.

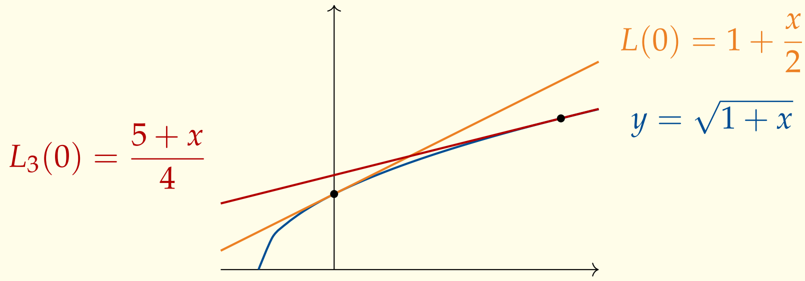
Dans certains cas on mentionne explicitement le point auquel la linéarisation est obtenue et on note la linéarisation de f en x_0 par L_{x_0}.

Exemple 2.2. Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$. Sa dérivée est égale à $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$. Alors, pour $x_0 = 0$, la linéarisation de f à l'origine est

$$L(0) = \sqrt{0+1} + \frac{1}{2\sqrt{1+0}}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$



Observation 2.3. La linéarisation d'une fonction dépend du point auquel on linéarise la fonction. Par exemple, on a vu que la linéarisation de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ en 0 donne $L(0) = 1 + \frac{x}{2}$, tandis que la linéarisation en 3 donne $L_3(x) = (5+x)/4$. La linéarisation L_0 fournit une meilleure approximation de f tant que $x < 1$, la linéarisation L_3 devient meilleure lorsque $x > 1$. En $x = 1$, les deux linéarisations fournissent la même valeur.



Observation 2.4. Lorsqu'elle est évaluée en x_0, la linéarisation de la fonction f en x_0 coïncide avec la fonction f. Lorsque x reste proche de x_0, la linéarisation L_{x_0} fournit une approximation de f. On note

$$f(x) \simeq L(x) \qquad \text{lorsque } x \simeq x_0.$$

Le signe $\simeq$ signifie "est approximativement égal à".

Exemple 2.5. La dérivée de $f(x) = (1+x)^n$ est égale à $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$. La linéarisation de f à l'origine est donc égale à $L_0(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + nx$ est on a

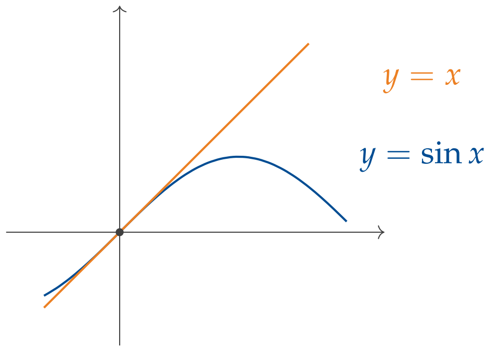
$$(1+x)^n \simeq 1 + nx \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$

Cette formule est valable pour des valeurs quelconques de $n \in \mathbb{R}$. Elle permet de calculer rapidement des approximations de racines et de puissances de nombres proches de l'unité. Ainsi, par exemple

$$\sqrt[3]{1.2} = (1+0.2)^{1/3} \simeq 1 + \frac{0.2}{3} = 1.0\bar{6},$$
$$1.002^{100} = (1+0.002)^{100} = 1 + 0.2 = 1.2.$$

Exemple 2.6. Si $f(x) = \sin x$, sa linéarisation à l'origine $x_0 = 0$ est

$$\sin x \simeq 0 + \cos 0(x-0) = x \qquad \text{lorsque } x \simeq 0.$$



C'est la linéarisation que l'on effectue pour résoudre l'équation du pendule en physique. La qualité de cette approximation peut être également appréciée au moyen de quelques valeurs :

x	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.2
$f(x) = \sin x$	-0.1986	-0.0998	-0.0499	0	0.0499	0.0998	0.1986
$L_0(x) = x$	-0.2	-0.1	-0.05	0	0.05	0.1	0.2

2.1.2. Polynôme de Taylor d'ordre n

Jusqu'à présent, nous avons supposé que la dérivée première de notre fonction f existe en x_0. Que se passe-t-il si on sait que f admet des dérivées d'ordre supérieur en x_0 ? Changeons de notation : revenons aux équations (2.1) et (2.2). Nous avons vu que les meilleures approximations de f dans x_0 sont :

$$\begin{aligned} &\text{si } f \text{ est continu en } x_0 : && f(x) \simeq \underline{f(x_0)} \qquad \text{lorsque } x \simeq x_0, \\ &\text{si } f \text{ est dérivable en } x_0 : && f(x) \simeq \underline{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)} \qquad \text{lorsque } x \simeq x_0. \end{aligned}$$

On définit les polynômes

$$\underline{T_0(x) = f(x_0)} \qquad \text{et} \qquad \underline{T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

où l'indice représente le degré maximal du polynôme.
Notons que T_1 est un polynôme de degré ≤ 1 : il est de degré 1 si $f'(x_0) \neq 0$, et de degré 0 si $f'(x_0) = 0$.

Définition 2.7 (Polynôme de Taylor et de Maclaurin)**.** Le polynôme de Taylor d'ordre n généré par f au point x_0 est le (seul) polynôme T_n de degré inférieur ou égal à n qui satisfait les conditions

$$T_n^{(k)}(x_0) = f_n^{(k)}(x_0) \qquad \text{pour } k = 0, 1, \ldots, n,$$

i.e.

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Le polynôme (2.4) est appelé polynôme de Maclaurin d'ordre n de f si $x_0 = 0$.

Théorème 2.8 (Théorème de Peano ou de Taylor-Young)**.** Supposons que $n \geq 2$ et que f est $n-1$ fois dérivable dans un voisinage de x_0 et n fois dérivable dans x_0. Alors, nous pouvons approximer la fonction f par un polynôme T_n de degré au plus n comme suit :

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \qquad \text{lorsque } x \to x_0, \tag{2.3}$$

étant

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{2.4}$$

Le graphe de cet polynôme est une courbe polynomiale tangente au graphe de f en x_0.
Le reste $o((x-x_0)^n)$ signifie que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0,$$

c'est-à-dire $o((x-x_0)^n) \sim (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0)$ où ε est une fonction définie dans un voisinage de x_0, à valeur dans $\mathbb{R}$, et telle que $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x-x_0) = 0$.

Preuve.

On cherche, pour chaque $n \geq 2$, un polynôme $T_n(x)$ de degré au plus n tel qu'il vaille

$$f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n) \quad \text{lorsque } x \to x_0,$$

ou bien

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0. \tag{2.5}$$

On observe d'abord qu'un tel polynôme peut s'écrire comme suit

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k. \tag{2.6}$$

Les dérivées de $T_n(x)$ sont

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n} k a_k (x-x_0)^{k-1} & T_n'(x_0) &= a_1 \\
T_n''(x) &= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) a_k (x-x_0)^{k-2} & T_n''(x_0) &= 2a_2 \\
&\vdots & &\vdots \\
T_n^{(m)}(x) &= \sum_{k=m}^{n} k(k-1)\ldots(k-m+1) a_k (x-x_0)^{k-m} & T_n^{(m)}(x) &= m! a_m.
\end{aligned}$$

Cas $n = 2$
On cherche a_1 et a_2. Pour que (2.5) soit vérifié, au moins le numérateur $f(x) - T_2(x)$ doit tendre vers zéro, donc il doit être $a_0 = f(x_0)$. Avec ce choix, la limite (2.5) est de la forme $[0/0]$, donc le Théorème de l'Hôpital peut être appliqué :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x) - T_2'(x)}{2(x - x_0)}.$$

Encore une fois, pour que la limite de droite soit 0, le numérateur doit tendre vers 0 :

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) - T_2'(x) = f'(x_0) - T_2'(x_0) = f'(x_0) - a_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = f'(x_0).$$

Donc, par définition de $f''(x_0)$ et grâce à (2.6),

$$\begin{aligned} \frac{f'(x) - T_2'(x)}{x - x_0} &= \frac{f'(x) - a_1 - 2a_2(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} - 2a_2 \\ &\to f''(x_0) - 2a_2, \end{aligned} \tag{2.7}$$

ou

$$\lim_{x\to x_0} f'(x) - T_2'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

En conclusion, on constate que

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Notez que si $f \in C^2((a, b))$, on peut calculer la limite dans la (2.7) en appliquant le Théorème de l'Hôpital plutôt que la définition de dérivée seconde.

Cas $n > 2$
On cherche $a_3, \ldots, a_n$. Si $n > 2$, on peut itérer la procédure. A la m-ème application, $m \le n - 1$, du Théorème de l'Hôpital, on arrive à la limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(m)}(x) - T_n^{(m)}(x)}{n(n-1)\ldots(n-m+1)(x - x_0)^{n-m}}, \tag{2.8}$$

alors le numérateur de la fraction est égal à zéro si et seulement si

$$f^{(m)}(x_0) - T_n^{(m)}(x_0) = f^{(m)}(x_0) - m! a_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_m = \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0) \quad \forall m < n.$$

Enfin, pour déterminer a_n, on part de la (2.8) avec $m = n - 1$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x - x_0)},$$

et on raisonne comme dans (2.7), c'est-à-dire, on utilise la définition de $f^{(n)}(x_0)$ comme limite du rapport incrémental de $f^{(n-1)}$ et le fait que $a_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0)$. Donc, on a

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-x_0)} &= \frac{f^{(n-1)}(x) - (n-1)!a_{n-1} - n!a_n(x-x_0)}{n!(x-x_0)} \\ &= \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)} - a_n \\ &\to 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0).\end{aligned}$$

Encore une fois, si nous supposons que $f \in C^n((a,b))$, nous pouvons conclure en appliquant le Théorème de l'Hôpital.

Unicité

Soit $P_n(x)$ un autre polynôme de degré au plus n qui vérifie (2.5). Ensuite, la différence

$$Q_n(x) = P_n(x) - T_n(x)$$

vérifie

$$Q_n(x) = o((x-x_0)^n) \qquad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Puisque $Q_n(x)$ est également un polynôme de degré au plus n, cela signifie que $Q_n(x) = 0$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ (pour s'en rendre compte, il suffit d'écrire $Q_n(x)$ comme une somme de puissances de $x - x_0$: si par une quelconque absurdité l'un des coefficients était non nul, l'équation précédente ne pourrait être vraie). Par conséquent, les polynômes $P_n(x)$ et $T_n(x)$ coïncident. ■

Définition 2.9 (Développement limité). On appelle l'expression en (2.3) le développement limité de f à l'ordre en x_0. Plus précisément, on dit que f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 si $D_f \cap (x_0-\delta, x_0) \cap (x_0, x_0+\delta) \neq \emptyset$ pour tout $\delta > 0$, et s'il existe un polynôme de degré $\leq n$ tel que

$$f(x) = T_n(x-x_0) + (x-x_0)^n \varepsilon(x-x_0),$$

où ε est une fonction de $D_f \cap (-\delta, \delta) \neq \emptyset$ à valeur dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Observation 2.10. Si $f \in C^n(I)$, $n \in \mathbb{N}$, $x_0 \in I$, alors f a un développement limité au point x_0 donné par (2.3) et (2.4), c'est-à-dire

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Il est tentant de penser que la réciproque est vraie, c'est-à-dire qu'une fonction qui admet un développement limité à l'ordre n en un point x_0 est dérivable n fois en ce point. C'est effectivement le cas si $n = 0$ ou $n = 1$. Dans le premier cas, le développement limité s'écrit juste $f(x) = a_0 + o(1)$ et donc $a_0 = f(x_0)$ par définition d'un $o(1)$. Si $n = 1$ et $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$, alors $a_0 = f(x_0)$ pour la même raison, et par suite :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a_1 + o(1),$$

ce qui implique que l'accroissement fini a une limite égale à a_1, ainsi f est bien dérivable en x_0 et $a_1 = f'(x_0)$. Mais la réciproque est fausse pour $n \geq 2$, autrement dit une fonction peut admettre un développement limité à l'ordre $n \geq 2$ bien qu'elle ne soit pas n fois continûment dérivable.

Si nécessaire, nous utiliserons la **notation** $T_n[f, x_0](x)$ pour préciser que le polynôme $T_n(x)$ est relatif à f et centré en x_0.

Proposition 2.11 (Cas f polynôme)**.** Le polynôme de Taylor d'ordre n généré au point x_0 par un polynôme f de degré $m \leq n$ coïncide avec f quel que soit x_0.

Exemple 2.12. Soit la fonction $f(x) = x^2 + 1$. On a $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ et $f^{(k)}(x) = 0$ lorsque $k \geq 3$. Les polynômes de Taylor (ou Maclaurin) d'ordre 0, 1 et 2 générés par f à l'origine s'obtiennent par

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= f(0) = 1, \\
T_1(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) = 1, \\
T_2(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 = 1 + x^2, \\
T_k(x) &= 1 + x^2 \qquad \text{lorsque } k \geq 3.
\end{aligned}$$

Donc, les polynômes de Taylor d'ordre ≥ 2 sont tous égaux à $f(x) = 1 + x^2$. C'est la raison pour laquelle on définit un polynôme de Taylor d'ordre n et non pas de degré n : le degré d'un polynôme de Taylor peut être inférieur à son ordre.

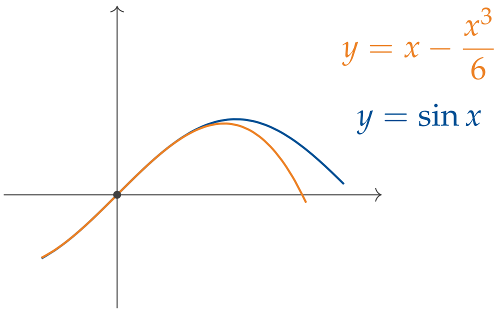
Exemple 2.13. Voici quelques exemples de polynômes de Taylor calculés à différents ordres.

- Polynôme de Taylor d'ordre n généré au point 0 pour la fonction $f(x) = e^x$:

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= f(0) + f'(0)(x - 0) + \frac{f''(0)}{2}(x - 0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x - 0)^3 \\
&\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x - 0)^n \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.
\end{aligned}$$

- Polynôme de Taylor d'ordre 4 généré au point 0 pour la fonction $f(x) = \sin x$:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}(x-0)^4 \\ &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{6} + 0. \end{aligned}$$



- Polynôme de Taylor d'ordre n généré au point 0 pour la fonction $f(x) = (1+x)^m$, $m > n$: on calcule

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= m(m-1)\ldots(m-(k-1))(1+x)^{m-k} \\ &= \frac{m!}{(m-k)!}(1+x)^{m-k} \\ &= \binom{m}{k} k!(1+x)^{m-k}, \end{aligned}$$

donc,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} x^k.$$

Voici quelques **propriétés du polynôme de Taylor**.

- Si f et g sont dérivables n fois en x_0 et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} T_n[\alpha f + \beta g, x_0] &= \alpha T_n[f, x_0] + \beta T_n[g, x_0], \\ T_n[fg, x_0] &= \sum_{k=0}^{n} T_{n-k}[f, x_0] T_k[g, x_0] \\ T_n'[f, x_0] &= T_{n-1}[f', x_0]. \end{aligned}$$

  La dernière propriété stipule que "la dérivée du polynôme de Taylor est le polynôme de Taylor de la dérivée".

- Le polynôme de Maclaurin (c'est-à-dire $x_0 = 0$) d'une fonction impaire ne contient que des puissances impaires de x, tandis que celui d'une fonction paire ne contient que des puissances paires de x. Exemples :

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

Exemple 2.14. Application des propriétés.

- Somme :

$$T_3[\sin x, 0] = x - \frac{x^3}{6}$$
$$T_3[4x + 3x^2, 0] = 4x + 3x^2$$
$$T_3[4x + 3x^2 - \sin x, 0] = 3x + 3x^2 + \frac{x^3}{6}$$

- Produit :

$$T_3[e^x, 0] = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$
$$T_3[x + 2x^2 - x^3, 0] = x + 2x^2 - x^3$$
$$T_3[(x + 2x^2 - x^3)e^x, 0] = x + 3x^2 + \frac{3x^3}{2}$$

- Dérivée :

$$T_3[(1 + x)^4, 0] = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3$$
$$T_3'[(1 + x)^4, 0] = 4 + 12x + 12x^2$$
$$T_2[((1 + x)^4)', 0] = T_2[4(1 + x)^3, 0] = 4 + 12x + 12x^2$$

Exemple 2.15 (Polynôme de Taylor des fonctions composées). Exemples :

- $f(x) = e^{2x+3}$: observons que $e^{2x+3} = e^3 e^{2x}$ et que $2x \to 0$ lorsque $x \to 0$, donc

$$e^{2x+3} = e^3 T_2(x) + o(x^2) = e^3(1 + 2x + 2x^2) + o(x^2) \quad \text{lorsque } x \to 0.$$

➞ Attention
Une erreur assez consiste en substituer $2x + 3$ à x dans le développement de Taylor. L'erreur est la suivante : oublier que $2x + 3$ ne tend pas vers 0 si $x \to 0$!

- Sachant que le polynôme de Taylor d'ordre n généré par $(1 - x)^{-1}$ à l'origine est donné par

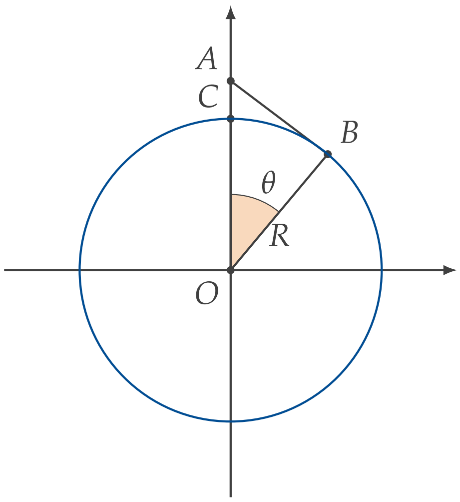
$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$

on déduit

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 - (-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n}).$$

Exemple 2.16. On veut déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude H au-dessus du niveau de la mer. Du point A on voit jusqu'au point B.



On a, pour $H = AC$,

$$\cos\theta = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R+H} = \frac{1}{1+\frac{H}{R}}$$

Pour une altitude "raisonnable", $\frac{H}{R}$ est petit et θ également ($R \simeq 6371$ km). On utilise les deux développements limités

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+\frac{H}{R}} = \left(1+\frac{H}{R}\right)^{-1} \simeq 1 - \frac{H}{R},$$

donc

$$1 - \frac{\theta^2}{2} \simeq 1 - \frac{H}{R}$$

qui conduites

$$\theta \simeq \sqrt{2\frac{H}{R}}.$$

On conclut que la distance CB à la surface de la Terre, c'est-à-dire la longueur de l'arc de cercle, est $\ell = R\theta = \sqrt{2RH}$. Par exemple, du sommet de la tour Eiffel ($H = 324$ m) on peut voir à une distance de 66 kilomètres.

Définition 2.17 (Développement asymptotique en $\pm\infty$)**.** Soit $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. On dit que f admet un développement asymptotique à l'ordre n en $a = +\infty$ s'il existe un polynôme P_n tel que

$$f(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

au voisinage de $+\infty$.
On a la définition analogue au voisinage de $-\infty$.

Observation 2.18. On observe que la fonction $P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas un polynôme, mais a des propriétés similaires. Dans la pratique, on peut obtenir un développement asymptotique de $f(x)$ en $a = +\infty$ (ou en $a = -\infty$) en posant $x = 1/t$ (de sorte que t tend vers 0, avec un signe fixe) et en tentant de développer $f(1/t)$ au voisinage de 0.

Définition 2.19 (Asymptote oblique)**.** Lorsque x et $f(x)$ tendent vers l'infini, on obtient une asymptote oblique (si elle existe) en effectuant un développement limité au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) :

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^k} + o(x^{-k})$$

où c/x^k est le premier terme non nul après b/x.
Dans ce cas, la droite d'équation

$$y = ax + b$$

est l'asymptote oblique à $+\infty$ (respectivement $-\infty$) de de f.

Développements limités usuels avec $x_0 = 0$ (Maclaurin) :

$$\begin{aligned}
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
\log(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tan x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
\arcsin x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots + \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n+1)} x^{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - \arcsin x \\
&= \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\
\tanh x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o(x^7) \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \ldots \\
&\quad \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{n} x^k + o(x^n) \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

avec les cas particuliers

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} + \frac{x^3}{2^4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n! 2^n} x^n + o(x^n) \\
\sqrt{1-x} &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^3}{2^4} - \ldots - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{n! 2^n} x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{2^3} - \frac{5x^3}{2^4} + \ldots + (-1)^n \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{n!2^n} x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + o(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)
\end{aligned}
$$

2.2. Application du Théorème de Peano

2.2.1. Polynôme de Taylor et points critiques

Théorème 2.20. Soit $n \geq 2$ et soit $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dérivable n fois en $x_0 \in (a,b)$, avec

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Alors,

- si n est pair

$$\begin{cases} x_0 \text{ est un point de } \textbf{minimum local strict} \text{ si } f^{(n)}(x_0) > 0, \\ x_0 \text{ est un point de } \textbf{maximum local strict} \text{ si } f^{(n)}(x_0) < 0; \end{cases}$$

- si n est impair, alors x_0 n'est pas un point d'extrême relatif.

Preuve.
En appliquant le Théorème de Peano à la fonction f, pour $x \to x_0$, on a

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n) \quad \sim \quad \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

donc, au voisinage de x_0, le signe de $f(x) - f(x_0)$ est déterminé par celui de $f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$: si n est pair, ce signe est le même que $f^{(n)}(x_0)$, alors que si n est impair, ce signe change d'un côté de x_0 à l'autre à cause du facteur $(x-x_0)^n$. ■

Exemple 2.21. Considérons

- $f(x) = x^4$: on a

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(4)}(0) = 24 > 0,$$

donc $x = 0$ est un point de minimum strict.

- $f(x) = x^3$: on a

$$f'(0) = f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(0) = 12 \neq 0,$$

donc $x = 0$ n'est pas un point d'extrême.

Observation 2.22 (Cas $n = 2$)**.**

$$\begin{aligned}
f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow &\quad x_0 \text{ est un point de minimum local strict} \\
f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow &\quad x_0 \text{ est un point de maximum local strict} \\
f'(x_0) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x_0) = 0 \Rightarrow &\quad \text{on ne peut (encore) rien dire}
\end{aligned}$$

Observation 2.23 (Cas n impaire et $n \geq 3$)**.** Dans ce cas, x_0 est un point d'inflexion horizontal.

2.2.2. Polynôme de Taylor et limites

Le Théorème de Peano facilite souvent le calcul des limites dans le cas de formes indéterminées. Voici quelques exemples.

Exemple 2.24.
- Calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

On peut utiliser le Théorème de l'Hôpital, mais c'est plus rapide avec les polynômes de Maclaurin :

$$\frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(x - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)\right) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{6} + o(x^4)\right) \underset{x \to 0}{\to} \frac{1}{6}.$$

- Calculons

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x + x^2 \cos x - xe^x}{x^3}$$

Une autre fois, on pourrait utiliser le Théorème de l'Hôpital, mais c'est plus rapide avec les polynômes de Maclaurin :

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^4), \\
x^2 \cos x &= x^2(1 + o(x)) = x^2 + o(x^3),
\end{aligned}$$

$$-xe^x = -x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -x-x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3),$$

donc

$$\frac{\sin x + x^2\cos x - xe^x}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(-\frac{2}{3}x^3+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{\to} -\frac{2}{3}.$$

Observation 2.25 (Choisir le bon ordre)**.** Une question naturelle se pose : à quel ordre doit-on s'arrêter dans les développements de Taylor ? Cela dépend évidemment du cas. En particulier,

- si nous utilisons trop peu de termes, nous ne pouvons pas calculer la limite. Par exemple, en s'arrêtant au deuxième ordre

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x-(x+o(x^2))}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^3}$$

  il est impossible de conclure le calcul de la limite ;

- si vous utilisez trop de termes, vous obtenez le bon résultat :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(x-\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\left(\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{5!}+o(x^6)\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{6}-\frac{x^2}{5!}+o(x^3)\right)\\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Exemple 2.26. On souhaite déterminer, si elles existent, les valeurs de $\alpha > 0$ pour lesquelles la limite suivante existe et est différente de 0 :

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha\left(-\arctan\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right).$$

Nous effectuons le changement de variable $z = 1/x$, et réécrivons la limite comme suit

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z^\alpha}\left(-\arctan z+z+z^3\right).$$

On compute

$$-\arctan z+z+z^3 = -z+\frac{z^3}{3}+z+z^3+o(z^4) = \frac{4z^3}{3}+o(z^4),$$

donc on a

$$\lim_{z\to 0} \frac{4z^3 + o(z^4)}{3z^\alpha},$$

et l'unique choix possible est $\alpha = 3$.

2.3. Approximation de fonctions avec le polynôme de Taylor

2.3.1. L'erreur

L'utilisation d'un polynôme de Taylor d'ordre n d'une fonction f en x_0 pour approcher f à proximité de x_0 induit une erreur qui est d'autant plus élevée que le graphe de la fonction s'écarte du graphe de f. L'erreur commise n'est nulle partout que lorsque la fonction f est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Lorsqu'on dispose d'une estimation sur la dérivée $(n+1)$-ème de f, il est possible d'estimer l'erreur. De plus, lorsque l'on utilise un polynôme de Taylor d'ordre de plus en plus grand pour approcher f, on s'attend à ce que l'approximation s'améliore.

Le Théorème de Peano concerne les propriétés d'une fonction f dans la limite $x \to x_0$. Nous pouvons définir l'**erreur** commise lors de l'approximation de la fonction par son polynôme de Taylor :

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x)$$

donc, le Théorème de Peano nous dit que

$$E_n(x) = o((x - x_0)^n) \qquad \text{lorsque } x \to x_0.$$

Il s'agit d'un résultat qualitatif mais pas quantitatif : il indique que l'erreur tend vers zéro mais ne l'estime pas.

Théorème 2.27 (Formule du reste de Lagrange)**.** Soit $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dérivable $n+1$ fois en (a, b), $x_0 \in (a, b)$, T_n le polynôme de Taylor d'ordre n et centre x_0 de la fonction f. Alors, pour chaque $x \in (a, b)$ avec $x \neq x_0$, il existe c entre x et x_0 tel que

$$E_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Observation 2.28. ▶ Dans le cas $n = 0$, le Théorème précédent coïncide avec le Théorème de Lagrange : si f est dérivable dans (a, b), alors pour toute paire de points distincts x, $x_0 \in (a, b)$ il existe un point c, entre x et x_0, tel que

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0).$$

► Pour estimer la valeur absolue de $E_n(x)$, nous pouvons observer que

$$|E_n(x)| \leq \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c\in I} \left| f^{(n+1)}(c) \right|, \tag{2.9}$$

où I est l'intervalle d'extrêmes x, x_0.
En particulier, nous pouvons dire que, si

$$\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M \qquad \forall x \in (a,b),$$

alors

$$|E_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M \qquad \forall x \in (a,b). \tag{2.10}$$

Preuve.

Par le Théorème de Lagrange, le résultat est vrai si $n = 0$. Par conséquent, par le principe d'induction, il suffit de montrer que si le résultat est vrai pour un certain $(n-1) \in \mathbb{N}$, alors il est aussi vrai pour n.
Soit alors f dérivable $n+1$ fois dans (a,b). Appliquons le Théorème de Cauchy à

$$E_n[f,x_0](x) = f(x) - T_n[f,x_0](x) \qquad \text{et} \qquad G_n(x) = (x-x_0)^{n+1}$$

c'est-à-dire, il existe c_n, entre x et x_0, tel que

$$\begin{aligned}
\frac{E_n[f,x_0](x)}{(x-x_0)^{n+1}} &= \frac{E_n[f,x_0](x) - E_n[f,x_0](x_0)}{G_n(x) - G_n(x_0)} \\
&= \frac{(E_n[f,x_0])'(c_n)}{G_n'(c_n)} \\
&= \frac{E_{n-1}[f',x_0](c_n)}{(n+1)(c_n-x_0)^n}.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse d'induction, le résultat (dans ce cas appliqué à f') est vrai pour $n-1$. Par conséquent, il existe c entre c_n et x_0 (donc également entre x et x_0) tel que

$$\frac{E_n[f,x_0](x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{E_{n-1}[f',x_0](c_n)}{(n+1)(c_n-x_0)^n} = \frac{(f')^{(n)}(c)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

■

Exemple 2.29. Nous voulons trouver une évaluation approximative de $\sqrt{17}$ avec une erreur inférieure à 10^{-9}.
On note que 17 est proche de 16, dont on connaît la racine carrée. Par conséquent,

il peut être utile d'écrire

$$\sqrt{17} = \sqrt{1+16} = 4\sqrt{1+\frac{1}{16}},$$

et utiliser le développement de Taylor de la fonction $f(x) = 4\sqrt{1+x}$, à évaluer pour $x = 1/16$ et avec $x_0 = 0$. On a donc

$$\left|\sqrt{17} - T_n\left(\frac{1}{16}\right)\right| \leq 10^{-9}.$$

Pour le (2.9), il suffit de trouver n tel que

$$4\frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c\in(0,1/16)} \left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 10^{-9}.$$

Puisque $\left|f^{(n)}(x)\right| = \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}(1+x)^{-n-1+1/2}$, on a

$$\frac{4}{2^{4n+4}(n+1)!}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{n+1}}(1+c)^{-n-1/2} \leq 10^{-9}.$$

L'extrême supérieur d'une puissance négative de $1+c$ est plus petite que 1, donc il suffit de choisir n tel que

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2^{5n+3}(n+1)!} < 10^{-9}.$$

En choisissant $n = 6$, l'expression de gauche se réduit à

$$\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{7!\,2^{33}} = \frac{3\cdot 11}{2^{37}} = \underbrace{\frac{33}{128}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2^{30}}}_{10^{-9}} < 10^{-9}.$$

Donc,

$$T_6\left(\frac{1}{16}\right) - 10^{-9} < \sqrt{17} < T_6\left(\frac{1}{16}\right) + 10^{-9}.$$

Exemple 2.30. La linéarisation de $f(x) = \sin x$ en $x = 0$ donne $\sin x \simeq x$. Quelle est la précision de cette approximation lorsque $|x| \leq 0.5$? Comme

$$\max_{|x|\leq 0.5}\left|f''(x)\right| = \max_{|x|\leq 0.5}|-\sin x| = \sin(0.5),$$

l'estimation en (2.10) implique

$$\frac{1}{2^3}\sin(0.5) \leq 0.06 \qquad \forall x\in[-0.5, 0.5].$$

2.3.2. Série de Taylor

Soit f une fonction dérivable autant de fois que souhaité dans l'intervalle (a, b), c'est-à-dire $f \in C^\infty((a, b))$. Soit $x_0 \in (a, b)$, et soit

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

le polynôme d'ordre n de f centré en x_0. $T_n(x)$ peut être considéré comme la somme partielle d'une série de puissances.

Définition 2.31 (Série de Taylor)**.** Soit $f \in C^\infty((a, b))$. On dit que la série de Taylor de f centrée en $x_0 \in (a, b)$ (aussi série de Maclaurin si $x_0 = 0$) est la série de puissances

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{2.11}$$

Peut-on dire que la série dans (2.11) converge pour tout $x \in (a, b)$? Si la série converge pour un certain $x \in (a, b)$, sa somme est-elle $f(x)$?
Les réponses ne sont pas toujours positives !
La convergence de la série de Taylor vers $f(x)$ est liée au comportement de l'erreur $E_n(x)$

$$E_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

quand $n \to +\infty$.

Proposition 2.32. Soit $f \in C^\infty((a, b))$. Soit x, $x_0 \in (a, b)$, $x \neq x_0$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} E_n(x) = 0.$$

Exemple 2.33. Considérons le développement de Maclaurin de e^x avec la forme du reste de Lagrange :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x), \qquad E_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1},$$

où c est compris entre 0 et x. Donc $0 < e^c \leq \max\{1, e^x\}$, et

$$\lim_{n\to\infty} |E_n(x)| \leq \max\{1, e^x\} \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\infty\}.$$

En raisonnant de la même manière, on obtient

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} && \forall x \in \mathbb{R} \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k && \forall x \in (-1,1) \\
\log(1+x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k && \forall x \in (-1,1] \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k && \forall x \in (-1,1) \quad \text{si } \alpha \in \mathbb{N} \\
\arcsin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2 (2k+1)} x^{2k+1} && \forall x \in [-1,1] \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} && \forall x \in [-1,1]
\end{aligned}$$

2.4. Exercices

✎ **Exercice 2.1** (Somme et produit). Calculer les DL suivants au point 0 à l'ordre n:

- $f(x) = (1-x)^{-1} - e^x \quad n = 3$
- $f(x) = \log^2(1+x) \quad n = 4$
- $f(x) = \sin x \cos(2x) \quad n = 5$
- $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \quad n = 4$
- $f(x) = \cos x \log(1+x) \quad n = 4$
- $f(x) = (1+x^3)\sqrt{1-x} \quad n = 3$
- $f(x) = (1+x)^{\frac{3}{2}} + (1+x)^{-\frac{3}{2}} \quad n = 3$

✎ **Exercice 2.2.** Calculer les DL suivants à l'ordre n au point x_0 :

- $f(x) = \sin x \quad n = 3,\, x_0 = \frac{\pi}{3}$
- $f(x) = \cos x \quad n = 3,\, x_0 = \frac{\pi}{6}$
- $f(x) = \sin x - 1 - \cos^2 x \quad n = 3,\, x_0 = 0$
- $f(x) = \sin x - 1 - \cos^2 x \quad n = 3,\, x_0 = \frac{\pi}{2}$
- $f(x) = \log(x^2 + x + 1) \quad n = 2,\, x_0 = 0$
- $f(x) = e^{x^2+x} \quad n = 3,\, x_0 = 0$
- $f(x) = \cos \sqrt{x} \quad n = 3,\, x_0 = \pi^2$
- $f(x) = \log(1 + \sin x) \quad n = 4,\, x_0 = 0$
- $f(x) = 1 - \sqrt{1 + \sin x} \quad n = 2,\, x_0 = 0$
- $f(x) = e^{x^2} + \cos \sqrt{2x} \quad n = 4,\, x_0 = 0$
- $f(x) = \sqrt{\cos x} \quad n = 6,\, x_0 = 0$
- $f(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x} \quad n = 5,\, x_0 = 0$
- $f(x) = \sqrt[3]{2x} - \sin(\pi x) \quad n = 2,\, x_0 = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}} - 1 - \log x \quad n = 2,\, x_0 = 1$

✎ **Exercice 2.3.** Calculer les DL suivants au point 0 :

- $f(x) = \log\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4
- $f(x) = e^{\sin x}$ à l'ordre 4
- $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5
- $f(x) = \dfrac{1}{1 + x + x^2}$ à l'ordre 4
- $f(x) = \dfrac{\log(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3

✎ **Exercice 2.4** (DL asymptotiques). Calculer les DL suivantes

- $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
- $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\sqrt{1+x^2}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 1
- $f(x) = e^{2/x}$ en $+\infty$ à l'ordre 3
- $f(x) = e^{-2/x}$ en $-\infty$ à l'ordre 3
- $f(x) = \dfrac{x^2-x}{1+x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2
- $f(x) = \dfrac{\sqrt{3+x+x^2}-\sqrt{2-x+x^2}}{x}$ en $+\infty$ à l'ordre 2

✎ **Exercice 2.5** (DL et limites)**.** Calculer les DL en $x_0 = 0$ à l'ordre 3 de

- $f(x) = \log(1+\sin(2x))$. En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\sin(2x))}{2x^2}$$
- $f(x) = \log(1+x\cos^2 x)$. En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x\cos^2 x)}{4x}$$
- $f(x) = \log(1-\sin^2 x)$. En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-\sin^2 x)}{2x^2}$$
- $f(x) = \log(1-x\cos^2 x)$. En déduire la limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x\cos^2 x)}{3x}$$

✎ **Exercice 2.6** (Calculs de limites)**.** Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\sin x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\cosh \frac{1}{x^2}\right)^{x^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-\sin x} + \frac{1}{x-\sinh x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{7}{x}\right)^{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{\tan x - \arcsin x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^x}{\arcsin x - x^2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\log(1+x)}$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\tanh x - x)}{\log(1+x)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
- $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
- $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2} - x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,(\cosh x + \cos x - 2)}{\sinh x + \sin x - 2x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\,(\cosh x + \cos x - 2)}{\tanh x + \tan x - 2x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(2x)}{e^x - 1 - x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x - \frac{3}{2}x^2}{x^4}$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2(\tan x - \sin x) - x^3}{x^5}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - x\cos x}{x - \sin x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sinh x + \sin x - 2x}{x\,(\cosh x + \cos x - 2)}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x \log x}{x^2 - 1}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 + \log(1+x)}{\tan x - x}$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1 + x\arctan x) + 1 - e^{x^2}}{\sqrt{1 + 2x^4} - 1}$

Exercice 2.7. On considère la fonction $f(x) = x\sqrt{x^2 + x}$.

- Écrire le DL de $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ en $\pm\infty$ à l'ordre 3.
- En déduire le développement asymptotique de f à l'ordre 2 en $\pm\infty$.
- Écrire les équations des asymptotes pour $x = \pm\infty$.

Exercice 2.8. Écrire les DL asymptotiques de

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{2x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{2 + \frac{1}{x}}$$

en $+\infty$ à l'ordre 3.
En déduire le DL asymptotique de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
Écrire l'équation de l'asymptote de $h(x)$ en $+\infty$.

Exercice 2.9. Écrire les DL asymptotiques de

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2x}\right) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{2x}}$$

en $+\infty$ à l'ordre 3.

En déduire le DL asymptotique de $h(x) = \dfrac{xf(x)}{g(x)}$ en $+\infty$ à l'ordre 3.
Écrire l'équation de l'asymptote de $h(x)$ en $+\infty$.

3. Fonctions de plusieurs variables

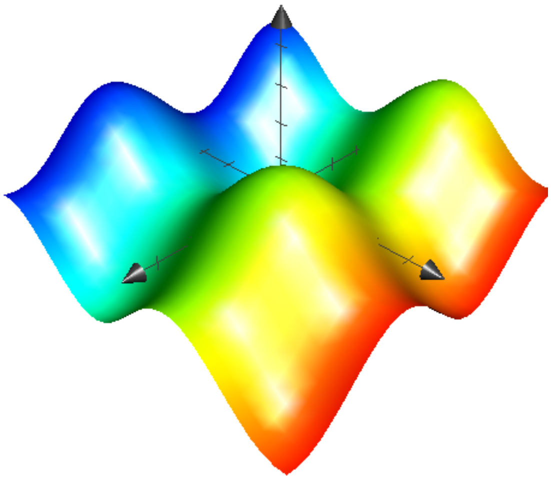
Table des matières

3.1 Domaine et graphe 43
3.2 Limites et continuité 48
3.2.1 Voisinages 48
3.2.2 Limites et continuité 49
3.2.3 Coordonnées polaires 53
3.3 Dérivées partielles 56
3.3.1 Dérivées directionnelles et partielles 56
3.3.2 Différentiabilité 66
3.4 Exercices 71

Les fonctions à plusieurs variables, souvent avec des valeurs vectorielles, sont fréquemment utilisées dans les applications de l'analyse mathématique. Les différentes forces exercées sur un pont suspendu sont, en général, différentes en différents points du pont et sont décrites par des champs vectoriels, c'est-à-dire des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. De la même manière, la vitesse d'un fluide autour d'un solide (l'air autour d'un avion, l'eau autour de la coque d'un bateau) ou le champ magnétique produit par un courant électrique sont des fonctions de plusieurs variables spatiales et éventuellement du temps, et prennent des valeurs dans $\mathbb{R}^3$.
Dans ce chapitre, nous allons donner une introduction aux fonctions de plusieurs variables avec des valeurs scalaires, comme la température d'un gaz dans un récipient. Ces quantités physiques dépendent, en général, de trois variables spatiales et du temps : ce sont donc des fonctions de quatre variables réelles à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1. Domaine et graphe

Définition 3.1 (Fonction réelle de plusieurs variables réelles)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, et soit $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$. On dit d'une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qu'elle est une fonction réelle de plusieurs variables réelles, avec un domaine $D_f = X$.



Exemple : $f(x,y) = \sin x \sin y$

Dans les exemples, nous traiterons souvent les cas $n = 2$ et $n = 3$. Pour cette raison, nous désignerons un point générique de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^2$, et $\mathbb{R}^3$ par

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \qquad \boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Définition 3.2 (Fonctions partielles). Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, et $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in X$. Les fonctions

$$g_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \qquad \forall i = 1, \ldots, n$$

définies sur un intervalle ouvert contenant a_i, sont appelées les fonctions partielles associées à f au point $(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Comme dans le cas $n = 1$, le domaine naturel d'une fonction f de n variables réelles est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ pour les éléments duquel il est possible d'écrire $f(\boldsymbol{x})$.

Exemple 3.3. ▶ Les domaines naturels des fonctions

$$f(x,y) = 3x^2y + 2\sin(x \log y) \qquad \text{et} \qquad g(x,y,z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

sont, respectivement, les ensembles

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y > 0\right\} \qquad \text{et} \qquad D_g = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$$

c'est-à-dire, le demi-plan supérieur de $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$ excluant l'origine.

▶ Le domaine naturel de

$$f(x,y) = \sqrt{\frac{x+y}{2x+y}}$$

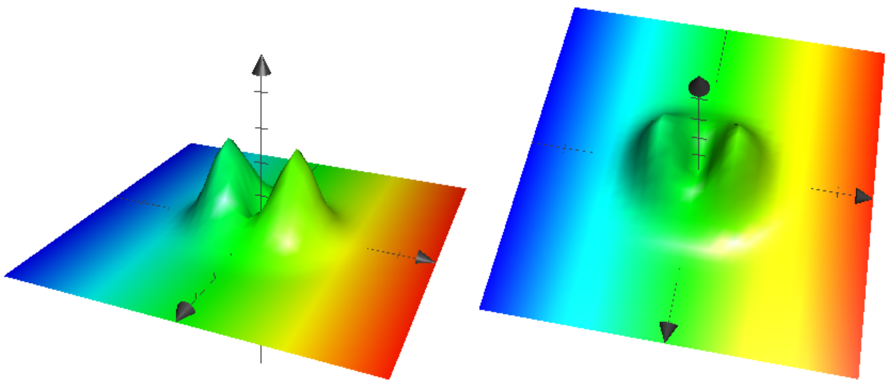
est

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 2x+y \neq 0, \quad \frac{x+y}{2x+y} \geq 0\right\}$$
$$= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y \geq 0 \quad \text{et} \quad 2x+y > 0\right\}$$
$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x+y \leq 0 \quad \text{et} \quad 2x+y < 0\right\}$$

Définition 3.4 (Graphe et image)**.** Le graphe (ou surface représentative) et l'image de $f : X \to \mathbb{R}$ sont les ensembles

$$G_f = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) : \quad \boldsymbol{x} \in X\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \qquad \text{et} \qquad f(X) = \{f(\boldsymbol{x}) : \quad \boldsymbol{x} \in X\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Exemple 3.5. Voici des exemples de graphes.

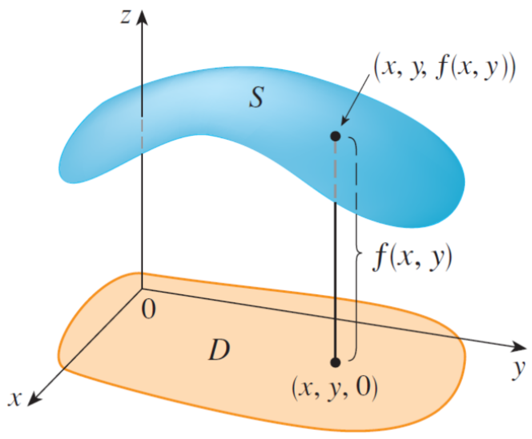


$$f(x,y) = (2x^2 + 7y^2)e^{-x^2-y^2}$$

Lorsque $n = 2$, le graphe

$$G_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad z = f(x,y),\ (x,y) \in D_f\right\}$$

est tridimensionnel. Les axes relatifs aux variables, x et y, sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine D_f apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $(x,y) \in D_f$, dont l'image est $f(x,y) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(x,y,f(x,y)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions. Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.



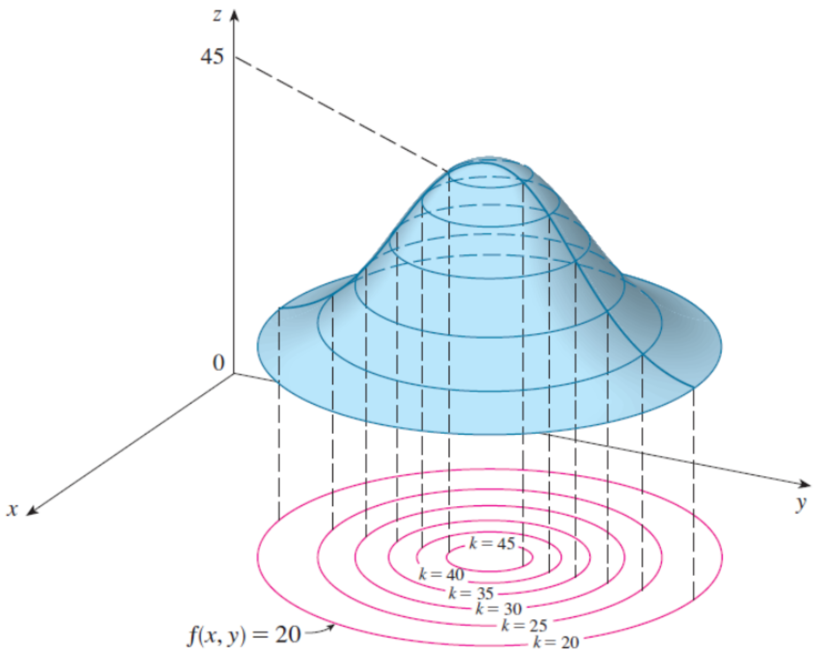
Pour $n > 2$, la représentation plane devient malheureusement impraticable.

Dans le cas $n = 2$, le graphe d'une fonction peut également être représenté à l'aide de ses courbes de niveau

Définition 3.6 (Courbes ou lignes de niveau)**.** Soit $k \in \mathbb{R}$ et $f : D_f \to \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. L'ensemble

$$\{(x, y) \in D_f : \quad f(x, y) = k\}$$

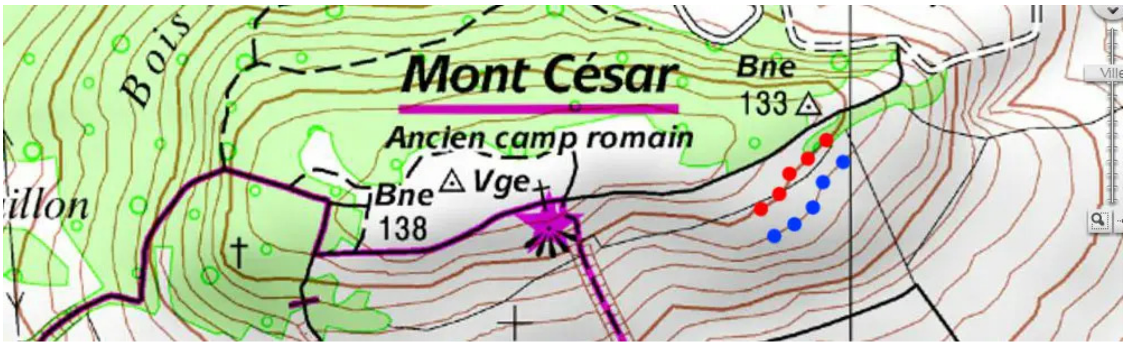
est la courbe de niveau k de la fonction f. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace. La courbe de niveau k est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal $z = k$.



Relation entre le graphe d'une fonction et ses courbes de niveau. Géométriquement, la ligne de niveau est la projection sur le plan (x, y) de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan d'équation $z = k$.

On peut les voir comme des coupes horizontales du graphe d'une fonction de deux variables et on obtient, de façon générale, des courbes planes, dites courbes de niveau. En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude.
Par exemple, si $f(x, y)$ désigne la hauteur du sol au point (x, y) sur une carte d'altitude, l'altitude est constante le long des courbes de niveau (isohypses) ; si, par contre, $f(x, y)$ désigne la pression atmosphérique, la pression est constante le long des courbes de niveau (isobares).

Exemple 3.7. On peut considérer le relief d'une région comme étant le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau nous indique les points de même altitude (ou de même niveau). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la carte topographique du relief. La lecture d'une carte topographique permet non seulement d'obtenir des mesures quantitatives du relief, mais aussi de faire rapidement des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude ; les crêtes, les fonds, les vallées, les cols, etc. ; les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, puisqu'ils correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.



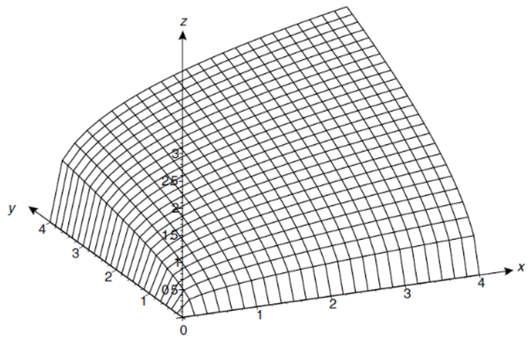
Exemple 3.8 (Cobb-Douglas)**.** La fonction de production de Cobb-Douglas

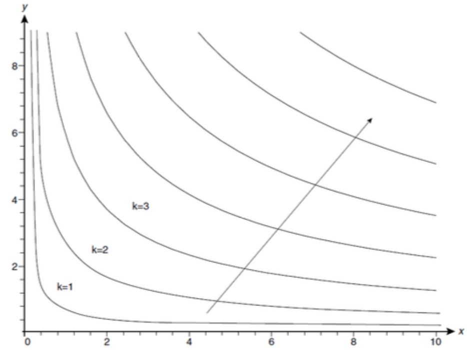
$$f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$$

s'écrit

$$f(x, y) = x^\alpha y^\beta, \qquad \alpha, \beta > 0$$

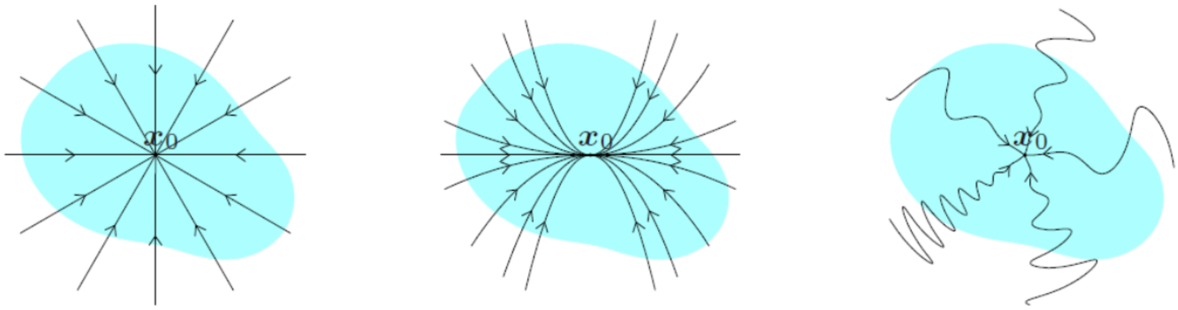
Les courbes de niveau d'une telle fonction sont nommées isocantes ou courbes d'isoproduction. Pour un niveau fixé $k > 0$ de production, l'équation $x^\alpha y^\beta = k$ détermine les points du plan (x, y) donnant toutes les combinaisons des quantités de facteurs qui permettent de produire ce niveau k.





3.2. Limites et continuité

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. Toutefois, un nouvel élément entre en jeu : les limites unilatérales (i.e. de la gauche et de la droite) perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné peuvent suivre divers axes. Ainsi, l'ensemble des points en lesquels une limite peut être considérée, doit être défini en tenant compte de toutes les possibilités d'accès. Une façon commode de procéder s'appuie sur la notion de boule ouverte dans $\mathbb{R}^n$ qui généralise celle d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Pour cela il faut utiliser la notion de norme dans $\mathbb{R}^n$ qui généralise la notion de distance dans $\mathbb{R}$.



Différents façons de s'approcher au point $\boldsymbol{x}_0$.

3.2.1. Voisinages

Comme dans le cas $n = 1$, la distance est utilisée pour définir les contours sphériques.

> **Définition 3.9** (Voisinage). Pour un ensemble de $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et $r \in \mathbb{R}^+$, on dit qu'un voisinage (sphérique) de $\boldsymbol{x}$ de rayon r est l'ensemble
>
> $$B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\}.$$

Par analogie avec le cas $n = 3$, on dit aussi que $B_r(\boldsymbol{x})$ est une boule de centre $\boldsymbol{x}$ et de rayon r (dans $\mathbb{R}^2$, $B_r(\boldsymbol{x})$ est un disque).

Définition 3.10 (Boule ouverte et fermée)**.** Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme on appelle

- boule ouverte de centre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| < r\}$$

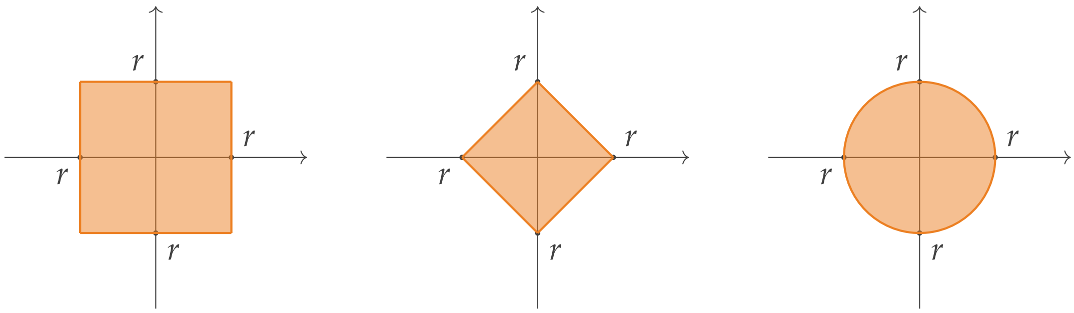
- boule fermée de centre $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B_r(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n : \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \leq r\}$$

Exemple 3.11. On veut dessiner les boules fermées de centre $(0,0)$ et de rayon $r > 0$ relatives aux trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. La boule fermées de centre $(0,0)$ et rayon $r > 0$ est l'ensemble de points

$$B_r((0,0)) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x,y) - (0,0)\| \leq r\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \|(x,y)\| \leq r\right\}.$$

- Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ on a : $\|(x,y)\|_\infty < r \quad \Leftrightarrow \quad \sup\{|x|,|y|\} \leq r$
- Pour la norme $\|\cdot\|_1$ on a : $\|(x,y)\|_1 < r \quad \Leftrightarrow \quad |x| + |y| \leq r$
- Pour la norme $\|\cdot\|_2$ on a : $\|(x,y)\|_2 < r \quad \Leftrightarrow \quad |x|^2 + |y|^2 \leq r^2$



$\sup\{|x|,|y|\} \leq r$ $\qquad$ $|x| + |y| \leq r$ $\qquad$ $|x|^2 + |y|^2 \leq r^2$

3.2.2. Limites et continuité

Si la théorie est très similaire à celle du cas $n = 1$ (hormis les concepts liés à la monotonie, puisque $\mathbb{R}^n$ n'est pas un ensemble ordonné), le calcul opérationnel est plus complexe.

Définition 3.12 (Limite)**.** Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f : X \to \mathbb{R}$.

- On dit que $\ell \in \mathbb{R}$ est la limite de $f(\boldsymbol{x})$ pour $\boldsymbol{x}$ tendant vers $\boldsymbol{x}_0$ et s'écrit

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$$

si et seulement si pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall \boldsymbol{x} \in X \quad \text{t.q.} \quad 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(\boldsymbol{x}) - \ell| < \varepsilon.$$

- On dit que f tend vers $+\infty$ (respectivement, $-\infty$) et s'écrit

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = +\infty \qquad \left(\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = -\infty\right)$$

si, pour tout $M > 0$ (respectivement, $N < 0$), il existe $\delta > 0$ tel que

$$\boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad f(\boldsymbol{x}) > M \quad (f(\boldsymbol{x}) < N)\,.$$

Observation 3.13. Demander

$$\boldsymbol{x} \in X \quad \text{t.q.} \quad 0 < \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta \qquad \text{ou} \qquad \boldsymbol{x} \in X \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \quad \text{et} \quad \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| < \delta$$

que est équivalent à

$$\boldsymbol{x} \in X \cap B_\delta(\boldsymbol{x}_0)$$

Exemple 3.14. Calculons

- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(5,1)} \frac{xy}{x+y} = \frac{5}{6}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} 3x^2z + yx\cos(\pi x - \pi z) = -12 + 2\cos(3\pi) = -14$
- Voici un cas où la fonction n'est pas continue au point en question (clairement la division par zéro)

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2}$$

Cependant, cela ne signifie pas que la limite ne peut pas être effectuée. Dans le cas de cette limite, remarquez que nous pouvons factoriser à la fois le numérateur et le dénominateur de la fonction comme suit :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x^2 - xy - y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(2x+y)(x-y)}{(x-y)(x+y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x+y}{x+y} = \frac{3}{2}$$

Observation 3.15. ▶ L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

- Si f a pour limite ℓ en $\boldsymbol{x}_0$, la restriction de f à toute courbe continue (non seulement les droites !) passant par $\boldsymbol{x}_0$ admet la même limite ℓ.
- En pratique, pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en $\boldsymbol{x}_0$, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par $\boldsymbol{x}_0$ qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limi-

tes différentes. Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.

- **→ Attention** Si la restriction à toute droite passant par $\boldsymbol{x}_0$ admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe !

Définition 3.16 (Points d'accumulation et isolé)**.** Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Un point $\boldsymbol{x}_0$ dans R^n est d'accumulation pour X dans $\mathbb{R}^n$ si chaque voisinage de x_0 contient une infinité de points de X. Un point $\boldsymbol{x}_0$ dans X qui n'est pas un point d'accumulation pour X est un point isolé de X.

Définition 3.17 (Continuité)**.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$. Alors, on dit que f est continue dans $\boldsymbol{x}_0 \in X$ si $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{x}_0)$ pour $x \to \boldsymbol{x}_0$ ou si $\boldsymbol{x}_0$ est un point isolé de X.
De plus, on dit que f est continue dans X si elle est continue en tout point $\boldsymbol{x} \in X$, auquel cas on l'écrit $f \in C(X)$.

Exemple 3.18.
- $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).
- $f(x,y,z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans $\mathbb{R}^3$ (somme d'un polynôme et d'une exponentielle).
- $f(x,y) = \log(x+y^2) - 3$ est continue dans $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x + y^2 > 0\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.
- Il suit immédiatement de la définition de limite et de fonction continue que les n fonctions
$$(x_1, \ldots, x_n) \to x_i \quad 1 \leq i \leq n$$
sont continues en $\mathbb{R}^n$.
- La fonction $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{2x+y}}$ est continue dans son domaine naturel, étant une combinaison linéaire, un quotient et une composition des fonctions continues suivantes :
$$(x,y) \to x \qquad (x,y) \to y \qquad t \to \sqrt{t}, \quad t \geq 0.$$
- Pour calculer
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$
nous observons que $x^2 \leq x^2 + y^2$. Donc
$$0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |y| \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

Puisque $|y| \to 0$ par $(x,y) \to (0,0)$, la limite est 0 par le Théorème de comparaison.

Définition 3.19 (Prolongement par continuité)**.** Soit f une fonction de $D_f \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0} f(\boldsymbol{x}) = \ell$, la fonction

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{pour } \boldsymbol{x} \in D_f \setminus \{\boldsymbol{x}_0\} \\ \ell & \text{pour } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} \end{cases}$$

est la seule fonction continue en $\boldsymbol{x}_0$ dont la restriction à $D_f \setminus \{\boldsymbol{x}_0\}$ soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à $\boldsymbol{x}_0$.

Les fonctions continues de plusieurs variables ont les mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas), etc., de fonctions continues.

Exemple 3.20. Considérons la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\cos y \sin x}{x} & x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ \cos y & x = 0,\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Peut-on dire que f est continu dans $(0,0)$? Est-elle continue partout ?
On a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos y \sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{si } x \neq 0$$

et

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos y = \lim_{y\to 0} \cos y = 1 \qquad \text{si } x = 0$$

Donc, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1.$$

Exemple 3.21. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

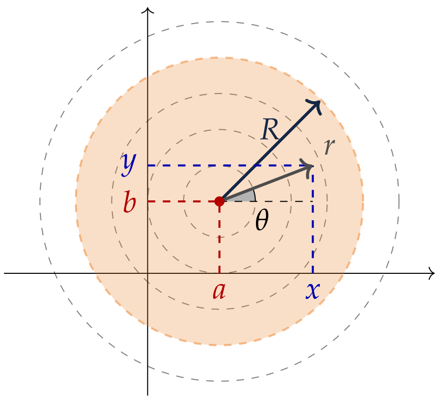
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Comme $f(0,t) = 0$ et $f(t,t) = \frac{1}{2}$, alors f ne peut pas être prolongée par continuité en $(0,0)$.

3.2.3. Coordonnées polaires

En pratique, lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (a, b) grâce aux relations :

$$\begin{aligned} x &= a + r\cos\theta \\ y &= b + r\sin\theta \end{aligned} \qquad \text{avec } r > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in (0, 2\pi).$$



$$B_R((a,b)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \|(x-a, y-b)\| < R\}$$

Dans cette écriture, r représente la distance entre (a, b) et (x, y) de sorte que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) \qquad \forall\theta \in (0, 2\pi).$$

On peut alors utiliser la suivante condition suffisante :

Proposition 3.22. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction

$$s : (r, \theta) \to s(r, \theta), \qquad r > 0$$

telle que

- $|f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta) - \ell| \leq |s(r, \theta)|$ au voisinage de (a, b)
- $|s(r, \theta)|$ est bornée pour chaque $\theta \in (0, 2\pi)$ pour r fixe
- $s(r, \theta) \underset{r\to 0}{\to} 0$ pour chaque $\theta \in (0, 2\pi)$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell.$$

Exemple 3.23. ▶ Montrons que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$$

n'existe pas. On a

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\log(1+x^3)}{y(x^2+y^2)} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{y(x^2+y^2)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^4\theta}{r\sin\theta(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos^4\theta}{\sin\theta}\end{aligned}$$

On a que

$$|s(r,\theta)| = \frac{r\cos^4\theta}{|\sin\theta|} \leq \frac{r}{|\sin\theta|}$$

n'est pas bornée pour chaque $\theta \in (0,\pi)$ (il suffit de considérer $\theta = \pi$), donc

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0} \frac{r\cos^4\theta}{\sin\theta} = 0 \qquad \text{si } \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &\lim_{r\to 0} \frac{r\cos^4\theta}{\sin\theta} = \infty \qquad \text{si } \theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

- Montrons que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y^2}{x^2+3y^2} = 0$$

On a que

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y^2}{x^2+3y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+3y^2} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{r^2\cos^2\theta + 3r^2\sin^2\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta} \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+2\sin^2\theta}\end{aligned}$$

Puisque

$$|s(r,\theta)| = \left|\frac{r^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{1+2\sin^2\theta}\right| \leq r^2\sin^2\theta\cos^2\theta \leq r^2 \quad \text{pour chaque } \theta \in (0,2\pi)$$

et $s(r,\theta) \underset{r\to 0}{\to} 0$, on en déduit la thèse.

Exemple 3.24. Montrons de deux manières que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

n'existe pas.
Première méthode : on utilise la définition de limite. On calcule

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,0)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2} = 1,\\
\lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{(0,y)\to(0,0)} \frac{-y^2}{y^2} = -1,
\end{aligned}$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.
Deuxième méthode : la seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\\
&= \lim_{r\to 0} \frac{r^2((\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2)}{r^2((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2)}\\
&= \lim_{r\to 0}(\cos\theta)^2-(\sin\theta)^2\\
&= \cos(2\theta)
\end{aligned}$$

Le résultat varie selon la direction θ, donc le limite n'existe pas.

Exemple 3.25. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Pour trouver la valeur de la limite, si elle existe, il suffit de calculer la limite d'une restriction à une courbe continue passant par $(0,0)$: comme $f(0,t) = 0$ pour tout t, si la limite existe elle est 0. Pour vérifier que c'est bien la limite on passe en coordonnées polaires : on pose $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ pour $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi]$; on obtient

$$f(x(r,\theta), y(r,\theta)) = \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{r^2\,((\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2)}} = r\cos\theta\sin\theta = \frac{r}{2}\sin(2\theta).$$

Comme

$$|f(x(r,\theta), y(r,\theta))| \le \frac{r}{2}|\sin(2\theta)| \le \frac{r}{2} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$$

indépendamment de θ, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

et f peut donc être prolongée par continuité en $(0,0)$ par la valeur 0.

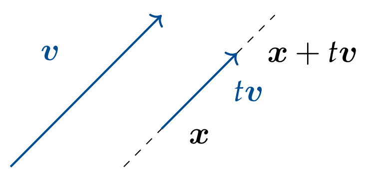
3.3. Dérivées partielles

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable réelle, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction horizontale. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f . Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$, contient le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^3$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction f_{y_0} d'une seule variable définie par $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si f_{y_0} est dérivable en x_0, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (x_0, y_0).

3.3.1. Dérivées directionnelles et partielles

Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et soit $f : X \to \mathbb{R}$. Soit $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ une **direction** dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire un vecteur de norme 1, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$, aussi appelé **vecteur unitaire** dans $\mathbb{R}^n$. Considérons la droite passant par le point $\boldsymbol{x} \in X$ avec la direction $\boldsymbol{v}$, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} : \quad t \in \mathbb{R}\}.$$



Puisque X est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v} \in X$ pour chaque $|t| < \delta$. Alors, pour chaque $|t| < \delta$, la fonction d'une variable

$$\varphi_{\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$$

est bien définie, ainsi que son rapport incrémental

$$\frac{\varphi_{\boldsymbol{v}}(t) - \varphi_{\boldsymbol{v}}(0)}{t} = \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

Définition 3.26 (Dérivée directionnelle)**.** Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f : X \to \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in X$ et $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\boldsymbol{v}\| = 1$. Si la fonction

$$t \to \varphi_{\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v})$$

est dérivable en $t = 0$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} = \varphi'_{\boldsymbol{v}}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x})}{t}$$

est appelée la dérivée dans la direction $\boldsymbol{v}$ de f dans $\boldsymbol{x}$.

La dérivée directionnelle représente le taux de variation instantané de f se déplaçant du point $\boldsymbol{x}$ le long de la direction $\boldsymbol{v}$. En particulier,

$$\begin{array}{lll} \text{si} \ \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} > 0, & f & \text{alors croît dans cette direction} \\ \text{si} \ \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}} < 0, & f & \text{alors decroît dans cette direction} \end{array}$$

Exemple 3.27. Calculons la dérivée de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en $(1, 2)$ selon la direction $\boldsymbol{v} = (3, 5)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1,2) = \lim_{h \to 0} \frac{((1+3h)^2 - (2+5h)^2 - (1^2 - 2^2))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-16h^2 - 14h}{h} = -14$$

Exemple 3.28. On calcule la dérivée directionnelle de $f(\boldsymbol{x}) = x^2 y$ au point $\boldsymbol{x}_0 = (-1, 3)$ selon la direction parallèle et avec la même orientation du vecteur $(2, 1)$. Tout d'abord, il faut se rappeler que $\boldsymbol{v}$ doit être un vecteur unitaire, donc

$$\boldsymbol{v} = \frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

On a

$$\varphi_{\boldsymbol{v}}(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) = \left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 \left(3 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right)$$

d'où

$$\varphi'_{\boldsymbol{v}}(t) = \frac{4}{\sqrt{5}} \left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right) \left(3 + \frac{t}{\sqrt{5}}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}} \left(-1 + \frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \varphi'_{\boldsymbol{v}}(0) = -\frac{12}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{11}{\sqrt{5}}.$$

Pour les dérivées dans les directions parallèles aux axes, identifiées par la base canonique $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$, une notation et une nomenclature spécifiques sont utilisées.

Définition 3.29 (Dérivée partielle). Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \in X$ et $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. S'il existe la dérivée dans la direction $\boldsymbol{e}_k$ de f dans $\boldsymbol{x}$, cette dérivée est appelée dérivée partielle par rapport à x_k de f en $\boldsymbol{x}$ et est notée par

$$\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}) \quad \text{ou} \quad f_{x_k}(\boldsymbol{x}) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_k}(\boldsymbol{x})$$

Définition 3.30 (Fonction dérivable). Si toutes les n dérivées partielles $f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})$ existent, on dit que f est dérivable en $\boldsymbol{x}$.
On dit que f est dérivable dans X si elle est dérivable dans chaque $\boldsymbol{x} \in X$.

Définition 3.31 (Fonction $C^1(X)$). Si toutes les n dérivées partielles $f_{x_1}(\boldsymbol{x}), \ldots, f_{x_n}(\boldsymbol{x})$ existent et elles sont aussi continues dans X, on dit que f est de classe C^1 dans X et on l'écrit $f \in C^1(X)$.

En particulier, si $n = 2$ on a $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (0, 1)$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + t, y) - f(x, y)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y + t) - f(x, y)}{t}$$

qui coïncident avec les dérivées des fonctions d'une variable

$$x \to f(x, y) \qquad \text{et} \qquad y \to f(x, y).$$

Ceci est vrai pour tout n : la dérivée partielle $f_{x_k}(\boldsymbol{x})$ est la dérivée de la fonction à une variable

$$x_k \to f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$$

où $x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n$ sont pris comme constantes.
Cela facilite, dans de nombreux cas, le calcul des dérivées partielles : pour calculer f_{x_k}, on applique les méthodes de calcul de la dérivée d'une fonction d'une seule variable, en traitant les autres variables comme des constantes.

Exemple 3.32.
- Soit la fonction $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$. Alors, $D_f = \mathbb{R}^2$, f est continue, $f_x(x, y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $f_y(x, y) = x - 4y$ (car x est considérée constante).
- Soit la fonction $f(x, y, z) = 5xz \log(1 + 7y)$. Alors, $D_f = \{(x, y, z) : \quad y > -1/7\}$, f est continue et $f_x(x, y, z) = 5z \log(1 + 7y)$, $f_y(x, y, z) = \frac{35xz}{1+7y}$ et $f_z(x, y, z) = 5x \log(1 + 7y)$.
- Considérons l'entropie d'un gaz parfait en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ :

$$s(\tau, \varepsilon) = c_v \log(\varepsilon \tau^{\gamma - 1}) = c_v \log \varepsilon + c_v(\gamma - 1) \log \tau \qquad (c_v \text{ et } \gamma > 1 \text{ constantes}).$$

Comme la température et la pression sont définies respectivement par

$$T = \frac{1}{\partial_\varepsilon s} \qquad \text{et} \qquad P = T\partial_\tau s$$

on a

$$T = \frac{1}{\partial_\varepsilon s} = \frac{\varepsilon}{c_v} \quad \text{et} \quad P = T\partial_\tau s = \frac{\varepsilon}{c_v}\frac{c_v(\gamma-1)}{\tau} = (\gamma-1)\frac{\varepsilon}{\tau}.$$

On retrouve ainsi la relation bien connue

$$P\tau = RT \qquad \text{avec} \quad R = c_v(\gamma-1).$$

- La résistance totale R d'un conducteur produite par trois conducteurs de résistances R_1, R_2, R_3, connectés en parallèle, est données par la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

On a alors $\partial_{R_i} R(R_1, R_2, R_3) = R^2/R_i^2$.

Exemple 3.33. ▶ Soit $f(x,y) = x^2 - 3x + 4xy + 5$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3x + 4xy + 5) = 2x - 3 + 4y \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - 3x + 4xy + 5) = 4x \end{aligned}$$

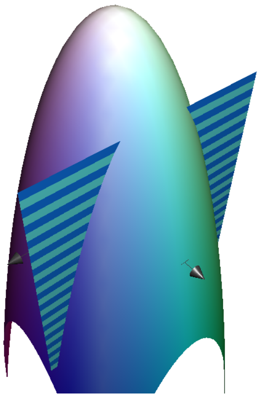
pour chaque $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

- Soit $g(x,y) = e^{x^2+3y^2}\sin(x-y)$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors,

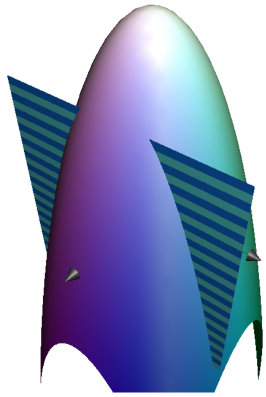
$$\begin{aligned} g_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+3y^2}\sin(x-y)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2+3y^2}\right)\sin(x-y) + e^{x^2+3y^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\sin(x-y)\right) \\ &= 2xe^{x^2+3y^2}\sin(x-y) + e^{x^2+3y^2}\cos(x-y), \\ g_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(e^{x^2+3y^2}\sin(x-y)) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}e^{x^2+3y^2}\right)\sin(x-y) + e^{x^2+3y^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin(x-y)\right) \\ &= 6ye^{x^2+3y^2}\sin(x-y) - e^{x^2+3y^2}\cos(x-y), \end{aligned}$$

donc $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

- Soit $h(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Le graphe de f est le paraboloïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$, et le plan vertical $y = 1$ l'intersecte dans la parabole $z = 2 - x^2$. De la même façon, le plan $x = 1$ intersecte dans la parabole $z = 3 - 2y^2$.



$z = 2 - x^2, y = 1$



$z = 2 - x^2, x = 1$

On a
$$h_x(x,y) = -2x \qquad \text{et} \qquad h_y(x,y) = -4y,$$
donc la pente de la tangente à la parabole à gauche est $h_x(1,1) = -2$. De la même façon, la pente de la tangente à la parabole à droite est $h_y(1,1) = -4$.

Exemple 3.34 (Cobb-Douglas). Cobb et Douglas ont cherché une fonction, définie et dérivable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, qui caractérise la production en fonction du travail w et du capital k :
$$\begin{aligned} f : (\mathbb{R}_+^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ (w,k) &\longrightarrow f(w,k) \end{aligned}$$
La dérivée partielle $\partial_w f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du travail. On appelle cela production marginale par rapport au travail ou productivité marginale du travail. De la même manière, la dérivée partielle $\partial_k f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du capital. On appelle cela production marginale par rapport au capital ou productivité marginale du capital. Cobb et Douglas ont fait les hypothèses suivantes :

- si le travail ou le capital s'annulent, la production aussi s'annule :
$$\lim_{w\to 0} f(w,k) = 0 \quad \forall k \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to 0} f(w,k) = 0 \quad \forall w$$
- la productivité marginale du travail est proportionnelle à la production par unité de travail :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_w f(w,k) = \frac{\alpha}{w} f(w,k)$$
Pour $k = k_0$ fixé, on a une EDO dont la solution est $f(w,k) = g(k_0)w^\alpha$ où g est une fonction qui ne dépend que de k_0
- la productivité marginale du capital est proportionnelle à la production par unité

de capital :
$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_k f(w,k) = \frac{\beta}{k} f(w,k)$$
Pour $w = w_0$ fixé, on a une EDO dont la solution est $f(w,k) = h(w_0)k^\beta$ où h est une fonction qui ne dépend que de w_0

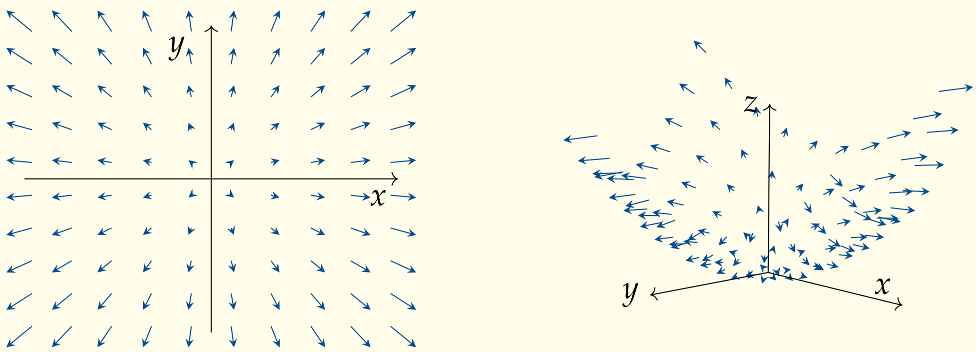
On obtient alors la fonction $f(w,k) = cw^\alpha k^\beta$, où c est une constante. De plus, on a fait l'hypothèse que si le travail ou le capital s'annulent alors la production aussi s'annule, par conséquent α, $\beta > 0$ et l'on a bien
$$\partial_w f(w,k) = \alpha w^{\alpha-1} k^\beta = \frac{\alpha}{w} f(w,k)$$
$$\partial_k f(w,k) = \beta w^\alpha k^{\beta-1} = \frac{\beta}{w} f(w,k)$$
Remarquons que si le travail et le capital augment en même temps d'un facteur m alors
$$f(mw, mk) = c(mw)^\alpha (mk)^\beta = m^{\alpha+\beta} f(w,k).$$
Pour que la production augmente elle aussi d'un facteur m il faut alors imposer $\alpha + \beta = 1$.

A partir des dérivées partielles, nous définissons le gradient.

Définition 3.35 (Gradient)**.** Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ dérivable dans $\boldsymbol{x}$. Le vecteur dont les composantes sont les n dérivées partielles de f dans $\boldsymbol{x}$ est appelé le gradient de f dans $\boldsymbol{x}$ et est noté par
$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_{x_1}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_{x_n}(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.36. Les gradients des f et g fonctions de l'exemple précédent sont définis dans $\mathbb{R}^2$ et sont
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3 + 4y \\ 4x \end{pmatrix}$$
et
$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2xe^{x^2+3y^2} \sin(x-y) + e^{x^2+3y^2} \cos(x-y) \\ 6ye^{x^2+3y^2} \sin(x-y) - e^{x^2+3y^2} \cos(x-y) \end{pmatrix}.$$

Observation 3.37. Le gradient d'une fonction dérivable dans X est un exemple de **champ vectoriel**, c'est-à-dire une fonction de $X \subseteq \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^n$. Habituellement, $\nabla f(\boldsymbol{x})$ est représenté comme un vecteur appliqué au point $\boldsymbol{x}$.



$$z = f(x,y) = \tfrac{1}{7}(x^2+y^2), \quad \nabla f(x,y) = \tfrac{2}{7}(x,y)$$

Observation 3.38 (Propriétés élémentaires de la dérivée et du gradient)**.** En utilisant les propriétés élémentaires des dérivées des fonctions en une variable, il est facilement prouvé que les dérivées directionnelles, les dérivées partielles et le gradient vérifient des propriétés très similaires à celles des dérivées en $\mathbb{R}$.
Par exemple, étant donné deux fonctions $f, g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, dérivables en $\boldsymbol{x} \in X$, et deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, les fonctions

$$\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x}), \qquad f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x}), \qquad \frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})} \quad (\text{si } g(\boldsymbol{x}) \neq 0)$$

sont dérivables en $\boldsymbol{x}$ et

$$\begin{aligned} \nabla\left(\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta g(\boldsymbol{x})\right) &= \alpha \nabla f(\boldsymbol{x}) + \beta \nabla g(\boldsymbol{x}) \\ \nabla(f(\boldsymbol{x})g(\boldsymbol{x})) &= g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x}) \\ \nabla\left(\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}\right) &= \frac{g(\boldsymbol{x})\nabla f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x})\nabla g(\boldsymbol{x})}{g^2(\boldsymbol{x})} \qquad \text{si } g(\boldsymbol{x}) \neq 0. \end{aligned}$$

Observation 3.39 (Dérivées des fonctions composées : règle de la chaîne)**.** Étant donné deux fonctions $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, où g est dérivable en $\boldsymbol{x} \in X$, et $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, où f est dérivable en $g(\boldsymbol{x}) \in I$, la fonction composée $f \circ g$ est dérivable en $\boldsymbol{x}$ et

$$\nabla\left(f \circ g\right)(\boldsymbol{x}) = f'(g(\boldsymbol{x}))\nabla g(\boldsymbol{x}).$$

Cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\to f(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to x(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\to y(t) \end{aligned}$$

Alors, la fonction g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow (x(t), y(t)) \longrightarrow g(t) = f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est dérivable et

$$g'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t).$$

Cas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad x : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad y : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to f(x, y) \qquad (u, v) \to x(u, v) \qquad (u, v) \to y(u, v)$$

Alors, la fonction composés g

$$\begin{aligned} g :\ & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (u, v) \longrightarrow (x(u, v), y(u, v)) \longrightarrow g(u, v) = f(x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \partial_u g(u, v) &= \partial_x f(x(u, v), y(u, v))\partial_u x(u, v) + \partial_y f(x(u, v), y(u, v))\partial_u y(u, v) \\ \partial_v g(u, v) &= \partial_x f(x(u, v), y(u, v))\partial_v x(u, v) + \partial_y f(x(u, v), y(u, v))\partial_v y(u, v) \end{aligned}$$

donc

$$\nabla g(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x(u, v), y(u, v))\partial_u x(u, v) + \partial_y f(x(u, v), y(u, v))\partial_u y(u, v) \\ \partial_x f(x(u, v), y(u, v))\partial_v x(u, v) + \partial_y f(x(u, v), y(u, v))\partial_v y(u, v) \end{pmatrix}$$

Exemple 3.40. Soit

$$g(x, y) = x^2 + 2xy - y^2 \quad \text{pour} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \text{et} \qquad f(v) = \sin v \quad \text{pour} \quad v \in \mathbb{R}.$$

Alors,

$$g_x(x, y) = 2x + 2y, \quad g_y(x, y) = 2x - 2y, \quad f'(v) = \cos v,$$

et donc la fonction composée est

$$F(x, y) = f(g(x, y)) = \sin(x^2 + 2xy - y^2)$$

et son gradient est

$$\nabla F(x, y) = f'(g(x, y))\nabla g(x, y) = 2\cos(x^2 + 2xy - y^2) \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Exemple 3.41. La pression P (en kilopascals kPa), le volume V (en litres L) et la température (en kelvins K) d'une mole d'un gaz parfait sont lié par l'équation

$$PV = RT$$

avec $R = 8.31\, J\, K^{-1}\, mol^{-1}$. On veut déterminer la vitesse à laquelle la pression change quand la température est de $300K$ et est en train d'augmenter à raison de $0.1\,K\,s^{-1}$ et quand le volume est de $100\,L$ et est en train de croître à raison de $0.2\,L\,s^{-1}$. Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$P : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \qquad T : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(T, V) \to P(T, V) \qquad t \to T(t) \qquad t \to V(t)$$

Alors la fonction P

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longrightarrow (T(t), V(t)) \longrightarrow P(T(t), V(t)) = R\frac{T(t)}{V(t)} \end{aligned}$$

est dérivable et

$$P'(t) = \partial_T P(T(t), V(t))T'(t) + \partial_V P(T(t), V(t))V'(t).$$

À l'instant considéré, $T = 300$ et $T'(t) = 0.1$, $V = 100$ et $V' = 0.2$, donc

$$\begin{aligned} P'(t) &= \partial_T P(T, V)T'(t) + \partial_V P(T, V)V'(t) \\ &= \frac{R}{V}T'(t) - \frac{RT}{V^2}V'(t) \\ &= \frac{8.31}{100}0.1 - \frac{8.31 \cdot 300}{100^2}0.2 \\ &= -0.04155. \end{aligned}$$

La pression est donc en train de diminuer d'environ $0.042\,kPa\,s^{-1}$.

Exemple 3.42. La température en un point (x, y) est notée $T(x, y)$ et mesurée en degrés Celsius. Un insecte en train de ramper se trouve après t secondes en $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2 + t/3$, où x et y sont mesurés en centimètres. La fonction température satisfait à $T_x(2, 3) = 4$ et $T_y(2, 3) = 3$. À quelle vitesse croît la température sur la trajectoire de l'insecte après 3 secondes ?
Comme x et y sont chacune fonction du temps t, la fonction $T(x, y)$ est aussi fonction du temps et l'on a

$$\begin{aligned} T'(t) &= T_x(x(t), y(t))x'(t) + T_y(x(t), y(t))y'(t) \\ &= T_x(x(t), y(t))\frac{1}{2\sqrt{1+t}} + \frac{1}{3}T_y(x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Après 3 secondes, $x = 2$ et $y = 3$, donc $t = 3$ et

$$T'(3) = 4\frac{1}{4} + 3\frac{1}{3} = 2.$$

Ainsi la température croît de $2°C\,s^{-1}$.

➡ **Attention** La notion de dérivabilité dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est beaucoup plus faible que dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que

$$\text{si } n \geq 2,\ f \text{ dérivable en } \boldsymbol{x} \quad \not\Rightarrow \quad f \text{ continue en } \boldsymbol{x}.$$

Exemple 3.43. ▶ La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ mais est dérivable en $(0,0)$:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1-1}{t} = 0$$
$$f_y(0,0) = 0$$

▶ La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,x) = 1/2 \neq f(0,0)$, cependant elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ car

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = 0.$$

Définition 3.44 (Matrice jacobienne)**.** Soit $\boldsymbol{f} : X \to \mathbb{R}^m$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}), \ldots, f_m(\boldsymbol{x})),$$

dérivable dans $\boldsymbol{x}$. La matrice $m \times n$ dont les composants sont les dérivées partielles de $\boldsymbol{f}$ est appelée la matrice jacobienne de $\boldsymbol{f}$ dans $\boldsymbol{x}$ et est notée par

$$J(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f_1(\boldsymbol{x}) & \ldots & \partial_{x_i} f_1(\boldsymbol{x}) & \ldots & \partial_{x_n} f_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{x_1} f_m(\boldsymbol{x}) & \ldots & \partial_{x_i} f_m(\boldsymbol{x}) & \ldots & \partial_{x_n} f_m(\boldsymbol{x}) \end{pmatrix}.$$

Pour $i = 1, \ldots, m$, la i-ème ligne de cette matrice est la transposée du vecteur gradient au point $\boldsymbol{x}$ de la fonction f_i :

$$J(\boldsymbol{x}) = \left((\nabla f_1(\boldsymbol{x}))^T \ldots (\nabla f_m(\boldsymbol{x}))^T \right)$$

3.3.2. Différentiabilité

La différentiabilité d'une fonction f en un point $\boldsymbol{x}_0$ correspond à l'existence d'une approximation linéaire de la fonction au voisinage du point $(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0))$ du graphe de la fonction.
En particulier, une droite verticale passant par $(x_0, f(x_0))$

$$y = f(x_0) + m(x - x_0)$$

est tangente au graphe de f, ou

$$f(x) = f(x_0) + m(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \text{lorsque } x \to x_0$$

si et seulement si f est dérivable en x_0 et $m = f'(x_0)$.
Nous avons donc une équivalence entre dérivabilité et différentiabilité.

Dans le cas des fonctions de deux variables et plus, l'équivalence disparaît entre l'existence des dérivées partielles, d'une part, et celle d'un plan tangent, d'autre part.
Cela provient du fait que la dérivabilité repose seulement sur des limites le long de directions particulières. La dérivabilité apparaît donc comme un concept trop faible pour garantir l'existence d'un plan tangent et la notion de différentiabilité va combler ce déficit.
Pour les fonctions de deux variables, l'intuition géométrique peut encore servir de guide. Ainsi, si la fonction f est dérivable en (x_0, y_0), on peut affirmer l'existence de deux droites tangentes, chacune par rapport à la trace verticale du graphe dans les plans d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$. Dans le meilleur des cas, ces deux droites, nécessairement concourantes en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, forment un plan qui est tangent au graphe. Toutefois, certaines irrégularités peuvent surgir (par exemple, la présence d'une discontinuité en (x_0, y_0)) qui excluent l'existence d'un plan tangent. Dans pareil cas, les deux droites existent et définissent un plan qui n'est pas un plan tangent, parce qu'un tel plan n'existe pas. Ces deux droites déterminent donc un «candidat plan tangent», dont l'existence doit encore être vérifiée.

Plus généralement, la différentiabilité d'une fonction de n variables, dérivable au point $\boldsymbol{x}_0$, s'étudie en deux étapes. La première consiste à introduire la «candidate différentielle». La seconde teste si cette candidate constitue effectivement une approximation locale de l'accroissement de la fonction. Les définitions suivantes précisent ces notions.

Concentrons-nous sur le cas $n = 2$. Si $n = 2$, l'analogue naturel de la droite est le plan tangent.
Soit $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^2$, et soit $(x_0, y_0) \in X$. Un plan générique non vertical passant par (x_0, y_0) est donné par l'équation suivante

$$z - f(x_0, y_0) = m_1(x - x_0) + m_2(y - y_0) = \boldsymbol{m} \cdot (x - x_0, y - y_0) \qquad \boldsymbol{m} = (m_1, m_2)$$

et on l'appelle **plan tangent** au graphe de f au point (x_0, y_0) si

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \boldsymbol{m} \cdot (x - x_0, y - y_0) + o(\|(x - x_0, y - y_0)\|) \quad \text{lorsque } (x,y) \to (x_0, y_0), \tag{3.1}$$

ou bien si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \boldsymbol{m} \cdot (x - x_0, y - y_0)}{o(\|(x - x_0, y - y_0)\|)} = 0.$$

En considérant la limite pour $(x, y) \to (x_0, y_0)$ dans la (3.1), on voit immédiatement que

$$(3.1) \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue en } (x_0, y_0).$$

De plus, en fixant une des deux variables, la (3.1) implique que

$$\begin{aligned} f(x, y_0) &= f(x_0, y_0) + m_1(x - x_0) + o(x - x_0) \qquad \text{lorsque } x \to x_0 \\ f(x_0, y) &= f(x_0, y_0) + m_2(y - y_0) + o(y - y_0) \qquad \text{lorsque } y \to y_0 \end{aligned}$$

On a donc deux limites de fonctions d'une variable

$$x \to f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad y \to f(x_0, y)$$

qui, comme mentionné ci-dessus, sont valides si et seulement si ces fonctions sont dérivables en x_0 et y_0, respectivement, et si les dérivées sont m_1 et m_2, respectivement.
Par la définition des dérivées partielles, on a alors

$$m_1 = f_x(x_0, y_0) \qquad \text{et} \qquad m_2 = f_y(x_0, y_0)$$

En résumé, nous avons montré que

$$(3.1) \quad \Rightarrow \quad f \text{ est dérivable en } (x_0, y_0) \quad \text{et} \quad \boldsymbol{m} = \nabla f(x_0, y_0). \tag{3.2}$$

Observation 3.45. En général, la double implication dans (3.2) ne s'applique pas. Par exemple, nous avons vu que la fonction

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } xy = 0 \\ 0 & \text{si } xy \neq 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$ mais est dérivable en $(0, 0)$. Si la double implication était valide, alors la (3.1) serait vraie mais cela impliquerait la continuité de f dans $(0, 0)$, c'est-à-dire une contradiction.

En conclusion, si (3.1) est vrai, alors le plan tangent au graphe de f dans $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) \tag{3.3}$$

qui peut être réécrit de manière équivalente comme

$$\boldsymbol{n} \cdot (x - x_0, y - y_0, z - f(x_0, y_0)) \qquad \text{où} \qquad \boldsymbol{n} = (-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1) \tag{3.4}$$

où $\boldsymbol{n}$ est un vecteur normal de $\mathbb{R}^3$.

L'existence de la meilleure approximation linéaire dans le (3.1) est formalisée avec le concept de différentiabilité. Revenons au cas général.

Définition 3.46 (Fonction différentiable)**.** Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert et $f : X \to \mathbb{R}$. On dit que f est différentiable en $\boldsymbol{x}_0 \in X$ s'il existe $\boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) \qquad \text{lorsque } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0. \tag{3.5}$$

La fonction
$$T_1(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)$$
est considérée comme la meilleure approximation linéaire de f dans $\boldsymbol{x}_0$ et, si $n = 2$, son graphe coïncide avec le plan tangent au graphe de f dans $\boldsymbol{x}_0$.
On dit que la fonction f est différentiable dans X si elle est différentiable dans chaque $\boldsymbol{x} \in X$.

➡ **Attention** Rappelons que si $n = 1$, la dérivabilité et la différentiabilité sont équivalentes. Cependant, comme nous l'avons vu, ce n'est pas le cas si $n \geq 2$. Si $n \geq 2$, en fait, la différentiabilité est un concept plus fort.

Théorème 3.47 (Régularité des fonctions différentiables)**.** Soient $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : X \to \mathbb{R}$. Si f est différentiable en $\boldsymbol{x}_0 \in X$, alors

(i) f est continue en $\boldsymbol{x}_0$

(ii) il existe des dérivées partielles de f dans $\boldsymbol{x}_0$ et la (3.5) est vrai avec $\boldsymbol{m} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, c'est-à-dire
$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) \qquad \text{lorsque } \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \tag{3.6}$$

(iii) pour chaque vecteur unitaire $\boldsymbol{v}$ il existe la dérivée directionnelle $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0)$ et on a
$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v} \tag{3.7}$$

Preuve.

(i) f est continue en $\boldsymbol{x}_0$ parce que
$$\begin{aligned}|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)| &= |\boldsymbol{m} \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|)| \\ &\leq \|\boldsymbol{m}\| \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\| + o(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0\|) \\ &\to 0\end{aligned}$$

(ii) Pour chaque $k = 1, \dots, n$,
$$\partial_{x_k} f(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\boldsymbol{m} \cdot (t\boldsymbol{e}_k) + o(\|t\boldsymbol{e}_k\|)}{t} = \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{e}_k = m_k$$

(iii) Pour le point précédent, $\boldsymbol{m} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$, donc la dérivée directionnelle $\frac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial \boldsymbol{v}}$ est
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot (t\boldsymbol{v}) + o(\|t\boldsymbol{v}\|)}{t} = \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{v}$$

■

➡ **Attention** En conclusion

$$f \text{ est différentiable en } \boldsymbol{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est derivable en } \boldsymbol{x}_0 \text{ et on a (3.6)}$$

Observation 3.48 (Propriétés élémentaires). ▶ La combinaison linéaire, le produit ou le quotient de deux fonctions différentiables en un point $\boldsymbol{x}_0$ sont différentiables en $\boldsymbol{x}_0$ et les propriétés en l'Observation 3.38 pour le gradient s'appliquent.

▶ La composition $f \circ g$ d'une fonction $g : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, différentiable en $\boldsymbol{x}_0 \in X$, et d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, dérivable en $g(\boldsymbol{x}_0) \in I$, est différentiable en $\boldsymbol{x}_0$ et la règle de la chaîne pour le gradient s'applique.

Théorème 3.49 (Théorème du différentiel total). Soient $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, et $f : X \to \mathbb{R}$, et $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. S'il existe un voisinage U de $\boldsymbol{x}$ dans lequel f est dérivable et si les dérivées partielles $\partial_{x_1} f, \ldots, \partial_{x_n} f$ sont continues au point $\boldsymbol{x}$, alors f est dérivable dans $\boldsymbol{x}$. En particulier

$$f \in C^1(X) \quad \Rightarrow \quad f \text{ est différentiable en } X$$

Preuve.

Considérons le cas $n = 2$, la preuve du cas général étant similaire. Soit $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$. Par le Théorème de la valeur moyenne appliqué aux fonctions d'une variable

$$x \to f(x, y_0) \qquad \text{et} \qquad y \to f(x_0, y),$$

pour chaque $(x, y) \in U$ il existe ξ, η entre x, x_0 et y, y_0 respectivement, tels que

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= [f(x,y) - f(x,y_0)] + [f(x,y_0) - f(x_0,y_0)] \\ &= \partial_y f(x,\eta)(y-y_0) + \partial_x f(\xi,y_0)(x-x_0). \end{aligned}$$

Puisque pour $(x,y) \to (x_0,y_0)$ nous avons $(\xi,y_0) \to (x_0,y_0)$ et $(x,\eta) \to (x_0,y_0)$,

$$\begin{aligned} &|f(x,y) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0) \cdot (x-x_0, y-y_0)| \\ &= \left| [\partial_x f(\xi,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)]\,(x-x_0) + [\partial_y(x,\eta) - \partial_y f(x_0,y_0)]\,(y-y_0) \right| \\ &\leq \underbrace{|\partial_x f(\xi,y_0) - \partial_x f(x_0,y_0)|}_{\to 0} \quad \underbrace{|x-x_0|}_{\leq \|(x-x_0,y-y_0)\|} \quad + \underbrace{|\partial_y f(x,\eta) - \partial_y f(x_0,y_0)|}_{\to 0} \quad \underbrace{|y-y_0|}_{\leq \|(x-x_0,y-y_0)\|} \\ &= o(\|(x-x_0,y-y_0)\|) \qquad \text{lorsque } (x,y) \to (x_0,y_0) \end{aligned}$$

■

Exemple 3.50. ▶ Soit $f(x,y) = x^2 y - 2x + e^y$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On détermine, s'il existe, le plan tangent au graphe de f au point $(3,0,f(3,0)) = (3,0,-5)$ et un vecteur normal de celui-ci.
La fonction f est dérivable dans $\mathbb{R}^2$ avec $\partial_x f(x,y) = 2xy - 2$ et $\partial_y f(x,y) =$

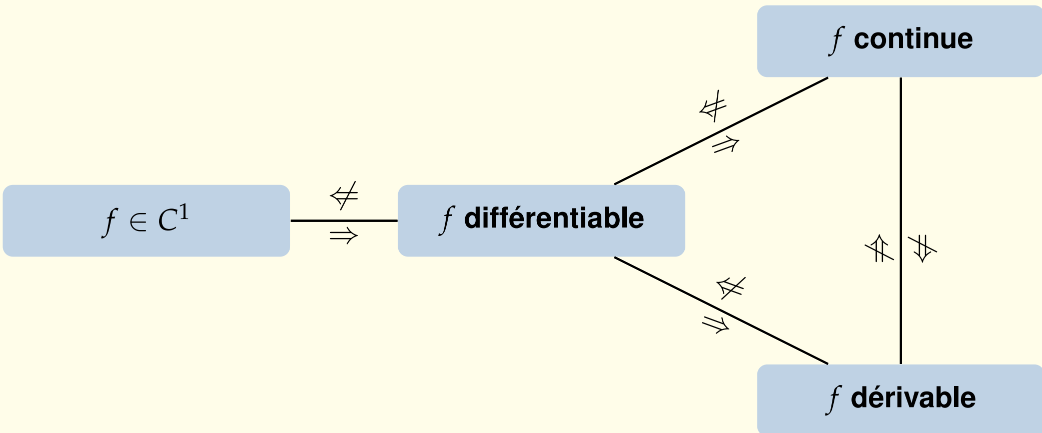
$x^2 + e^y$, qui sont des fonctions continues. Donc f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$, en particulier au point $(3,0)$: en substituant les valeurs correspondantes dans (3.3) et (3.4), on obtient

$$z = -5 - 2(x-3) + 10y = 1 - 2x + 10y \qquad \text{et} \qquad \boldsymbol{n} = (2, -10, 1)$$

- Dans l'exemple 3.28, nous avons calculé la dérivée de $f(x,y) = x^2 y$ en $\boldsymbol{x}_0 = (-1,3)$ selon la direction $\boldsymbol{v} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ en utilisant la définition. On a $\partial_x f(x,y) = 2xy$ et $\partial_y f(x,y) = x^2$, donc $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Par conséquent, par le Théorème 3.49, f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et il est possible (et plus simple) d'utiliser (3.7) plutôt que la définition pour calculer les dérivées directionnelles :

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(-1,3) = \nabla f(-1,3) \cdot \boldsymbol{v} = (-6,1) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{11}{\sqrt{5}}$$

Observation 3.51 (Carte conceptuelle)**.** Pour répondre à la question "la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est-elle différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$?" il est utile de se rappeler le schéma suivant :



Voici quelques contre-exemples. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} g(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Si $g(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$, alors $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$
- Si $g(x,y) = (x^2 + y^2) \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$, alors f n'est pas de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ mais elle est différentiable
- Si $g(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, alors f n'est pas différentiable mais elle est continue et

dérivable

- Si $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, alors f n'est ni différentiable ni continue mais elle est dérivable
- Si $g(x,y) = |x|+|y|$, alors f n'est ni différentiable ni dérivable mais elle est continue
- Si $g(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, alors f n'est ni continue ni dérivable

3.4. Exercices

✎ **Exercice 3.1.** Calculez les expressions suivantes :

- $2(2,0,3) - 3(5,1,1)$
- $(3(7,3) - 2(5,1)) \cdot (4(3,4) - 3(4,4))$
- $\dfrac{(2x,2y)}{\|(x-y,y+x)\|^2+2}$
- $3(x,y-x) + 2(x-y,y)$
- $\dfrac{(3,x)\cdot(3,-x)}{\|(3,x)\|\|(3,-x)\|}$

✎ **Exercice 3.2 (Domaine de définition).** Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

- $f(x,y) = \sqrt{xy}$
- $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$
- $f(x,y) = \log_2(x^2+y^2-4)$
- $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2-y}}{\sqrt{y}}$
- $f(x,y) = \dfrac{\log y}{\sqrt{x-y}}$
- $f(x,y) = \log(x+y)$
- $f(x,y) = \arccos(x^2+y^2-4)$
- $f(x,y,z) = \dfrac{\log(1+x^2)}{yz}$

✎ **Exercice 3.3.** Vérifier si les suivantes limites existent.

- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$
- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

✎ **Exercice 3.4.** Discutez la continuité des fonctions suivantes dans leur domaine naturel et calculez, le cas échéant, leur limite pour $(x,y)\to(0,0)$.

- $\dfrac{xy^3}{x^2+4y^2} + \cos(x+y)$
- $\dfrac{x+y}{x-y}$
- $\dfrac{3x+5y}{x^2-y^2}$
- $\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

✎ **Exercice 3.5.** Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue mais que f n'est pas continue à l'origine.

✎ **Exercice 3.6.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{x \log(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}$$

Calculer, si elle existe, la limite de f pour $(x,y) \to (0,0)$.

✎ **Exercice 3.7.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

✎ **Exercice 3.8.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

✎ **Exercice 3.9.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin x^2 - \sin y^2}{x^2+y^2}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

✎ **Exercice 3.10.** Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$$

vérifie

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

en utilisant les coordonnées polaires et la définition de limite.

✎ **Exercice 3.11 (Calculs de limites).** Calculer les limites suivantes :

- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin y^2}{x^2+3y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{x/y}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\log(x^2+y^2)+5$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x+y^2)}{x^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\log y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$
- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

✎ **Exercice 3.12 (Dérivées partielles).** Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

- $f(x,y) = y^5 - 3xy$
- $f(x,y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
- $f(x,y) = x\cos(e^{xy})$
- $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$
- $f(x,y) = x^y$

✎ **Exercice 3.13.** Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction

$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x} \sin(\omega t - \lambda x),$$

où $\omega = 2\pi/365$ et $0 < \lambda \in \mathbb{R}$. Calculer $\partial_x T$, $\partial_t T$, et montrer que T satisfait l'équation de la chaleur $\partial_t T = k\partial_{xx} T$ pour une certaine constante k.

✎ **Exercice 3.14** (Règle de la chaîne)**.** Calculer $v'(t)$ et $w'(t)$, où

$$v(t) = f(x(t), y(t)) \qquad \text{et} \qquad w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$$

avec

- $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = e^t$
- $f(x,y) = \cos(x + 4y)$, $x(t) = 5t^4$, $y(t) = 1/t$
- $f(x,y,z) = xe^{y/x}$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 1 - t$, $z(t) = 1 + 2t$
- $f(x,y,z) = \log\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x(t) = \sin t$, $y(t) = \cos t$, $z(t) = \tan t$

✎ **Exercice 3.15** (Gradient)**.** Déterminer le gradient des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$
- $f(x,y) = \arctan(xy^2)$
- $f(x,y,z) = y\sin(zy)$
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1x_3x_5 - x_2x_4^2$

✎ **Exercice 3.16** (Plan tangent)**.** Déterminez le plan tangent au graphe de f en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ si

- $f(x,y) = x + 2xy + 3y^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$
- $f(x,y) = x + 2xy + 3y^2$, $(x_0, y_0) = (4, 1)$
- $f(x,y) = \sin(xy^2)$, $(x_0, y_0) = (0, 1)$
- $f(x,y) = \sin(xy^2)$, $(x_0, y_0) = (\pi, 1)$

✎ **Exercice 3.17.** Soit $f(x,y) = x^3 + x^2y - 3xy^2 + y^3$. Déterminer $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}(1,2)$ si $\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

✎ **Exercice 3.18.** Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2x_4 - x_3x_4^2 + x_2x_3$. Déterminer la meilleur approximation linéaire de f dans un voisinage de $(-1, 0, 2, 1)$.

✎ **Exercice 3.19.** Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

- $f(x,y) = xy - 3x^2$ en $(1,2)$
- $f(x,y) = xy - 3y^2$ en $(2,1)$
- $f(x,y) = xy + 3y^2$ en $(2,1)$
- $f(x,y) = xy - 2y^2$ en $(-2,3)$
- $f(x,y) = y\sqrt{x}$ en $(4,1)$
- $f(x,y) = |y|\log(1+x)$ en $(0,0)$

✎ **Exercice 3.20 (Différentiabilité).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\nabla f(x,y)$.

✎ **Exercice 3.21 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\nabla f(x,y)$. Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$? Que peut-on conclure sur sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$?

✎ **Exercice 3.22 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\nabla f(x,y)$. Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$? Que peut-on conclure sur sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$?

✎ **Exercice 3.23 (Continuité, dérivabilité, différentiabilité).** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\nabla f(x,y)$. Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$? Que peut-on conclure sur sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$?

✎ **Exercice 3.24** (Continuité, dérivabilité, différentiabilité). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Déterminer si les dérivées partielles $f_x(0,0)$ et $f_y(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant. La fonction f est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$? Est-elle différentiable en $(0,0)$?

✎ **Exercice 3.25** (Continuité, dérivabilité, différentiabilité). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^3 \cos\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\nabla f(x,y)$. Est-elle $C^1(\mathbb{R}^2)$? Que peut-on conclure sur sa différentiabilité sur $\mathbb{R}^2$?

✎ **Exercice 3.26** (Continuité, dérivabilité, différentiabilité). Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et pour $(0,0)$. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?