***Sapienza* Università degli Studi di Roma**

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova d'ammissione all'esame orale 08/07/2020

Es. 1	(1.1) A	(1.2) B	(1.3) D			
Es. 2	A: falso	B: vero	C: vero	D: vero	E: falso	
Es. 3	A: vero	B: falso	C: falso	D: vero	E: falso	F: vero
Es. 4	n. 2					
Es. 5	n. 1					
Es. 6	n. 4					
Es. 7	(7.1) D	(7.2) A	(7.3) E	(7.4) B	(7.5) A	(7.6) D
Es. 8	(8.1) E	(8.2) E	(8.3) A	(8.4) C	(8.5) A	(8.6) E
Es. 9	A: vero	B: falso	C: falso	D: vero	E: falso	F: falso
Es. 10	C	D				
Es. 11	C	E	A			

1. Selezionare l'intervallo richiesto.

(1.1) La funzione $f(x) = \log(x-1) + \log(3-x)$ ha dominio

A $(1,3)$ B $(1,3]$ C $[1,3]$ D $[1,3)$

(1.2) La funzione $g(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ ha dominio

A $(-\infty,-1] \cup [0,+\infty)$ B $(-\infty,-1) \cup [0,+\infty)$ C $(-\infty,-1) \cup (0,+\infty)$ D $(-\infty,-1] \cup (0,+\infty)$

(1.3) La funzione $h(x) = e^{\frac{x}{x^2+1}}$ ha dominio

A $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ B $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$ C $(-1,1)$ D $\mathbb{R}$

2. Con riferimento all'esercizio 1, stabilire quali affermazioni sono vere e quali sono false.

A La funzione $h(x)$ è pari.

B Vale $f(2) = 0$.

C La funzione $g(x)$ ammette un solo zero.

D La funzione $h(x)$ ammette $y = 1$ come asintoto orizzontale.

E La funzione $g(x)$ ha un asintoto verticale e

$$\lim_{x \to -1^-} g(x) = -\infty.$$

3. Selezionare le affermazioni vere.

A La derivata di $f(x) = e^{-3x^2-4x}$ è $f'(x) = -(6x+4)e^{-3x^2-4x}$.

B Data $f(x) = \sqrt[4]{x^2+1}$, allora $f'(0) < 0$.

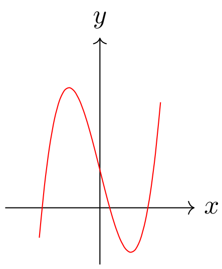
C La derivata della funzione $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ è $f'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$.

D La derivata di $f(x) = x\log(1-x)$ è $f'(x) = \log(1-x) + \dfrac{x}{x-1}$.

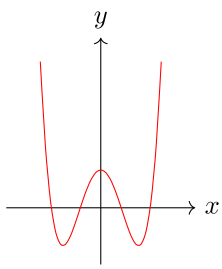
E Il dominio di $f(x) = 4e^{-x^2+3} - \sqrt{x}$ e di $f'(x)$ coincidono.

F La retta tangente alla funzione $f(x) = \log\sqrt{x}$ nel punto $(4, \log 2)$ è $8y - x - 8\log 2 + 4 = 0$.

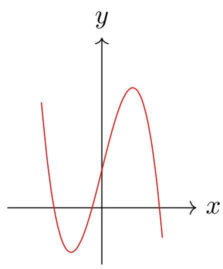
4. Il grafico della funzione $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ è il numero ...



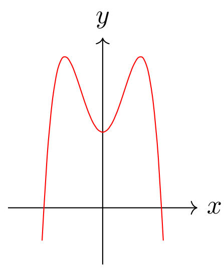
n. 1



n. 2

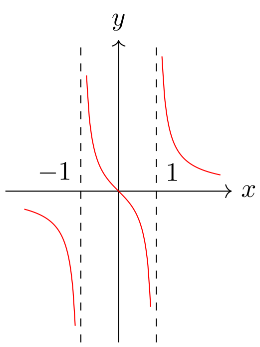


n. 3

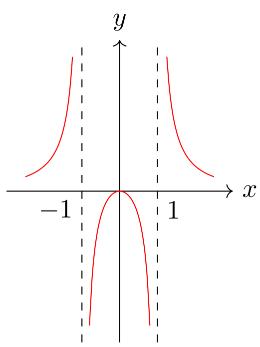


n. 4

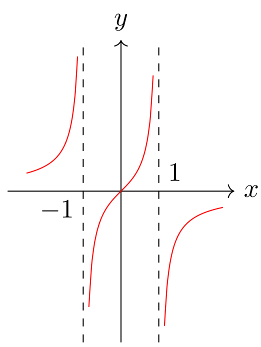
5. Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$ è il numero ...



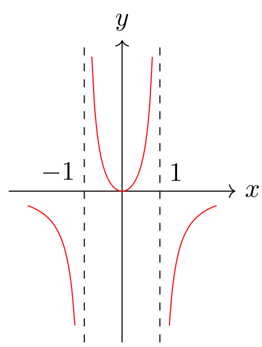
n. 1



n. 2

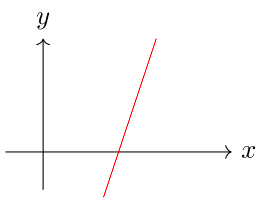


n. 3

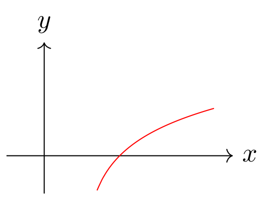


n. 4

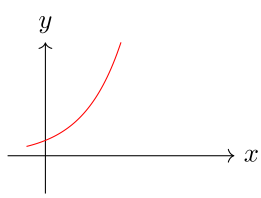
6. Il grafico della funzione $f(x) = 3e^{2\log|x-2|}$ è il numero ...



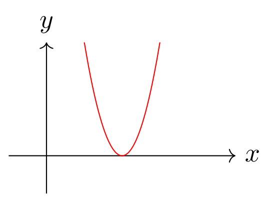
n. 1



n. 2



n. 3



n. 4

7. Selezionare il valore dei seguenti limiti. Rispondere ad almeno quattro domande.

(7.1) $\lim_{x\to-\infty} (1+e^x)\sin x$

A 0 B $+\infty$ C 1 D non esiste E e

(7.2) $\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$

A 0 B $+\infty$ C $-\infty$ D non esiste E 1

(7.3) $\lim_{x\to-1^+} \frac{4x+4}{3x^2+6x+3}$

A non esiste B $\frac{4}{3}$ C $-\infty$ D 0 E $+\infty$

(7.4) $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x}$

A $e^{\frac{2}{3}}$ B e^6 C e D $e^{\frac{1}{6}}$ E $e^{\frac{1}{3}}$

(7.5) $\lim_{x\to 0^-} \log x - \sqrt{x}$

A non esiste B 0 C $+\infty$ D 1 E $-\infty$

(7.6) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+6}{x^2+x+6}$

A 0 B $-\infty$ C non esiste D 2 E -2

8. Selezionare il valore dei seguenti integrali. Rispondere ad almeno quattro domande.

(8.1) $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+12}\,dx$

A $\arctan(x^2+3x)+c$ B $(x^2+3x+12)^{-1}+c$ C $\log|2x+3|+c$ D $(2x+3)^{-1}+c$ E $\log\left|x^2+3x+12\right|+c$

(8.2) $\int_0^1 xe^{-2x}\,dx$

A $-\frac{1}{4}\left(2e^{-2}-1\right)$ B $\frac{1}{2}\left(3e^{-2}-1\right)$ C $3e^{-1}-1$ D $\frac{1}{4}\left(3e^{-2}-1\right)$ E $-\frac{1}{4}\left(3e^{-2}-1\right)$

(8.3) $\int \log(2x)\,dx$

A $x\log(2x)-\frac{x}{2}+c$ B $2x\log(2x)-x+c$ C $2x\log(x)-\frac{x}{2}+c$ D $x\log(2x)+\frac{x}{2}+c$ E $x\log(2x)-x+c$

(8.4) $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{2-4x}\,dx$

A $-\frac{1}{4}\log(2)$ B 0 C $+\infty$ D $\frac{1}{4}\log(2)$ E $-\infty$

(8.5) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$

A $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}$ B $\sqrt[3]{\dfrac{2}{3}}$ C $-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}}$ D $-\dfrac{\sqrt[4]{2}}{3}$ E $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}$

(8.6) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx$

A $\log|\sin x - 1| + c$ B $-\log|1+\sin x| + c$ C $\log|1+\sin x| + c$ D $\log|1+\cos x| + c$ E $-\log|1+\cos x| + c$

9. Stabilire quali affermazioni sono vere e quali sono false.

A Se $k = 3$, allora vale l'uguaglianza $Av = b$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -k & 1 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

B Se $v = (-1, 0)$, $z = (1, 2)$ e $w = (-2, 4)$, allora $\mu v + \gamma z = w$ se $(\mu, \gamma) = (2, 4)$.

C I vettori $v = (1, 2, 0)$ e $z = (0 - 3, 1)$ sono ortogonali tra di loro.

D Vale

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -4.$$

E I vettori $(1, 0, -1)$, $(4, 2, -1)$, $(5, 2, -2)$ sono linearmente indipendenti.

F I vettori $(4, -2, -1)$ e $(2, 1, -1/2)$ sono paralleli tra loro.

10. Lorenzo è un appassionato giocatore di Magic: The Gathering e anche questo venerdì sera si scontrerà con i suoi amici con il suo mazzo Jeskai control. Questo mazzo si compone di 60 carte, di cui 25 di tipo terra, 20 di tipo istantaneo e 15 di tipo stregoneria. Delle 25 terre 10 sono di tipo isola, 10 di tipo pianura e 5 di tipo montagna.
All'inizio del gioco si pescano 7 carte a caso. Lorenzo definisce

- una "buona mano": una mano iniziale con 3 carte di tipo terra e 4 carte di tipo non terra;
- una "mano perfetta": una mano iniziale con esattamente di 2 carte di tipo isola, 1 carta di tipo pianura o di tipo montagna, 2 carte di tipo istantaneo e 2 carte di tipo stregoneria.

La probabilità che Lorenzo peschi una "buona mano" è

A $\dfrac{3!4!}{60!}$ B $\dfrac{7!}{60!}$ C $\dfrac{\binom{25}{3}\binom{35}{4}}{\binom{60}{7}}$ D $\dfrac{3!4!}{7!}$ E $\dfrac{\binom{25}{4}\binom{35}{3}}{\binom{60}{7}}$

La probabilità che Lorenzo peschi una "mano perfetta" è

A $\dfrac{\binom{10}{2}\binom{10}{1}\binom{5}{1}\binom{20}{2}\binom{15}{2}}{\binom{60}{7}}$

B $\dfrac{2!1!1!2!2!}{60!}$

C $\dfrac{2!1!1!2!2!}{\binom{60}{7}}$

D $\dfrac{\binom{10}{2}\binom{15}{1}\binom{20}{2}\binom{15}{2}}{\binom{60}{7}}$

E $\dfrac{2!2!2!2!}{60!}$

11. Un tassista che lavora di notte riceve mediamente 84 chiamate notturne in una settimana.
La probabilità che riceva esattamente 65 chiamate nell'arco di una settimana è

A $\dfrac{84^{65}}{65!}e^{84}$ B $\dfrac{84^{65}}{84!}e^{-84}$ C $\dfrac{84^{65}}{65!}e^{-84}$ D $\dfrac{65^{84}}{84!}e^{-65}$ E $\dfrac{84^{65}}{65!}e^{-65}$

La probabilità che riceva meno di 70 chiamate nell'arco di quattro giorni è

A $\displaystyle\sum_{j=0}^{69}\frac{84^j}{j!}e^{-48}$ B $\displaystyle\sum_{j=0}^{69}\frac{84^j}{j!}e^{-84}$ C $\displaystyle 1-\sum_{j=0}^{69}\frac{48^j}{j!}e^{-48}$ D $\displaystyle 1-\sum_{j=0}^{69}\frac{84^j}{j!}e^{-84}$ E $\displaystyle\sum_{j=0}^{69}\frac{48^j}{j!}e^{-48}$

La probabilità che riceva più di 92 chiamate nell'arco sei giorni è

A $\displaystyle 1-\sum_{j=0}^{92}\frac{72^j}{j!}e^{-72}$ B $\displaystyle\sum_{j=0}^{92}\frac{84^j}{j!}e^{-72}$ C $\displaystyle 1-\sum_{j=0}^{92}\frac{84^j}{j!}e^{-84}$ D $\displaystyle\sum_{j=0}^{92}\frac{84^j}{j!}e^{-84}$ E $\displaystyle\sum_{j=0}^{92}\frac{72^j}{j!}e^{-72}$