Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova d'ammissione all'esame orale 16/06/2020

Es. 1	(1.1) A	(1.2) C	(1.3) A			
Es. 2	A: falso	B: vero	C: falso	D: falso	E: vero	
Es. 3	A: falso	B: falso	C: falso	D: vero	E: falso	F: vero
Es. 4	n. 4					
Es. 5	n. 2					
Es. 6	n. 3					
Es. 7	(7.1) E	(7.2) A	(7.3) A	(7.4) C	(7.5) C	(7.6) A
Es. 8	(8.1) C	(8.2) C	(8.3) E	(8.4) B	(8.5) C	(8.6) E
Es. 9	A: falso	B: vero	C: falso			
Es. 10	A: vero	B: falso	C: falso	D: vero		
Es. 11	E					
Es. 12	A	A	C	B	A	

1. Selezionare l'intervallo richiesto.

(1.1) La funzione $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} - \dfrac{x+2}{x}$ ha dominio

A $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1, 0\}$

B $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$

C $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

D $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$

(1.2) La funzione $g(x) = xe^{x-2} - x$ è strettamente negativa per x appartenente a

A $(-\infty, 2]$

B $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$

C $(0, 2)$

D $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

(1.3) La funzione $h(x) = \sqrt[3]{\log(x^2-1)} - \sqrt{x+2}$ ha dominio

A $[-2, -1) \cup (1, +\infty)$

B $(-2, -1) \cup (1, +\infty)$

C $[-2, -1] \cup [1, +\infty)$

D $(-2, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

2. Con riferimento all'esercizio 1, stabilire quali affermazioni sono vere e quali sono false.

A La funzione $f(x)$ è pari.

B Vale $h(\sqrt{2}) = -\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

C La funzione $g(x)$ non ammette zeri.

D La funzione $f(x)$ non ha asintoti orizzontali.

E La funzione $f(x)$ ha tre asintoti verticali e

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\lim_{x\to 0^-} f(x).$$

3. Selezionare le affermazioni vere.

A La funzione $\dfrac{x-3}{2-x}$ ammette un punto di massimo ed uno di minimo.

B La derivata della funzione $f(x) = \log\left(e^{2x} - x\right)$ è $f'(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}-x}$.

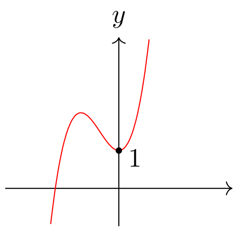
C La derivata di $f(x) = \dfrac{3x^2-1}{2-x}$ è $f'(x) = \dfrac{-3x^2+12x-1}{(2-x)^3}$.

D La funzione $f(x) = x^3 + 3x - 5$ non è mai decrescente.

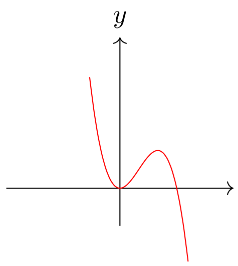
E la retta tangente alla funzione $f(x) = \sqrt{x-3}$ in $(4, 1)$ è $2y - x - 1 = 0$.

F Le rette tangenti alla funzione $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$ nei punti $(0, 5)$ e $(2, -3)$ hanno coefficiente angolare nullo.

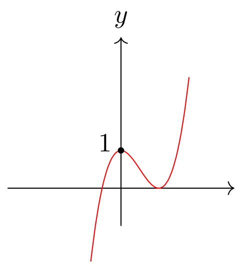
4. Il grafico della funzione $f(x) = 3x^2 - 2x^3 + 1$ è il numero ...



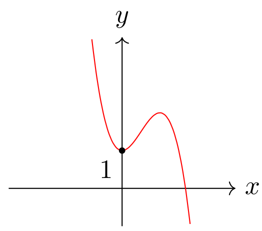
n. 1



n. 2

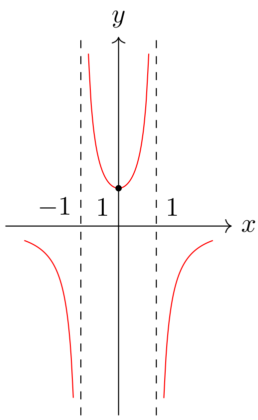


n. 3

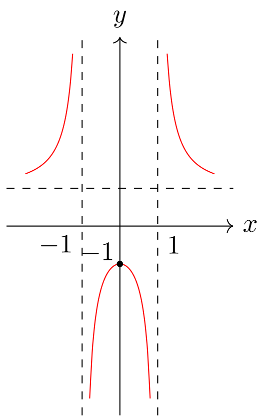


n. 4

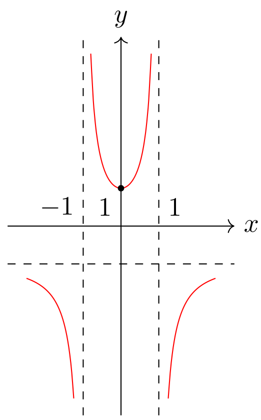
5. Il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - 1$ è il numero ...



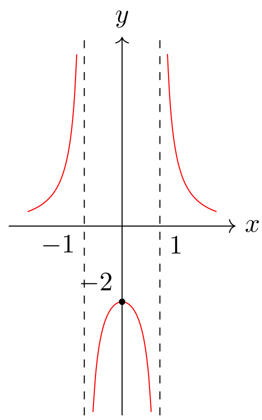
n. 1



n. 2

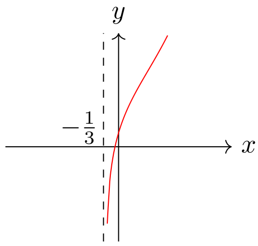


n. 3

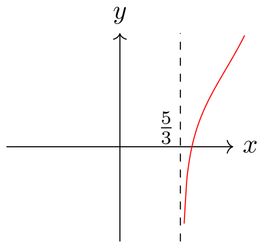


n. 1

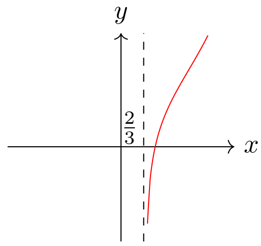
6. Il grafico della funzione $f(x) = \log(3x-2) + e^{x-2}$ è il numero ...



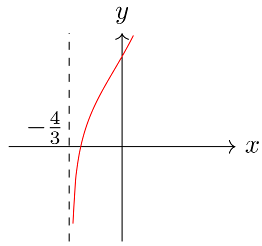
n. 1



n. 2



n. 3



n. 4

7. Selezionare il valore dei seguenti limiti. Rispondere ad almeno quattro domande.

(7.1) $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{4}{x}$

A $1/4$ B 4 C 1 D non esiste E 0

(7.2) $\lim_{x\to +\infty} x^2 \left(1 - \cos \frac{3}{x}\right)$

A $\frac{9}{2}$ B $\frac{1}{18}$ C 9 D non esiste E 18

(7.3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(x^3+1)}{x}$

A 0 B $1/3$ C $+\infty$ D non esiste E 2

(7.4) $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}$ e $\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}$

A $+\infty$ e $+\infty$ B 0 e $+\infty$ C $+\infty$ e 0 D $+\infty$ e $-\infty$ E 0 e 0

(7.5) $\lim_{x\to -3} \frac{2x+6}{x^2+2x-3}$

A $1/2$ B $-1/4$ C $-1/2$ D 2 E $-\infty$

(7.6) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-6}$

A $1/3$ B 0 C 1 D $+\infty$ E 2

8. Selezionare il valore dei seguenti integrali. Rispondere ad almeno quattro domande.

(8.1) $\int_0^{\sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}} x^2 \cos(x^3 - \pi)\, dx$

A 3 B -3 C $\frac{1}{3}$ D 0 E $-\frac{1}{3}$

(8.2) $\int \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$

A $\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$ B $\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$ C $\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + c$ D $\frac{3}{2}(\cos x)^{\frac{3}{2}} + c$ E $\frac{2}{3}(\cos x)^{\frac{2}{3}} + c$

(8.3) $\int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\, dx$

A $\log\frac{3}{2}$ B $\log\frac{3}{4}$ C $\log\frac{1}{2}$ D $\log\frac{1}{4}$ E $\log\frac{4}{3}$

(8.4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{3x^2+6}\,dx$

A $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ B $\frac{\sqrt{2}\pi}{12}$ C $\frac{\sqrt{2}\pi}{6\sqrt{2}}$ D $\frac{\sqrt{2}\pi}{6}$ E $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$

(8.5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx$

A $\log(\sin x - 1) + c$ B $\log(1-\sin x) + c$ C $\log(1+\sin x)+c$ D $\log(1-\cos x)+c$ E $\log(1+\cos x)+c$

(8.6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx$

A 0 B $+\infty$ C 1 D non esiste E $-\infty$

9. Stabilire quali affermazioni sono vere e quali sono false.

A I vettori

$$(0,0,1), \quad (4,4,-6), \quad (2,2,-3),$$

sono linearmente dipendenti.

B I vettori

$$(3,-1,1) \quad \text{e} \quad (-2,2/3,-2/3)$$

sono paralleli.

C I vettori

$$(0,2,5) \quad \text{e} \quad (9,7,-3)$$

sono perpendicolari.

10. Il sistema

$$\begin{cases} kx + y = b_1 \\ 2x + (k-1)y = b_2 \end{cases}$$

A ammette un'unica soluzione per $k=3$ e per ogni coppia (b_1, b_2) fissati;

B ammette un'unica soluzione per $k=-1$ e per ogni coppia (b_1, b_2) fissati;

C ammette esattamente 5 soluzioni per $k=2$ e $(b_1,b_2)=(0,0)$;

D è impossibile per $k=2$ e $(b_1,b_2)=(0,1)$.

11. Due stabilimenti S_1 e S_2 producono rispettivamente il 60% e il 40% del numero di pezzi complessivamente prodotti da un'impresa. Inoltre, sapendo che le percentuali dei pezzi difettosi rispettivamente prodotti dai due stabilimenti sono pari al 3% e al 7%, possiamo dire che la probabilità che estratto un pezzo a caso esso sia difettoso vale

A 1.046 B 0.123 C 0.146 D 0.023 E 0.046

12. Alice ha fatto arrabbiare Sua Maestà la Regina di Cuori, così ha deciso di decapitare dieci carte. Dato che ama molto il colore rosso, ordina di decapitare più carte nere che rosse e lo fa con probabilità 0.7. Sia F_n la variabile aleatoria che conta le carte nere decapitate. Allora, dato che

A F_n segue una distribuzione binomiale di parametri $F_n \sim B(10, 0.7)$,

B F_n segue una distribuzione uniforme di parametri $F_n \sim U(0, 10)$,

C F_n segue una distribuzione di Poisson di parametro $F_n \sim P(10)$,

D F_n segue una distribuzione normale di parametri $F_n \sim N(0.7, 0.49)$,

si ha che la probabilità che vengano decapitate tre carte rosse è

A $P(F_{10} = 7) = \binom{10}{7}(0.7)^7(0.3)^3$,

B $P(F_{10} = 7) = e^{-10}\frac{10^3}{3!}$,

C $P(F_{10} = 3) = \binom{10}{3}(0.7)^3(0.3)^7$,

D $P(F_{10} = 3) = \frac{3}{10}$,

mentre la probabilità che almeno tre carte rosse si salvino è

A $P(F_{10} \leq 7) = e^{-7}\frac{7^3}{3!}$,

B $P(F_{10} \geq 3) = \binom{10}{3}(0.7)^3(0.3)^7 + \ldots + \binom{10}{10}(0.7)^{10}(0.3)^0$,

C $P(F_{10} \geq 7) = \binom{10}{7}(0.7)^7(0.3)^3 + \binom{10}{8}(0.7)^8(0.3)^2 + \binom{10}{9}(0.7)^9(0.3)^1 + \binom{10}{10}(0.7)^{10}(0.3)^0$,

D $P(F_{10} \leq 3) = \frac{3}{10}$,

la media

A $\mathbb{E}(F_{10}) = 0.5$, B $\mathbb{E}(F_{10}) = 7$, C $\mathbb{E}(F_{10}) = 3$, D $\mathbb{E}(F_{10}) = \frac{1}{10}$,

la varianza si ha che la probabilità che vengano decapitate tre carte rosse è

A $Var(F_{10}) = 2.1$. B $Var(F_{10}) = 7$. C $Var(F_{10}) = 1,2$. D $Var(F_{10}) = \frac{25}{3}$.