# CALCOLO

## CONOSCENZE DI BASE

INSIEMI: $A$, $B$, $C$ insiemi.
$A \subseteq B$ $\quad A$ è contenuto in $B$
$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$, $\quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $\quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\}$, $\quad$ se $A \subseteq B \Rightarrow A^c = \{x \in B : x \notin A\} = B \setminus A$
$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$, $\quad \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} = A^n$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI: $f : D_f \longrightarrow Im_f \subseteq Cod_f$, $g : D_g \longrightarrow Im_g$ funzioni
$f$ suriettiva: $\forall y \in Cod_f \, \exists x \in D_f : y = f(x)$ $\quad (Cod_f = Im_f)$
$f$ iniettiva: $f(x_1) \neq f(x_2)$ $\quad \forall x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in D_f$
$f$ biettiva: $\forall x \in D_f \, \exists! y \in Im_f : y = f(x)$ e viceversa
funzione composta: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$
funzione inversa: $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, $(f \circ f^{-1})(y) = y$
$f$ (strettamente) crescente: $\forall x_1, x_2 \in I \subseteq D_f$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq (<) f(x_2)$
$f$ (strettamente) decrescente: $\forall x_1, x_2 \in I \subseteq D_f$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq (>) f(x_2)$
$f$ pari: $f(x) = f(-x)$, $f$ dispari: $f(x) = -f(-x)$

POTENZE E RADICALI: $a, b \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$
$a^0 = 1$ con $a \neq 0$, $\quad a^n a^m = a^{n+m}$, $\quad a^n / a^m = a^{n-m}$, $\quad (a^n)^m = a^{nm}$, $\quad a^n b^n = (ab)^n$
$a^n : b^n = (a/b)^n$, $\quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$, $\quad \sqrt[mn]{a^n} = \sqrt[m]{a}$, $\quad \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$, $\quad \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a/b}$
$\sqrt[n]{a}\sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$, $\quad a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$, $\quad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
N.B. se il radicale ha indice pari, allora la base deve essere positiva; se il radicale ha indice dispari, la base può anche essere negativa.

ESPONENZIALI
$a^x$ ben definito se $\begin{cases} a > 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ a = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ a < 0 & \forall x \in \mathbb{Z} \end{cases}$, $\quad a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$

LOGARITMI: $\log_b a$ $\quad b > 0, b \neq 1, a > 0$
$\log_b b = 1$, $\quad \log_b 1 = 0$, $\quad \log_b a + \log_b c = \log_b ac$, $\quad \log_b a - \log_b c = \log_b a/c$
$c \log_b a = \log_b a^c$, $\quad \log_s a = \log_c a / \log_c s$

FUNZIONI TRIGONOMETRICHE: $\sin x$, $\cos x$, $\tan x = \sin x / \cos x$
$\sin x = \sin(x + 2k\pi)$, $\quad \cos x = \cos(x + 2k\pi)$ con $x \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$
$\tan x = \tan(x + k\pi)$ con $x \in \mathbb{R} \setminus \{x = k\pi/2\}$ e $k \in \mathbb{N}$, $\quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$, $\quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta \sin\alpha$
$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$, $\quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$
$\sin \alpha/2 = \pm\sqrt{(1 - \cos\alpha)/2}$, $\quad \cos\alpha/2 = \pm\sqrt{(1 + \cos\alpha)/2}$

DOMINI DI FUNZIONI: $f(x)$, $g(x)$ funzioni, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{R}^+$
$y = f(x)/g(x) \Rightarrow g(x) \neq 0$, $\quad y = \sqrt[2n]{f(x)} \Rightarrow f(x) \geq 0$,
$y = \log_b(f(x)) \Rightarrow f(x) > 0$, $\quad y = \tan(f(x)) \Rightarrow f(x) \neq \pi/2 + k\pi$
$y = \arcsin(f(x)) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$, $\quad y = \arccos(f(x)) \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 1$

## SUCCESSIONI E LIMITI

$\{a_n\}_n$, $n \in \mathbb{N}$, successione

$a_n$ (strettamente) crescente: $a_n (<) \leq a_{n+1}$
$a_n$ (strettamente) decrescente: $a_n \geq (>) a_{n+1}$

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \nexists & \text{se } a \leq -1 \end{cases}, \quad \lim_{n\to+\infty} n^b = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 0 \\ 1 & \text{se } b = 0 \\ 0 & \text{se } b < 0 \end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \quad \forall b \in \mathbb{R}$
$\lim_{n\to+\infty} \sin a_n = 0$ se $a_n \to 0$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \cos a_n = 1$ se $a_n \to 0$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$ se $a_n \to 0$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}$ se $a_n \to 0$

$$\lim_{n\to+\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n \to +\infty \\ 1 & \text{se } a_n \to 0 \\ b^{a_0} & \text{se } a_n \to a_0 \\ 0 & \text{se } a_n \to -\infty \end{cases}, \quad \lim_{n\to+\infty} \log_b a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a_n \to +\infty \\ 0 & \text{se } a_n \to 1 \\ \log_b a_0 & \text{se } a_n \to a_0 \\ -\infty & \text{se } a_n \to 0^+ \end{cases}$$

$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$ $\quad$ se $a_n \to \pm\infty$, $\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1$ $\quad$ se $a_n \to 0$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1$ $\quad$ se $a_n \to 0$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{(1 + a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha$ $\quad$ se $a_n \to 0$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\log_a n \leq n^c \leq b^n \leq n! \leq n^n$ $\quad$ per $a, b, > 1$, $c > 0$

## ELEMENTI DI ALGEBRA LINEARE

VETTORI: $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_n)$
lunghezza: $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}$
$\alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{z} = (\alpha v_1 + \beta z_1, \ldots, \alpha v_n + \beta z_n)$, $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{z} = v_1 z_1 + \ldots v_n z_n = |\boldsymbol{v}||\boldsymbol{z}| \cos\alpha$, $\quad \alpha$ angolo compreso tra $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z}$

MATRICI: $A = \{a_{ij}\}_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m} \in M^{n\times m}$, $B = \{b_{ij}\}_{i=1,\ldots,p, j=1,\ldots,q} \in M^{p\times q}$
$\alpha A + \beta B = \{\alpha a_{ij} + \beta b_{ij}\}_{i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m}$ se $n = p$, $m = q$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$A\boldsymbol{v} = \left(\sum_{j=1}^m a_{1j} v_j, \ldots, \sum_{j=1}^m a_{nj} v_j\right) \in \mathbb{R}^n \text{ per } \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^m$$

se $n = m = 2$ allora $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
se $n = m = 3$ allora
$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$

## LIMITI DI FUNZIONE

LIMITI DI FUNZIONI ELEMENTARI: $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}^+$
$\lim_{x\to\pm\infty} x^{2n} = +\infty$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} x^{2n+1} = \pm\infty$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \sqrt[2n]{x} = +\infty$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[2n+1]{x} = \pm\infty$
$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$ se $0 < a < 1$, $\quad \lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty$ se $a > 1$
$\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$ se $0 < a < 1$, $\quad \lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$ se $a > 1$
$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$ se $0 < a < 1$, $\quad \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$ se $a > 1$,
$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ se $0 < a < 1$, $\quad \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ se $a > 1$,
$\lim_{x\to\pi^\pm/2} \tan x = \mp\infty$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\pi/2$
$\lim_{x\to+\infty} \log x / x^a = 0$, $\quad \lim_{x\to+\infty} x^a / b^x = 0$

LIMITI NOTEVOLI: $a \in \mathbb{R}^+$
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a e$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$, $\quad \lim_{x\to 0} \frac{(1 + x)^a - 1}{x} = a$

## DERIVATE

REGOLE DI DERIVAZIONE: $f(x)$, $g(x)$ funzioni
$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, $\quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$(f(x)/g(x))' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g^2(x)$, $\quad (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

DERIVATE FONDAMENTALI: $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$
$b' = 0$, $\quad (x^b)' = bx^{b-1}$, $\quad |x|' = x/|x| = |x|/x$, $\quad (\log x)' = 1/x$
$(\log_a x)' = 1/(x \log a)$, $\quad (e^x)' = e^x$, $\quad (a^x)' = a^x \log_a e$, $\quad (\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$, $\quad (\tan x)' = 1/\cos^2 x = 1/(1 + \tan^2 x)$, $\quad (\arcsin x)' = 1/\sqrt{1 - x^2}$
$(\arccos x)' = -1/\sqrt{1 - x^2}$, $\quad (\arctan x)' = 1/(1 + x^2)$

## INTEGRALI

PROPRIETÀ: $f(x)$, $g(x)$ funzioni, $k \in \mathbb{R}$
$\int k f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, $\quad \int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

REGOLE DI INTEGRAZIONE: $f(x)$, $g(x)$ funzioni, $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $F(x)$ primitiva di $f(x)$
integrale definito: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$
integrazione per parti: $\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$
integrazione per sostituzione: $\int f(x)\,dx = \int f(h(t))h'(t)\,dt$ posto $x = h(t)$

INTEGRALI FONDAMENTALI: $a \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$
$\int f^b(x)f'(x)\,dx = \frac{f^{b+1}(x)}{b+1} + c$ con $b \neq -1$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log f(x) + c$
$\int e^{f(x)}f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$, $\int a^{f(x)}f'(x)\,dx = a^{f(x)}/\log_a e + c$
$\int f'(x)\sin(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c$, $\int f'(x)\cos(f(x))\,dx = \sin(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))}\,dx = \tan(f(x)) + c$, $\int \frac{f'(x)}{1 + f^2(x)}\,dx = \arctan(f(x)) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1 - f^2(x)}}\,dx = \arcsin(f(x)) + c = -\arccos(f(x)) + c$

# BIOSTATISTICA

## CALCOLO COMBINATORIO

permutazioni semplici di $n$ oggetti: $P_n = n!$
permutazioni di $n$ con ripetizione: $P^R_{n, n_1, \ldots, n_i} = n!/(n_1! \ldots n_i!)$
disposizioni semplici di $n$ oggetti in $k$ posti: $D_{n,k} = n!/(n - k)!$
disposizioni con ripetizione di $n$ oggetti in $k$ posti: $D^R_{n,k} = n^k$
combinazioni semplici (raggruppamenti di $k$ su $n$): $C_{n,k} = \binom{n}{k} = n!/(k!(n - k)!)$

## PROBABILITÀ

$(S, \mathcal{A}, P)$ spazio di probabilità, $S$ spazio degli eventi campione, $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra, $A$, $B$ eventi, $s \in S$

$0 \leq P(A) \leq 1$, $\quad P(\emptyset) = 0$, $\quad P(S) = 1$, $\quad P(A) = 1 - P(A^c)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$,
$A$, $B$ incompatibili: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
indipendenti: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $\quad$ dipendenti: $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$
formula di Bayes: $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$
probabilità uniforme: $P(s) = 1/|S|$, $\quad P(A) = |A|/|S|$
successione di $n$ prove indipendenti: se $s = (s_1, .., s_n)$ e $p = P(s_i)$ allora $P(s) = p^k(1 - p)^{n-k}$ con $k$ numero di volte in cui accade $s_i$
formula binomiale: $P(\{j = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, $n$ numero di prove

## VARIABILI ALEATORIE

V. A. DISCRETE: $F$ v.a. definita su $(S, P)$ con spazio indotto $(S_F, p_F)$, $p_F(x)$ densità, $k, m \in \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{N}$
valore medio: $\mathbb{E}(F) = \sum_{x\in S} x p_F(x)$, $\quad \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n F_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(F_i)$, $\quad \mathbb{E}(kF) = k\mathbb{E}(F)$,
se $F(\omega) = k \, \forall\omega \in S$ allora $\mathbb{E}(F) = k$, $\quad \min_{\omega\in S} F(\omega) \leq \mathbb{E}(F) \leq \max_{\omega\in S} F(\omega)$
scarto dalla media: $\widehat{F} = F - \mathbb{E}(F)$, $\quad \mathbb{E}(\widehat{F}) = 0$
disuguaglianza di Chebishev $P(F > k) \leq \mathbb{E}(F)/k$ con $k > 0$, $F \geq 0$
varianza: $Var(F) = \mathbb{E}(F^2) - (\mathbb{E}(F))^2$, $\quad Var(kF + m) = k^2 Var(F)$
deviazione standard: $\sigma_F = \sqrt{Var(F)}$
$F \sim B(n, p) : P(F = j) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$, $\quad \mathbb{E}(F) = np$, $\quad Var(F) = np(1 - p)$
$F \sim P(\rho) : P(F = j) = e^{-\rho}\rho^j/j!$, $\quad \mathbb{E}(F) = Var(F) = \rho$

V. A. CONTINUE: $F$ v.a. definita su $(\mathbb{R}, p)$ con spazio indotto $(\mathbb{R}, p_F)$, $p_F(x)$ densità, $J \subset I \subset \mathbb{R}$
$P(I) = \int_I p(x)\,dx$, $P(F \in I) = \int_I p_F(x)\,dx$, $\quad \mathbb{E}(F) = \int_{\mathbb{R}} x p_F(x)\,dx$
$Var(F) = \mathbb{E}(F^2) - (\mathbb{E}(F))^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 p_F(x)\,dx - (\mathbb{E}(F))^2$
$F \sim U(I) : p_F(x) = \frac{1}{|I|} \forall x \in I$, $\quad P(F \in J) = \frac{|J|}{|I|}$
$\mathbb{E}(F) = \frac{1}{|I|}\int_I x\,dx$, $\quad Var(F) = \frac{1}{|I|}\int_I x^2\,dx - \left(\frac{1}{|I|}\int_I x\,dx\right)^2$
$Z \sim N(0, 1) : \mathbb{E}(Z) = 0$, $\quad Var(Z) = 1$, $\quad$ densità $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}/\sqrt{2\pi}$
$G = \sigma Z + m \sim N(m, \sigma^2) : \mathbb{E}(G) = m$, $Var(G) = \sigma^2$, densità $g(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}/\sqrt{2\pi}\sigma$