Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

II Appello sessione invernale 28/02/2020

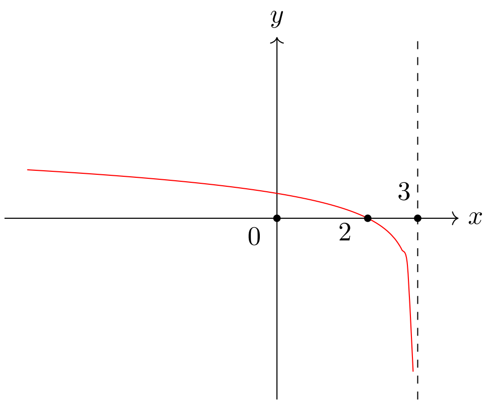
FILA D

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{3-x}\right).$$

Il dominio della derivata prima coincide con quello della funzione?

Svolgimento:



- Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 3\}$;
- studio del segno: $f(x) \geq 0$ se $\sqrt{3-x} \geq 1$ quindi $x \leq 2$, $f(x) < 0$ se $\sqrt{3-x} < 1$ quindi $2 < x < 3$;
- eventuali parità: $f(x)$ non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 3^-} \log\left(\sqrt{3-x}\right) = -\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to -\infty} \log\left(\sqrt{3-x}\right) = +\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x\to -\infty} \frac{\log\left(\sqrt{3-x}\right)}{x} = 0,$$

non esiste nessun asintoto obliquo a $+\infty$;

- derivata prima:

$$f'(x) = (\log\left(\sqrt{3-x}\right))' = \frac{1}{\sqrt{3-x}}(\sqrt{3-x})' = -\frac{1}{2(3-x)}.$$

Importante: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 3\} \subsetneq D' = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq 3\}$;

- punti di massimo e minimo: $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$, quindi non ci sono punti di massimo né di minimo;
- monotonia: $f'(x) < 0$, quindi la funzione è decrescente per ogni punto del suo dominio.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Risolvere il seguente sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2-k & 3k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (x, y).$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer.
Determinare i valori di k per cui i vettori

$$(1, -2) \quad \text{e} \quad (2-k, 3k)$$

sono paralleli e perpendicolari.

Svolgimento:

Il sistema è

$$\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ (2-k)x + 3ky = -2. \end{cases}$$

Dato che

$$|A| = -3k - 2(2-k) = -k - 4,$$

possiamo applicare il metodo di Cramer se $k \neq -4$. Quindi

$$x = -\frac{4}{k+4}, \quad y = -\frac{2}{k+4}.$$

Se $k = -4$ dobbiamo considerare

$$\begin{cases} -x + 2y = 0, \\ 6x - 12y = -2. \end{cases}$$

Dato che

$$\frac{-1}{6} = \frac{2}{-12} \neq \frac{0}{-2},$$

il sistema è impossibile.

Se $(1, -2)$ e $(2-k, 3k)$ sono paralleli allora esiste un valore $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui $(2-k, 3k) = \gamma(1, -2)$, quindi

$$\begin{cases} 2 - k = \gamma \\ 3k = -2\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = -4.$$

Se sono ortogonali tra di loro allora il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(1, -2) \cdot (2-k, 3k) = 2 - k - 6k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{7}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Calcolare

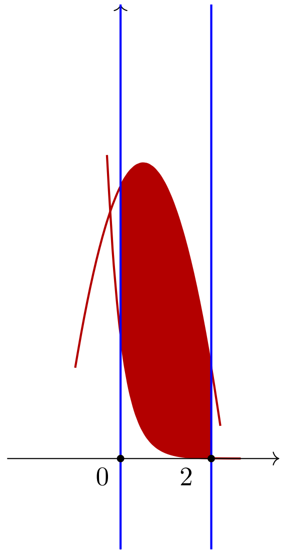
(3.1) l'area compresa tra le rette $x = 0$, $x = 2$, ed i grafici di

$$f(x) = e^{-3x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = -2x^2 + 2x + 6;$$

(3.2) l'area di $f(x)$ nel primo quadrante.

Svolgimento:

(3.1)
$$\begin{aligned}
&\int_0^2 -2x^2 + 2x + 6\,dx - \int_0^2 e^{-3x+1}\,dx \\
&= -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 6x\Big|_0^2 + \frac{1}{3}e^{-3x+1}\Big|_0^2 \\
&= \frac{32}{3} + \frac{1}{3}(e^{-5} - e);
\end{aligned}$$



(3.2)

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b e^{-3x+1}\,dx = -\lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}e^{-3x+1}\Big|_0^b = \frac{1}{3}e.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Si stima che il 35% degli utenti di Netflix guardi "La casa di carta", che il 21% segua "Sherlock" e che il 16% veda entrambi. Determina la probabilità che un utente scelto casualmente

(4.1) guardi "La casa di carta" sapendo che segue anche "Sherlock";

(4.2) guardi "Sherlock" sapendo che segue anche "La casa di carta".

<u>Svolgimento:</u>

Siano

$$C = \{\text{l'utente segue "La casa di carta"}\} \quad \text{e} \quad S = \{\text{l'utente segue "Sherlock"}\}.$$

Allora

$$P(C) = 0.35, \quad P(S) = 0.21 \quad \text{e} \quad P(C \cap S) = 0.16.$$

(4.1) $P(C|S) = \dfrac{P(C \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.16}{0.21} = 0.762;$

(4.2) $P(S|C) = \dfrac{P(S \cap C)}{P(C)} = \dfrac{0.16}{0.35} = 0.457.$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. Il bus 71 parte da Tiburtina alle cinque di mattina ad intervalli di dodici minuti. Quindi, il primo bus parte alle 5:00, il secondo alle 5:12, il terzo alle 5:24 e così via. Un pendolare arriva alla fermata ad un orario che è uniformemente distribuito tra le 8:00 e le 8:12. Calcolare la probabilità che

(5.1) il pendolare aspetti meno di dieci minuti;

(5.2) il pendolare aspetti almeno dieci minuti;

(5.3) media e varianza della variabile aleatoria

$$F = \text{ tempo di attesa del pendolare.}$$

Svolgimento:

$F \sim U(0,12)$, quindi

(5.1) per aspettare meno di dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 8:02 e le 8:12, quindi

$$P(0 \leq F < 10) = \frac{10-0}{12-0} = \frac{5}{6};$$

(5.2) per aspettare almeno dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 8:00 e le 8:02, quindi

$$P(10 \leq F \leq 12) = 1 - P(0 \leq F < 10) = \frac{1}{6};$$

(5.3) $\mathbb{E}(\mathbb{F}) = \frac{12+0}{2} = 6$, $Var(F) = \frac{(12-0)^2}{12} = 12.$