Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova di esonero del 02/12/2019

FILA D

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione:

(1.1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4 + 3\log n^2 - 5(-1)^{n-2}}{4n^3 \log(n-3) - 3n^4}$ (1.2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{\frac{1}{n^2}}}{\log\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} - \dfrac{n^3}{2^n}$ (1.3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4 + 3\log n^2 - 5}{4n^3 \log(n-3) - 3n^4}(-1)^{n-2}$

Provare che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n-1}{n} = 2$$

utilizzando la definizione di limite.

Svolgimento:

(1.1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4 + 3\log n^2 - 5(-1)^{n-2}}{4n^3 \log(n-3) - 3n^4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4}{-3n^4} = -\dfrac{5}{3}$

(1.2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{\frac{1}{n^2}}}{\log\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} - \dfrac{n^3}{2^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1 - e^{\frac{1}{n^2}}}{\log\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-\frac{1}{n^2}}{-\frac{3}{n^2}} = \dfrac{1}{3}$

(1.3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4 + 3\log n^2 - 5}{4n^3 \log(n-3) - 3n^4}(-1)^{n-2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n^4 + 3\log n^2 - 5}{4n^3 \log(n-3) - 3n^4}(-1)^{n}$ non esiste

Vogliamo verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{se } n > N \text{ allora } \quad \left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| < \varepsilon$$

Dato che, per ε fissato,

$$\left|\frac{2n-1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

serve $N = \left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil$.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Stabilire se i seguenti vettori sono o meno linearmente dipendenti:

$$\boldsymbol{v} = (2, 0, 3), \qquad \boldsymbol{z} = (5, -4, -1), \qquad \boldsymbol{w} = (1, 4, 3).$$

Dati i vettori

$$\boldsymbol{v} = (2, -3, 0), \qquad \boldsymbol{z} = (0, 1, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (3, 0, 4),$$

stabilire se

(2.1) esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z} + k\boldsymbol{w}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$;

(2.2) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{z} + (\lambda, 8, -1)$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$.

Svolgimento:

Controllo per quali valori di γ, λ, $\beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\gamma\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} = 0.$$

Dato che

$$\begin{cases} 2\gamma + 5\lambda + \beta = 0 \\ -4\lambda + 4\beta = 0 \\ 3\gamma - \lambda + 3\beta = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = \lambda = \beta = 0$$

i vettori sono linearmente indipendenti.

(2.1) Abbiamo $\boldsymbol{u}_1 = (3k, 1, 1 + 4k)$ e serve $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 6k - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = \frac{1}{2}.$$

(2.2) Abbiamo $\boldsymbol{u}_2 = (\lambda, 9, 0)$ e serve $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{u}_2 = (\lambda, 9, 0) = \gamma\boldsymbol{v} \quad \text{per qualche } \gamma \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = -6.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 & -k \\ 0 & 2 & 3 \\ k-1 & 1 & k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer. Se il sistema risulta indeterminato, scrivere la soluzione dipendente da parametro/i.

Svolgimento:

Dato che $|A| = 4k(k-1)$, allora

- se $k \neq 1$ e $k \neq 0$, allora

$$x = \frac{1}{k-1}, \qquad y = 0, \qquad z = 0$$

- se $k = 0$

$$\begin{cases} -x + y = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ -x + y = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ z = -\dfrac{2}{3}(1+t) \\ y = 1 + t \end{cases}$$

- se $k = 1$

$$\begin{cases} y - z = 1 \\ 2y + 3z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 1 + z \\ 2y + 3z = 0 \\ y = 1 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile}$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Un'urna contiene 6 sfere nere, 7 sfere rosse e 7 sfere viola.

(4.1) Pesco una sfera dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera nera}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera rossa}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ 0.75 ☐ 0.6 ☒ 0.65 ☐ 1.05 ☐ 0.79

(4.2) Pesco due sfere con reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera rossa}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera viola}\},$$

allora $P(E_1 \cap E_2)$ vale

☐ 0.2 ☒ 0.1225 ☐ 0.125 ☐ $0.\overline{3}$ ☐ 0.25

(4.3) Pesco due sfere senza reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera viola e rossa}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco due sfere nere}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ $.207 \cdot 10^{-3}$ ☐ $207 \cdot 10^{-4}$ ☐ $2.07 \cdot 10^{-3}$ ☐ $20.7 \cdot 10^{-3}$ ☒ nessuna delle precedenti

<u>Giustificare le scelte.</u>

(4.1) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{6}{20} + \frac{7}{20}$ (eventi incompatibili);

(4.2) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{7}{20}\frac{7}{20}$ (eventi indipendenti).

Errata corrige del punto (4.3): data l'ambiguità del testo, considero valide entrambe le seguenti soluzioni:

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{7}{1}\binom{7}{1}+\binom{6}{2}}{\binom{20}{2}}$ (eventi indipendenti, non tengo conto dell'ordine viola-rossa);
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{7}{20} \cdot \frac{7}{19} + \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19}$ (eventi indipendenti, tengo conto dell'ordine viola-rossa).

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. C'è la partita di quidditch Grifondoro-Serpeverde e Ron è portiere. Sa che in condizioni normali parerebbe l'80% dei tiri ma se è troppo agitato la percentuale scende al 30%. Ron si agita molto per il 75% delle partite.

(5.1) Qual è la probabilità che Ron pari un tiro?

(5.2) Qual è la probabilità che, sapendo che Ron ha parato un tiro, allora fosse nervoso?

Svolgimento:

Sappiamo che, se

$$E_1 = \{\text{Ron si agita}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{Ron para il lancio}\},$$

allora

$$P(E_1) = 0.75, \quad P(E_1^c) = 0.25, \quad P(E_2|E_1) = 0.3, \quad P(E_2|E_1^c) = 0.8.$$

(5.1) $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = 0.425.$

(5.2) $P(E_1|E_2) = \dfrac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = 0.53.$