Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

II Appello sessione invernale 28/02/2020

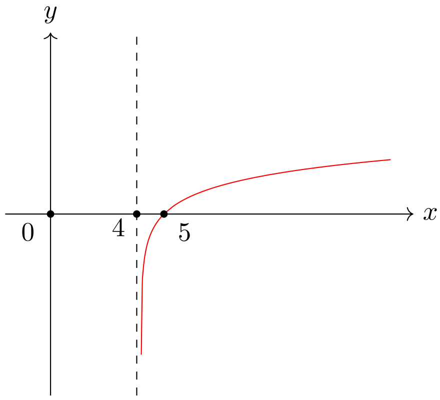
FILA C

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x-4}\right)$$

Il dominio della derivata prima coincide con quello della funzione?

Svolgimento:



- Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 4\}$;
- studio del segno: $f(x) \geq 0$ se $\sqrt{x-4} \geq 1$ quindi $x \geq 5$, $f(x) < 0$ se $\sqrt{x-4} < 1$ quindi $4 < x < 5$;
- eventuali parità: $f(x)$ non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 4^+} \log\left(\sqrt{x-4}\right) = -\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\sqrt{x-4}\right) = +\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\sqrt{x-4}\right)}{x} = 0,$$

non esiste nessun asintoto obliquo a $+\infty$;

- derivata prima:

$$f'(x) = (\log\left(\sqrt{x-4}\right))' = \frac{1}{\sqrt{x-4}}(\sqrt{x-4})' = \frac{1}{2(x-4)}.$$

Importante: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 4\} \subsetneq D' = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq 4\}$;

- punti di massimo e minimo: $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$, quindi non ci sono punti di massimo né di minimo;
- monotonia: $f'(x) > 0$, quindi la funzione è crescente per ogni punto del suo dominio.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Risolvere il seguente sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k+2 & -k \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (x, y).$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer.
Determinare i valori di k per cui i vettori

$$(2, -3) \quad \text{e} \quad (k+2, -k)$$

sono paralleli e perpendicolari.

<u>Svolgimento:</u>

Il sistema è

$$\begin{cases} (k+2)x - ky = 0, \\ -2x + 3y = -1. \end{cases}$$

Dato che

$$|A| = 3(k+2) - 2k = k + 6,$$

possiamo applicare il metodo di Cramer se $k \neq -6$. Quindi

$$x = -\frac{k}{k+6}, \quad y = -\frac{k+2}{k+6}.$$

Se $k = -6$ dobbiamo considerare

$$\begin{cases} -4x + 6y = 0, \\ -2x + 3y = -1. \end{cases}$$

Dato che

$$\frac{-4}{-2} = \frac{6}{3} \neq \frac{0}{-1},$$

il sistema è impossibile.

Se $(2, -3)$ e $(k+2, -k)$ sono paralleli allora esiste un valore $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui $(k+2, -k) = \gamma(2, -3)$, quindi

$$\begin{cases} k + 2 = 2\gamma \\ -k = -3\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = -6.$$

Se sono ortogonali tra di loro allora il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(2, -3) \cdot (k+2, -k) = 2k + 4 + 3k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{4}{5}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

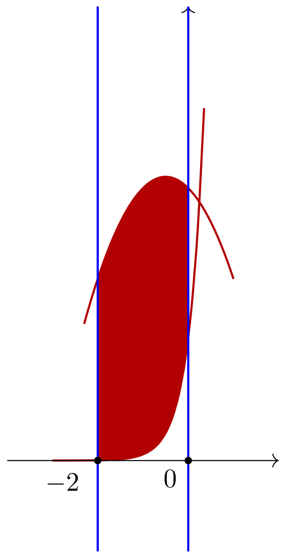
3. Calcolare

(3.1) l'area compresa tra le rette $x = -2$, $x = 0$, ed i grafici di

$$f(x) = e^{3x+1} \quad \text{e} \quad g(x) = -x^2 - x + 6;$$

(3.2) l'area di $f(x)$ nel secondo quadrante.

Svolgimento:



(3.1)

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^{0} -x^2 - x + 6\,dx - \int_{-2}^{0} e^{3x+1}\,dx \\ &= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\Big|_{-2}^{0} - \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_{-2}^{0} \\ &= \frac{34}{3} - \frac{1}{3}(e - e^{-5});\end{aligned}$$

(3.2)

$$\int_{-\infty}^{0} e^{3x+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{0} e^{3x+1}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{3}e^{3x+1}\Big|_{-b}^{0} = \frac{1}{3}e.$$

Nome e cognome: . . . . Matricola . . . .

4. Si stima che il 25% degli utenti di Netflix guardi "BoJack Horseman", che il 36% segua "The witcher" e che il 11% veda entrambi. Determina la probabilità che un utente scelto casualmente

(4.1) guardi "BoJack Horseman" sapendo che segue anche "The witcher";

(4.2) guardi "The witcher" sapendo che segue anche "BoJack Horseman".

Svolgimento:

Siano

$$B = \{\text{l'utente segue "BoJack Horseman"}\} \quad \text{e} \quad W = \{\text{l'utente segue "The witcher"}\}\,.$$

Allora

$$P(B) = 0.25, \quad P(W) = 0.36 \quad \text{e} \quad P(B \cap W) = 0.11.$$

(4.1) $P(B|W) = \dfrac{P(B \cap W)}{P(W)} = \dfrac{0.11}{0.36} = 0.306;$

(4.2) $P(W|B) = \dfrac{P(B \cap W)}{P(B)} = \dfrac{0.11}{0.25} = 0.44.$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. Il bus 409 parte da Arco di Travertino alle cinque di mattina ad intervalli di dodici minuti. Quindi, il primo bus parte alle 5:00, il secondo alle 5:12, il terzo alle 5:24 e così via. Un pendolare arriva alla fermata ad un orario che è uniformemente distribuito tra le 7:00 e le 7:12. Calcolare la probabilità che

(5.1) il pendolare aspetti meno di dieci minuti;

(5.2) il pendolare aspetti almeno dieci minuti;

(5.3) media e varianza della variabile aleatoria

$$F = \text{ tempo di attesa del pendolare.}$$

<u>Svolgimento:</u>

$F \sim U(0, 12)$, quindi

(5.1) per aspettare meno di dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 7:02 e le 7:12, quindi

$$P(0 \leq F < 10) = \frac{10-0}{12-0} = \frac{5}{6};$$

(5.2) per aspettare almeno dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 7:00 e le 7:02, quindi

$$P(10 \leq F \leq 12) = 1 - P(0 \leq F < 10) = \frac{1}{6};$$

(5.3) $\mathbb{E}(\mathbb{F}) = \dfrac{12+0}{2} = 6$, $Var(F) = \dfrac{(12-0)^2}{12} = 12.$