Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova di esonero del 02/12/2019

FILA C

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{2}{3n}-1}{\sin\frac{1}{6n^2}} - \frac{\log n^3}{3^{n-1}}$ (1.2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-\log(n^2-3)+\cos n\pi}{4n^2+n\sqrt{n}}$ (1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-\log(n^2-3)+1}{4n^2+n\sqrt{n}}\cos n\pi$

Provare che

$$\lim_{n\to+\infty} e^{2n}-2=+\infty$$

utilizzando la definizione di limite.

Svolgimento:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{2}{3n}-1}{\sin\frac{1}{6n^2}} - \frac{\log n^3}{3^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{2}{3n}-1}{\sin\frac{1}{6n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{4}{9n^2}}{\frac{1}{6n^2}} = -\frac{4}{3}$

(1.2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-\log(n^2-3)+\cos n\pi}{4n^2+n\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2}{4n^2} = \frac{3}{4}$

(1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-\log(n^2-3)+1}{4n^2+n\sqrt{n}}\cos n\pi = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2-\log(n^2-3)+1}{4n^2+n\sqrt{n}}(-1)^n$ non esiste

Vogliamo verificare che

$$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbb{N}: \quad \text{se } n>N \text{ allora} \quad e^{2n}-2>M$$

Dato che, per M fissato,

$$e^{2n}>M+2$$

serve $N=\left\lceil \frac{\log(M+2)}{2} \right\rceil$.

Nome e cognome: ....   Matricola ....

2. Stabilire se i seguenti vettori sono o meno linearmente dipendenti:

$$\boldsymbol{v} = (3, 2, -1), \qquad \boldsymbol{z} = (0, 4, -6), \qquad \boldsymbol{w} = (9, 2, 3).$$

Dati i vettori

$$\boldsymbol{v} = (3, -1, 1), \qquad \boldsymbol{z} = (7, 4, 1), \qquad \boldsymbol{w} = (0, 2, -1),$$

stabilire se

(2.1) esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z} + k\boldsymbol{w}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$;

(2.2) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{z} + (\lambda, 2, -1)$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$.

<u>Svolgimento:</u>

Controllo per quali valori di γ, λ, $\beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\gamma\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} = 0.$$

Dato che

$$\begin{cases} 3\gamma + 9\beta = 0 \\ 2\gamma + 4\lambda + 2\beta = 0 \\ -\gamma - 6\lambda + 3\beta = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = \lambda = -\frac{\gamma}{3}$$

i vettori sono linearmente dipendenti.

(2.1) Abbiamo $\boldsymbol{u}_1 = (7, 4 + 2k, 1 - k)$ e serve $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 18 - 3k = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k = 6.$$

(2.2) Abbiamo $\boldsymbol{u}_2 = (7 + \lambda, 6, 0)$ ma, essendo l'ultima componente nulla, $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfi la richiesta.

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -k+1 \\ 3 & k & 0 \\ 0 & -k & k \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer. Se il sistema risulta indeterminato, scrivere la soluzione dipendente da parametro/i.

Svolgimento:

Dato che $|A| = 3k(k-3)$, allora

- se $k \neq 0$ e $k \neq 3$, allora

$$x = \frac{2(2k-5)}{3(k-3)}, \qquad y = -\frac{k-1}{k(k-3)}, \qquad z = -\frac{2}{k(k-3)}$$

- se $k = 0$

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 3x = 3 \\ 0 = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \text{impossibile}$$

- se $k = 3$

$$\begin{cases} 2y - 2z = 0 \\ 3x + 3y = 3 \\ -3y + 3z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} y - z = 0 \\ x + y = 1 \\ y - z = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad \text{impossibile}$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Un'urna contiene 5 sfere viola, 5 sfere gialle e 5 sfere blu.

(4.1) Pesco una sfera dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera viola}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera gialla}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ 0.75 ☐ 0.7 ☐ nessuna delle precedenti ☐ $1.\overline{6}$ ☒ $0.\overline{6}$

(4.2) Pesco due sfere con reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera viola}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera gialla}\},$$

allora $P(E_1 \cap E_2)$ vale

☐ 0.1 ☐ 0.2 ☐ 0.16 ☒ $0.\overline{1}$ ☐ 0.05

(4.3) Pesco due sfere senza reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera gialla e viola}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco due sfere blu}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ $214 \cdot 10^{-2}$ ☐ $214 \cdot 10^{-3}$ ☐ $214 \cdot 10^{-4}$ ☐ $21.4 \cdot 10^{-3}$ ☐ $2.14 \cdot 10^{-2}$

Giustificare le scelte.

(4.1) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{5}{15} + \frac{5}{15}$ (eventi incompatibili);

(4.2) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{5}{15}\frac{5}{15}$ (eventi indipendenti).

Errata corrige del punto (4.3): data l'ambiguità del testo, considero valide entrambe le seguenti soluzioni:

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{1}+\binom{5}{2}}{\binom{15}{2}}$ (eventi indipendenti, non tengo conto dell'ordine giallo-viola);
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{5}{15} \cdot \frac{5}{14} + \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14}$ (eventi indipendenti, tengo conto dell'ordine giallo-viola).

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. C'è la partita di quidditch Grifondoro-Serpeverde e Fred si diverte a tirare bolidi contro Goyle, che ha già di suo un equilibrio precario. Infatti, tende a cadere dalla scopa a causa di movimenti bruschi il 35% delle volte e se arriva un bolide la probabilità sale al 85%. Purtroppo per Goyle, Fred ha una buona mira e colpisce il bersaglio con una probabilità del 75%.

(5.1) Qual è la probabilità che Goyle cada dalla scopa?

(5.2) Qual è la probabilità che, sapendo che Goyle è caduto, Fred non ne sia stato la causa?

<u>Svolgimento:</u>
Sappiamo che, se

$$E_1 = \{\text{Fred colpisce il bersaglio}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{Goyle cade dalla scopa}\},$$

allora

$$P(E_1) = 0.75, \quad P(E_1^c) = 0.25, \quad P(E_2|E_1) = 0.85, \quad P(E_2|E_1^c) = 0.35.$$

(5.1) $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = 0.725.$

(5.2) $P(E_1^c|E_2) = \dfrac{P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)}{P(E_2)} = 0.12.$