Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

II Appello sessione invernale 28/02/2020

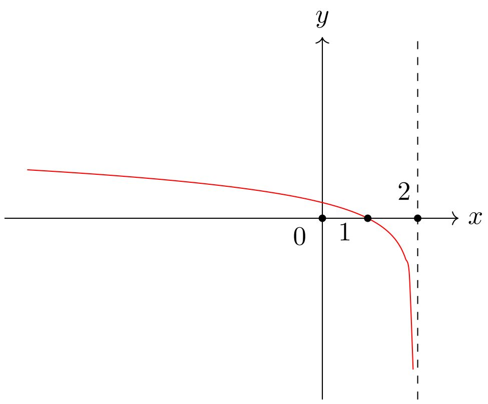
FILA B

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{2-x}\right).$$

Il dominio della derivata prima coincide con quello della funzione?

Svolgimento:



- Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 2\}$;
- studio del segno: $f(x) \geq 0$ se $\sqrt{2-x} \geq 1$ quindi $x \leq 1$, $f(x) < 0$ se $\sqrt{2-x} < 1$ quindi $1 < x < 2$;
- eventuali parità: $f(x)$ non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 2^-} \log\left(\sqrt{2-x}\right) = -\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to -\infty} \log\left(\sqrt{2-x}\right) = +\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{\log\left(\sqrt{2-x}\right)}{x} = 0,$$

non esiste nessun asintoto obliquo a $+\infty$;

- derivata prima:

$$f'(x) = (\log\left(\sqrt{2-x}\right))' = \frac{1}{\sqrt{2-x}}(\sqrt{2-x})' = -\frac{1}{2(2-x)}.$$

Importante: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x < 2\} \subsetneq D' = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq 2\}$;

- punti di massimo e minimo: $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$, quindi non ci sono punti di massimo né di minimo;
- monotonia: $f'(x) < 0$, quindi la funzione è decrescente per ogni punto del suo dominio.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Risolvere il seguente sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ 3-k & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (x, y).$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer.
Determinare i valori di k per cui i vettori

$$(-2, 4) \quad \text{e} \quad (k-1, 3-k)$$

sono paralleli e perpendicolari.

Svolgimento:

Il sistema è

$$\begin{cases} (k-1)x + y = 1, \\ (3-k)x - 2y = 0. \end{cases}$$

Dato che

$$|A| = -2(k-1) - (3-k) = -k - 1,$$

possiamo applicare il metodo di Cramer se $k \neq -1$. Quindi

$$x = \frac{2}{k+1}, \quad y = -\frac{k-3}{k+1}.$$

Se $k = -1$ dobbiamo considerare

$$\begin{cases} -2x + y = 1, \\ 4x - 2y = 0. \end{cases}$$

Dato che

$$\frac{4}{-2} = \frac{-2}{1} \neq \frac{0}{1},$$

il sistema è impossibile.

Se $(-2, 4)$ e $(k+1, 3-k)$ sono paralleli allora esiste un valore $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui $(k+1, 3-k) = \gamma(-2, 4)$, quindi

$$\begin{cases} k - 1 = -2\gamma \\ 3 - k = 4\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = -1.$$

Se sono ortogonali tra di loro allora il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(-2, 4) \cdot (k-1, 3-k) = -2k + 2 + 12 - 4k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{7}{3}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

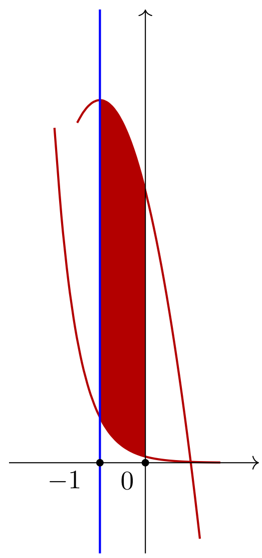
3. Calcolare

(3.1) l'area compresa tra le rette $x = -1$, $x = 0$, ed i grafici di

$$f(x) = e^{-2x-2} \quad \text{e} \quad g(x) = -2x^2 - 4x + 6;$$

(3.2) l'area di $f(x)$ nel primo quadrante.

<u>Svolgimento:</u>



(3.1)

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^{0} -2x^2 - 4x + 6\,dx - \int_{-1}^{0} e^{-2x-2}\,dx \\
&= -\frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 6x\Big|_{-1}^{0} + \frac{1}{2}e^{-2x-2}\Big|_{-1}^{0} \\
&= \frac{22}{3} + \frac{1}{2}(e^{-2} - 1);
\end{aligned}$$

(3.2)

$$\int_0^{+\infty} e^{-2x-2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-2x-2}\,dx = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}e^{-2x-2}\Big|_0^b = \frac{1}{2}e^{-2}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Si stima che il 45% degli utenti di Netflix guardi "Stranger things", che il 31% segua "Hill house" e che il 26% veda entrambi. Determina la probabilità che un utente scelto casualmente

(4.1) guardi "Stranger things" sapendo che segue anche "Hill house";

(4.2) guardi "Hill house" sapendo che segue anche "Stranger things".

Svolgimento:

Siano

$$S = \{\text{l'utente segue "Stranger things"}\} \quad \text{e} \quad H = \{\text{l'utente segue "Hill house"}\}.$$

Allora

$$P(S) = 0.45, \quad P(H) = 0.31 \quad \text{e} \quad P(S \cap H) = 0.26.$$

(4.1) $P(S|H) = \dfrac{P(S \cap H)}{P(H)} = \dfrac{0.26}{0.31} = 0.839;$

(4.2) $P(H|S) = \dfrac{P(H \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.26}{0.45} = 0.578.$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. Il bus 20 parte da Anagnina alle cinque di mattina ad intervalli di dodici minuti. Quindi, il primo bus parte alle 5:00, il secondo alle 5:12, il terzo alle 5:24 e così via. Un pendolare arriva alla fermata ad un orario che è uniformemente distribuito tra le 6:00 e le 6:12. Calcolare la probabilità che

(5.1) il pendolare aspetti meno di dieci minuti;

(5.2) il pendolare aspetti almeno dieci minuti;

(5.3) media e varianza della variabile aleatoria

$$F = \text{ tempo di attesa del pendolare.}$$

<u>Svolgimento:</u>

$F \sim U(0, 12)$, quindi

(5.1) per aspettare meno di dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 6:02 e le 6:12, quindi

$$P(0 \leq F < 10) = \frac{10-0}{12-0} = \frac{5}{6};$$

(5.2) per aspettare almeno dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 6:00 e le 6:02, quindi

$$P(10 \leq F \leq 12) = 1 - P(0 \leq F < 10) = \frac{1}{6};$$

(5.3) $\mathbb{E}(\mathbb{F}) = \dfrac{12+0}{2} = 6$, $Var(F) = \dfrac{(12-0)^2}{12} = 12$.