Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

I Appello sessione invernale 27/01/2020

FILA B

1. Determinare gli asintoti verticali, orizzontali, ed obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{2x^2 - 7}{x + 2}.$$

Calcolarne, inoltre, la derivata prima e individuare eventuali punti di massimo e/o minimo.

Svolgimento.

• Asintoti verticali: c'è un asintoto verticale per $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{2x^2 - 7}{x + 2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{2x^2 - 7}{x + 2} = +\infty.$$

• Asintoti orizzontali: dato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 7}{x + 2} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti orizzontali.

• Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 7}{x(x + 2)} = 2, \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - 7}{x + 2} - 2x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-4x - 7}{x + 2} = -4,$$

quindi

$$y = 2x - 4$$

è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

• Calcolo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x^2 - 7)'(x + 2) - (x + 2)'(2x^2 - 7)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 7}{(x + 2)^2}.$$

• Dato che $2x^2 + 8x + 7 = \left(x - \left(-2 + \sqrt{2}/2\right)\right)\left(x - \left(-2 - \sqrt{2}/2\right)\right)$, la derivata prima si annulla per $x = -2 \pm \sqrt{2}/2$. È positiva all'esterno delle radici e negativa all'interno, quindi $x = -2 - \sqrt{2}/2$ è punto di massimo mentre $-2 + \sqrt{2}/2$ è punto di minimo.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Disponiamo di g_1 grammi della sostanza S_1 e di g_2 grammi della sostanza S_2. Mescolando il 40% dei g_1 grammi e il 3% dei g_2 grammi otteniamo 0.46 grammi di composto, mentre togliendo al 20% dei g_1 grammi il 2.5% dei g_2 grammi otteniamo 0.15 grammi di composto. Quanti sono i grammi g_1, g_2?

<u>Svolgimento:</u>

Il sistema è

$$\begin{cases} 40\% g_1 + 3\% g_2 = 0.46 \\ 20\% g_1 - 2.5\% g_2 = 0.15 \end{cases} \qquad \begin{cases} 40 g_1 + 3 g_2 = 46 \\ 200 g_1 - 25 g_2 = 150 \end{cases}$$

Dato che

$$det \begin{pmatrix} 40 & 3 \\ 200 & -25 \end{pmatrix} = -1600 \neq 0$$

applico il Teorema di Cramer, ottenendo

$$x = \frac{det \begin{pmatrix} 46 & 3 \\ 150 & -25 \end{pmatrix}}{-1600} = \frac{1600}{1600} = 1, \quad y = \frac{det \begin{pmatrix} 40 & 46 \\ 200 & 150 \end{pmatrix}}{-1600} = \frac{3200}{1600} = 2.$$

Nome e cognome: . . . . Matricola . . . .

3. Calcolare l'area della regione del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2},$$

l'asse delle x e la retta $x = 0$.

Svolgimento:

Prima calcolo, per $0 < p < +\infty$,

$$\int_0^p \frac{1}{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^p \frac{3}{1+(3x)^2}\,dx = \frac{1}{3}\arctan 3x\Big|_0^p = \frac{1}{3}\arctan 3p,$$

quindi

$$\frac{1}{3}\lim_{p\to+\infty}\arctan 3p = \frac{\pi}{6}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Si estraggono, simultaneamente, due carte da un mazzo di 52 (13 quadri, 13 picche, 13 cuori, 13 fiori). Calcolare la probabilità che

(4.1) siano due cuori o due quadri;

(4.2) due figure e due cuori;

(4.3) due figure o due cuori.

Svolgimento:

(4.1) Siano

$$\blacklozenge = \{\text{escono due quadri}\} \quad \text{e} \quad \heartsuit = \{\text{escono due cuori}\}\,.$$

Vogliamo calcolare $\blacklozenge \cup \heartsuit$. Dato che $\blacklozenge \cap \heartsuit = \emptyset$, vale

$$P(\blacklozenge \cup \heartsuit) = P(\blacklozenge) + P(\heartsuit) = 2P(\blacklozenge) = 2\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}}.$$

(4.2) Sia

$$F = \{\text{escono due figure}\}\,.$$

Dato che ci sono 3 figure che sono anche cuori, il numero di casi favorevoli è $C_{3,2}$, quindi

$$P(F \cap \heartsuit) = \frac{C_{3,2}}{C_{52,2}}.$$

(4.3) Vogliamo calcolare $F \cup \heartsuit$. Dato che $F \cap \heartsuit \neq \emptyset$, vale

$$P(F \cup \heartsuit) = P(F) + P(\heartsuit) - P(F \cap \heartsuit) = \frac{C_{12,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} - \frac{C_{3,2}}{C_{52,2}}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. A Gotham city, la criminalità è molto alta nonostante la presenza di Batman. Sapendo che Batman riceve un numero medio di chiamate per notte pari a 3.5, calcolare la probabilità che

(5.1) Batman riceva più di tre chiamate d'aiuto nell'arco di una notte;

(5.2) Batman riceva al massimo due chiamate d'aiuto nell'arco di due notti;

(5.3) Batman riceva esattamente 4 chiamate d'aiuto nell'arco di quattro notti e mezza.

(5.1) $F_1 \sim P(3.5)$ quindi

$$P(F_1 > 3) = 1 - P(F_1 \leq 3) = 1 - P(F_1 = 3) - P(F_1 = 2) - P(F_1 = 1) - P(F_1 = 0) = 1 - e^{-3.5}\left(\frac{(3.5)^3}{3!} + \frac{(3.5)^2}{2!} + \frac{(3.5)^1}{1!} + \frac{(3.5)^0}{0!}.\right)$$

(5.2) $F_2 \sim P(7)$ quindi

$$P(F_2 \leq 2) = P(F_2 = 2) + P(F_2 = 1) + P(F_2 = 0) = e^{-7}\left(\frac{7^2}{2!} + \frac{7^1}{1!} + \frac{7^0}{0!}.\right)$$

(5.3) $F_2 \sim P(15.75)$ quindi

$$P(F_3 = 4) = e^{-15.75}\frac{(15.75)^4}{4!}.$$