Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

CORSO DI CALCOLO E BIOSTATISTICA - CANALE A-E

PROVA DI ESONERO DEL 22/01/2020

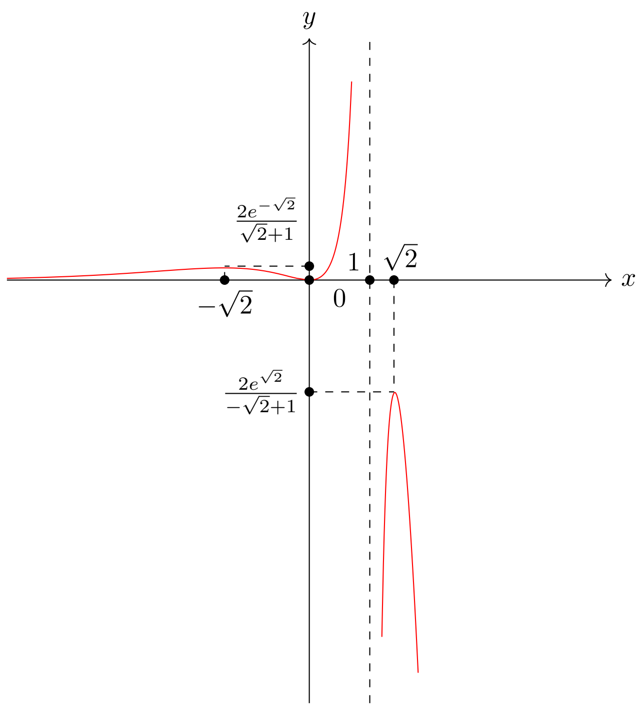
FILA B

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{1-x}$$

Calcolarne la retta tangente nel punto $(2, -4e^2)$.

Svolgimento:



- Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq 1\}$;
- studio del segno: $f(x) \geq 0$ se $x < 1$, $f(x) \leq 0$ se $x > 1$;
- eventuali parità: $f(x)$ non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2 e^x}{1-x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 e^x}{1-x} = +\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 e^x}{1-x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 e^x}{1-x} = 0,$$

quindi $y = 0$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 e^x}{x - x^2} = -\infty$$

non esiste nessun asintoto obliquo a $+\infty$;

Nome e cognome: .... Matricola ....

- derivata prima:

$$f'(x) = \frac{\left(x^2e^x\right)'(1-x) - (1-x)'\sqrt{x^2e^x}}{(x-1)^2} = -e^x\,\frac{x(x^2-2)}{(x-1)^2}.$$

Importante: $D = D'$;

- punti di massimo e minimo: $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, \pm\sqrt{2}$. In particolare $x = 0$ è punto di minimo e $f(0) = 0$, mentre $\pm\sqrt{2}$ sono punti di massimo e $f(\pm\sqrt{2}) = \frac{2e^{\pm\sqrt{2}}}{1\mp\sqrt{2}}$;

- monotonia:

– $f'(x) \leq 0$ se $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ oppure $x \geq \sqrt{2}$, quindi $f(x)$ è monotona decrescente in questi intervalli;

– $f'(x) \geq 0$ se $x \leq -\sqrt{2}$ oppure $0 \leq x < 1$, $1 < x \leq \sqrt{2}$, quindi $f(x)$ è monotona crescente in questi intervalli.

Retta tangente in $(2, -4e^2)$: dato che $f'(2) = -4e^2$, calcolo

$$-4e^2 = -4e^2 \cdot 2 + q \Rightarrow \quad q = 4e^2,$$

quindi la retta cercata è

$$y = -4e^2x + 4e^2.$$

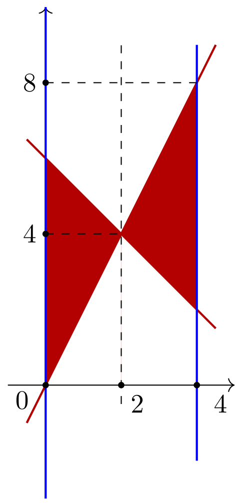
Nome e cognome: . . . . Matricola . . . .

2. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra i grafici di

$$f(x) = 2x \quad \text{e} \quad g(x) = -x + 6,$$

e le rette $x = 0$, $x = 4$.

<u>Svolgimento:</u>



Area del triangolo rosso a sinistra:

$$\int_0^2 6 - x\,dx - \int_0^2 2x\,dx = 6$$

Area del triangolo rosso a destra:

$$\int_2^4 2x\,dx - \int_2^4 6 - x\,dx = 6$$

Area totale: 12

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Risolvere i seguenti integrali:

(3.1) $\displaystyle\int_e^4 \frac{x-1}{x(x-2)}\,dx$ (3.2) $\displaystyle\int xe^{-x^2}+\log 4x\,dx$ (3.3) $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{x}{(x^2-8)^3}\,dx$

<u>Svolgimento:</u>

(3.1) Risolvo il sistema generato da

$$\frac{x-4}{x(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} \quad \Rightarrow A = 2, \quad B = -1$$

quindi

$$\begin{aligned}\int_e^4 \frac{x-4}{x(x-2)}\,dx &= 2\int_e^4 \frac{1}{x}\,dx - \int_e^4 \frac{1}{x-2}\,dx \\ &= 2\log x - \log(x-2)\Big|_e^4 \\ &= 3\log 2 - 2 + \log(e-2).\end{aligned}$$

(3.2) Per la linearità dell'integrale, risolvo separatamente

$$\int xe^{-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c$$
$$\int \log 4x\,dx = x\log 4x + c - \int \frac{x}{4x}4\,dx = x\log 4x - x + c$$

quindi

$$\int xe^{-x^2} + \log 4x\,dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + x\log 4x - x + c.$$

(3.3) Prima calcolo, per $b < +\infty$,

$$\int_3^b \frac{x}{(x^2-8)^3}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{1}{(x^2-8)^2}\Big|_3^b = -\frac{1}{4}\frac{1}{(b^2-8)^2} + \frac{1}{4}$$

quindi

$$\lim_{b\to+\infty} -\frac{1}{4}\frac{1}{(b^2-8)^2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Comincia la battaglia tra i cavalieri di Rohan e gli urukai nel fosso di Helm. Legolas aiuta i cavalieri di Rohan con il suo arco. Ha una mira ottima, infatti manca il bersaglio con probabilità 0.3. Sia F_n la variabile aleatoria che conta il numero di urukai mancati. Determinare:

(4.1) la probabilità che non colpisca tre urukai su otto frecce scoccate;

(4.2) la probabilità che ci siano almeno due urukai mancati su otto frecce scoccate;

(4.3) la media e la varianza di F_8.

Svolgimento:

$F_8 \sim B(8, 0.3)$ quindi

(4.1) $P(F_8 = 3) = \binom{8}{3}(0.7)^5(0.3)^3$

(4.2) $P(F_8 \geq 2) = 1 - P(F_8 < 2) = 1 - \binom{8}{0}(0.7)^8(0.3)^0 - \binom{8}{1}(0.7)^7(0.3)^1$

(4.3) $E(F_8) = 8 \cdot 0.3$, $Var(F_8) = 8 \cdot 0.3 \cdot 0.7$.

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. Siano $Z \sim N(0,1)$ e $G \sim N(2,9)$. Allora

(5.1) $P(Z \leq 1.42)$ vale

☒ 0.9222 ☐ 0.9918 ☐ 0.0778 ☐ 0.5778 ☐ 0.4222

(5.2) $P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$ vale

☐ 0.3413 ☐ 0.8085 ☐ 0.6170 ☐ 0.3438 ☒ 0.3830

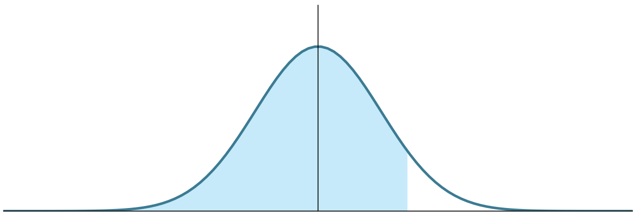
(5.3) $P(G \geq 8)$ vale

☐ 0.9772 ☐ 0.0772 ☐ 0.4772 ☐ 0.5228 ☒ 0.0228

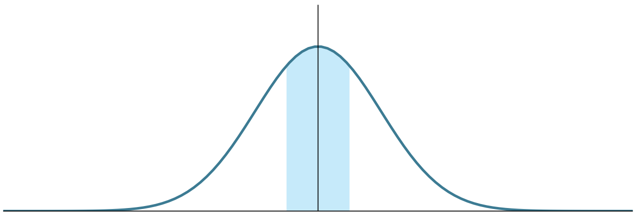
<u>Giustificare le scelte.</u>

Utilizzando la tabella sulla pagina del corso

(5.1) $P(Z \leq 1.42) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.42)$



(5.2) Sfruttando la parità della densità di Z: $P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) = 2P(0 \leq Z \leq 0.5)$



(5.3) Mi riconduco alla densità della normale standard riscrivendo $G = 3Z + 2$, quindi $P(G \geq 8) = P(Z \geq 2)$