Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova di esonero del 02/12/2019

FILA B

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 4n^2\sqrt{n} + (-1)^{n-1}3}{-2n^3 + n\sqrt[3]{n} - 5}$ (1.2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\sin\frac{2}{3n}} - \frac{n^2}{e^{3n}}$ (1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 4n^2\sqrt{n} + 3}{-2n^3 + n\sqrt[3]{n} - 5}(-1)^{n-1}$

Provare che

$$\lim_{n\to+\infty} 3 - \log n = -\infty$$

utilizzando la definizione di limite.

Svolgimento:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 4n^2\sqrt{n} + (-1)^{n-1}3}{-2n^3 + n\sqrt[3]{n} - 5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{-2n^3} = -1$

(1.2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\sin\frac{2}{3n}} - \frac{n^2}{e^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\sin\frac{2}{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3n}}{\frac{2}{3n}} = \frac{1}{2}$

(1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3 - 4n^2\sqrt{n} + 3}{-2n^3 + n\sqrt[3]{n} - 5}(-1)^{n-1}$ non esiste

Vogliamo verificare che

$$\forall M > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{se } n > N \text{ allora } \quad 3 - \log n < -M$$

Dato che, per M fissato,

$$\log n > M + 3$$

serve $N = \lceil e^{M+3} \rceil$.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Stabilire se i seguenti vettori sono o meno linearmente dipendenti:

$$\boldsymbol{v} = (-1, 0, 2), \qquad \boldsymbol{z} = (1, 1, -1), \qquad \boldsymbol{w} = (3, 1, -5).$$

Dati i vettori

$$\boldsymbol{v} = (-2, -2, -1), \qquad \boldsymbol{z} = (1, -1, -4), \qquad \boldsymbol{w} = (-1, -3, 0),$$

stabilire se

(2.1) esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z} + k\boldsymbol{w}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$;

(2.2) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{z} + (-1, -3, \lambda)$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$.

Svolgimento:
Controllo per quali valori di γ, λ, $\beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\gamma\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} = 0.$$

Dato che

$$\begin{cases} -\gamma + \lambda + 3\beta = 0 \\ \lambda + \beta = 0 \\ 2\gamma - \lambda - 5\beta = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta = -\lambda = \frac{\gamma}{2}$$

i vettori sono linearmente dipendenti.

(2.1) Abbiamo $\boldsymbol{u}_1 = (1-k, -1-3k, -4)$ e serve $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 8k + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{1}{2}.$$

(2.2) Abbiamo $\boldsymbol{u}_2 = (0, -4, -4+\lambda)$ ma, essendo la prima componente nulla, $\nexists \lambda \in \mathbb{R}$ che soddisfi la richiesta.

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} -k & k-1 & 1 \\ 0 & k-1 & k \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer. Se il sistema risulta indeterminato, scrivere la soluzione dipendente da parametro/i.

<u>Svolgimento:</u>

Dato che $|A| = (k-1)(k-2)$, allora

- se $k \neq 1$ e $k \neq 2$, allora

$$x = 1, \qquad y = \frac{k}{k-1}, \qquad z = -1$$

- se $k = 1$

$$\begin{cases} -x + z = -1 \\ z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \text{impossibile}$$

- se $k = 2$

$$\begin{cases} -2x + y + z = -1 \\ y + 2z = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(1-z) - 2z + z = -1 \\ y = -2z \\ 2x = 1 - z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = t \\ y = -2t \\ x = \dfrac{1-t}{2} \end{cases}$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Un'urna contiene 5 sfere bianche, 6 sfere nere e 9 sfere verdi.

(4.1) Pesco una sfera dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera verde}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera nera}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☒ 0.75 ☐ 0.8 ☐ 0.85 ☐ 1.07 ☐ 0.79

(4.2) Pesco due sfere con reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera bianca}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera verde}\},$$

allora $P(E_1 \cap E_2)$ vale

☐ 0.1 ☐ 0.2 ☒ 0.1125 ☐ 0.125 ☐ 0.0125

(4.3) Pesco due sfere senza reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera nera e verde}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco due sfere bianche}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ $19.4 \cdot 10^{-2}$ ☐ $19.4 \cdot 10^{3}$ ☐ $19.4 \cdot 10^{2}$ ☐ $19.4 \cdot 10^{-1}$ ☐ nessuna delle precedenti

Giustificare le scelte.

(4.1) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{9}{20} + \frac{6}{20}$ (eventi incompatibili);

(4.2) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{5}{20} \cdot \frac{9}{20}$ (eventi indipendenti).

Errata corrige del punto (4.3): data l'ambiguità del testo, considero valide entrambe le seguenti soluzioni:

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{6}{1}\binom{9}{1}+\binom{5}{2}}{\binom{20}{2}}$ (eventi indipendenti, non tengo conto dell'ordine verde-nero);
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{6}{20} \cdot \frac{9}{19} + \frac{5}{20} \cdot \frac{4}{19}$ (eventi indipendenti, tengo conto dell'ordine verde-nero).

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. C'è la partita di quidditch Grifondoro-Corvonero ed Harry e Cho Chang devono acciuffare il boccino d'oro. Harry ha preso il 90% dei boccini delle partite precedenti, ma la presenza di Cho potrebbe distrarlo e la probabilità di prendere in boccino scendenderebbe al 65%. Cho lo sa e, volendo vincere, tenterà di distrarlo il 40% delle volte in cui se le presenta l'occasione.

(5.1) Qual è la probabilità che Harry catturi il boccino?

(5.2) Qual è la probabilità che, se Harry ha catturato il boccino, Cho lo abbia distratto?

Svolgimento:

Sappiamo che, se

$$E_1 = \{\text{Cho distrae Harry}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{Harry prende il boccino}\},$$

allora

$$P(E_1) = 0.4, \quad P(E_1^c) = 0.6, \quad P(E_2|E_1) = 0.65, \quad P(E_2|E_1^c) = 0.9.$$

(5.1) $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = 0.8.$

(5.2) $P(E_1|E_2) = \dfrac{P(E_2|E_1)P(E_1)}{P(E_2)} = 0.325.$