Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

II Appello sessione invernale 28/02/2020

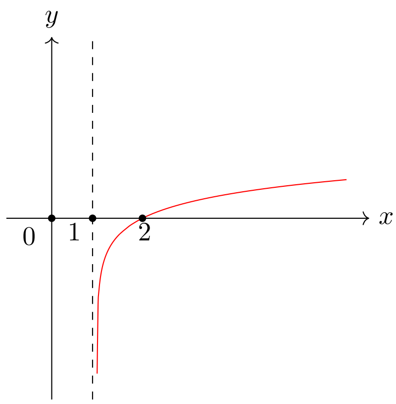
FILA A

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \log\left(\sqrt{x-1}\right).$$

Il dominio della derivata prima coincide con quello della funzione?

Svolgimento:



- Dominio: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 1\}$;
- studio del segno: $f(x) \geq 0$ se $\sqrt{x-1} \geq 1$ quindi $x \geq 2$, $f(x) < 0$ se $\sqrt{x-1} < 1$ quindi $1 < x < 2$;
- eventuali parità: $f(x)$ non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x \to 1^+} \log\left(\sqrt{x-1}\right) = -\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \to +\infty} \log\left(\sqrt{x-1}\right) = +\infty,$$

quindi non ci sono asintoti orizzontali;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(\sqrt{x-1}\right)}{x} = 0,$$

non esiste nessun asintoto obliquo a $+\infty$;

- derivata prima:

$$f'(x) = (\log\left(\sqrt{x-1}\right))' = \frac{1}{\sqrt{x-1}}(\sqrt{x-1})' = \frac{1}{2(x-1)}.$$

Importante: $D = \{x \in \mathbb{R} : \quad x > 1\} \subsetneq D' = \{x \in \mathbb{R} : \quad x \neq 1\}$;

- punti di massimo e minimo: $f'(x) \neq 0$ per ogni $x \in D$, quindi non ci sono punti di massimo né di minimo;
- monotonia: $f'(x) > 0$, quindi la funzione è crescente per ogni punto del suo dominio.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Risolvere il seguente sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k+1 \\ 4 & k-3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = (x, y).$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer.
Determinare i valori di k per cui i vettori

$$(1, 2) \quad \text{e} \quad (k+1, k-3)$$

sono paralleli e perpendicolari.

Svolgimento:

Il sistema è

$$\begin{cases} 2x + (k+1)y = 0, \\ 4x + (k-3)y = -2. \end{cases}$$

Dato che

$$|A| = 2(k-3) - 4(k+1) = -2k - 10,$$

possiamo applicare il metodo di Cramer se $k \neq -5$. Quindi

$$x = -\frac{k+1}{k+5}, \quad y = \frac{2}{k+5}.$$

Se $k = -5$ dobbiamo considerare

$$\begin{cases} 2x - 4y = 0, \\ 4x - 8y = -2. \end{cases}$$

Dato che

$$\frac{2}{4} = \frac{-4}{-8} \neq \frac{0}{-2},$$

il sistema è impossibile.

Se $(1, 2)$ e $(k+1, k-3)$ sono paralleli allora esiste un valore $\gamma \in \mathbb{R}$ per cui $(k+1, k-3) = \gamma(1, 2)$, quindi

$$\begin{cases} k+1 = \gamma \\ k-3 = 2\gamma \end{cases} \quad \Rightarrow \quad k = -5.$$

Se sono ortogonali tra di loro allora il prodotto scalare deve essere nullo:

$$(1, 2) \cdot (k+1, k-3) = k + 1 + 2k - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{5}{3}.$$

Nome e cognome: ....   Matricola ....

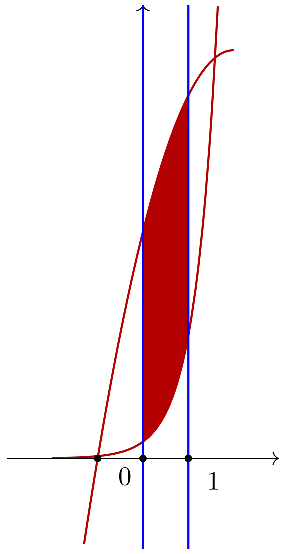
3. Calcolare

(3.1) l'area compresa tra le rette $x = 0$, $x = 1$, ed i grafici di

$$f(x) = e^{2x-1} \quad \text{e} \quad g(x) = -x^2 + 4x + 5;$$

(3.2) l'area di $f(x)$ nel secondo quadrante.

Svolgimento:



(3.1)

$$\begin{aligned} &\int_0^1 -x^2 + 4x + 5\,dx - \int_0^1 e^{2x-1}\,dx \\ &= -\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_0^1 \\ &= \frac{20}{3} - \frac{1}{2}(e - e^{-1}); \end{aligned}$$

(3.2)

$$\int_{-\infty}^0 e^{2x-1}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^0 e^{2x-1}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}e^{2x-1}\Big|_{-b}^0 = \frac{1}{2}e^{-1}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

4. Si stima che il 35% degli utenti di Netflix guardi "Black mirror", che il 46% segua "Chilling adventures of Sabrina" e che il 21% veda entrambi. Determina la probabilità che un utente scelto casualmente

(4.1) guardi "Black mirror" sapendo che segue anche "Chilling adventures of Sabrina";

(4.2) guardi "Chilling adventures of Sabrina" sapendo che segue anche "Black mirror".

<u>Svolgimento:</u>

Siano

$$B = \{\text{l'utente segue "Black mirror"}\} \quad \text{e} \quad S = \{\text{l'utente segue "Chilling adventures of Sabrina"}\}.$$

Allora

$$P(B) = 0.35, \quad P(S) = 0.46 \quad \text{e} \quad P(B \cap S) = 0.21.$$

(4.1) $P(B|S) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(S)} = \dfrac{0.21}{0.46} = 0.456;$

(4.2) $P(S|B) = \dfrac{P(B \cap S)}{P(B)} = \dfrac{0.21}{0.35} = 0.6.$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. La metro C parte da San Giovanni alle cinque di mattina ad intervalli di dodici minuti. Quindi, la prima metro parte alle 5:00, la seconda alle 5:12, la terza alle 5:24 e così via. Un pendolare arriva alla fermata ad un orario che è uniformemente distribuito tra le 5:00 e le 5:12. Calcolare la probabilità che

(5.1) il pendolare aspetti meno di dieci minuti;

(5.2) il pendolare aspetti almeno dieci minuti;

(5.3) media e varianza della variabile aleatoria

$$F = \text{ tempo di attesa del pendolare.}$$

Svolgimento:

$F \sim U(0, 12)$, quindi

(5.1) per aspettare meno di dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 5:02 e le 5:12, quindi

$$P(0 \leq F < 10) = \frac{10-0}{12-0} = \frac{5}{6};$$

(5.2) per aspettare almeno dieci minuti, il pendolare deve arrivare tra le 5:00 e le 5:02, quindi

$$P(10 \leq F \leq 12) = 1 - P(0 \leq F < 10) = \frac{1}{6};$$

(5.3) $\mathbb{E}(\mathbb{F}) = \dfrac{12+0}{2} = 6$, $Var(F) = \dfrac{(12-0)^2}{12} = 12$.