Nome e cognome: .... Matricola ....

***Sapienza* Università degli Studi di Roma**

CORSO DI CALCOLO E BIOSTATISTICA - CANALE A-E

I APPELLO SESSIONE INVERNALE 27/01/2020

FILA A

1. Determinare gli asintoti verticali, orizzontali, ed obliqui della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

Calcolarne, inoltre, la derivata prima e individuare eventuali punti di massimo e/o minimo.

Svolgimento.

• Asintoti verticali: c'è un asintoto verticale per $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = -\infty, \qquad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = +\infty.$$

• Asintoti orizzontali: dato che

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \pm\infty,$$

non ci sono asintoti orizzontali.

• Asintoti obliqui:

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x(x + 2)} = 1, \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-2x - 1}{x + 2} = -2,$$

quindi

$$y = x - 2$$

è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

• Calcolo $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'(x + 2) - (x + 2)'(x^2 - 1)}{(x + 2)^2} = \frac{x^2 + 4x + 1}{(x + 2)^2}.$$

• Dato che $x^2 + 4x + 1 = (x - (-2 + \sqrt{3}))(x - (-2 - \sqrt{3}))$, la derivata prima si annulla per $x = -2 \pm \sqrt{3}$. È positiva all'esterno delle radici e negativa all'interno, quindi $x = -2 - \sqrt{3}$ è punto di massimo mentre $-2 + \sqrt{3}$ è punto di minimo.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Disponiamo di g_1 grammi della sostanza S_1 e di g_2 grammi della sostanza S_2. Mescolando il 30% dei g_1 grammi e il 5% dei g_2 grammi otteniamo 0.8 grammi di composto, mentre togliendo al 10% dei g_1 grammi il 3.5% dei g_2 grammi otteniamo 0.06 grammi di composto. Quanti sono i grammi g_1, g_2?

Svolgimento:

Il sistema è

$$\begin{cases} 30\%g_1 + 5\%g_2 = 0.8 \\ 10\%g_1 - 3.5\%g_2 = 0.06 \end{cases} \qquad \begin{cases} 30g_1 + 5g_2 = 80 \\ 100g_1 - 35g_2 = 60 \end{cases}$$

Dato che

$$det\begin{pmatrix} 30 & 5 \\ 100 & -35 \end{pmatrix} = -1550 \neq 0$$

applico il Teorema di Cramer, ottenendo

$$x = \frac{det\begin{pmatrix} 80 & 5 \\ 60 & -35 \end{pmatrix}}{-1550} = \frac{3100}{1550} = 2, \quad y = \frac{det\begin{pmatrix} 30 & 80 \\ 100 & 60 \end{pmatrix}}{-1550} = \frac{6200}{1550} = 4.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Calcolare l'area della regione del piano cartesiano compresa tra il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{1}{1+4x^2},$$

l'asse delle x e la retta $x = 0$.

Svolgimento:

Prima calcolo, per $0 < p < +\infty$,

$$\int_0^p \frac{1}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^p \frac{2}{1+(2x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan 2x\Big|_0^p = \frac{1}{2}\arctan 2p,$$

quindi

$$\frac{1}{2}\lim_{p\to+\infty}\arctan 2p = \frac{\pi}{4}.$$

Nome e cognome: . . . . Matricola . . . .

4. Si estraggono, simultaneamente, due carte da un mazzo di 52 (13 quadri, 13 picche, 13 cuori, 13 fiori). Calcolare la probabilità che

(4.1) siano due quadri o due picche;

(4.2) due figure e due picche;

(4.3) due figure o due picche.

Svolgimento:

(4.1) Siano

$$\blacklozenge = \{\text{escono due quadri}\} \quad \text{e} \quad \spadesuit = \{\text{escono due picche}\}.$$

Vogliamo calcolare $\blacklozenge \cup \spadesuit$. Dato che $\blacklozenge \cap \spadesuit = \emptyset$, vale

$$P(\blacklozenge \cup \spadesuit) = P(\blacklozenge) + P(\spadesuit) = 2P(\blacklozenge) = 2\frac{C_{13,2}}{C_{52,2}}.$$

(4.2) Sia

$$F = \{\text{escono due figure}\}.$$

Dato che ci sono 3 figure che sono anche picche, il numero di casi favorevoli è $C_{3,2}$, quindi

$$P(F \cap \spadesuit) = \frac{C_{3,2}}{C_{52,2}}.$$

(4.3) Vogliamo calcolare $F \cup \spadesuit$. Dato che $F \cap \spadesuit \neq \emptyset$, vale

$$P(F \cup \spadesuit) = P(F) + P(\spadesuit) - P(F \cap \spadesuit) = \frac{C_{12,2}}{C_{52,2}} + \frac{C_{13,2}}{C_{52,2}} - \frac{C_{3,2}}{C_{52,2}}.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. Bart Simpson è solito molestare il povero Boe con scherzi telefonici. Il numero medio di chiamate che Boe riceve in un'ora è 3.5. Calcolare la probabilità che

(5.1) Bart lo chiami più di tre volte nell'arco di un'ora;

(5.2) Bart lo chiami al massimo due volte nell'arco di due ore;

(5.3) Bart lo chiami esattamente quattro volte nell'arco di quattro ore e mezza.

<u>Svolgimento:</u>
Abbiamo delle variabili aleatorie F_i che seguono la distribuzione di Poisson.

(5.1) $F_1 \sim P(3.5)$ quindi

$$P(F_1 > 3) = 1 - P(F_1 \leq 3) = 1 - P(F_1 = 3) - P(F_1 = 2) - P(F_1 = 1) - P(F_1 = 0) = 1 - e^{-3.5}\left(\frac{(3.5)^3}{3!} + \frac{(3.5)^2}{2!} + \frac{(3.5)^1}{1!} + \frac{(3.5)^0}{0!}\right).$$

(5.2) $F_2 \sim P(7)$ quindi

$$P(F_2 \leq 2) = P(F_2 = 2) + P(F_2 = 1) + P(F_2 = 0) = e^{-7}\left(\frac{7^2}{2!} + \frac{7^1}{1!} + \frac{7^0}{0!}\right).$$

(5.3) $F_2 \sim P(15.75)$ quindi

$$P(F_3 = 4) = e^{-15.75}\frac{(15.75)^4}{4!}.$$