

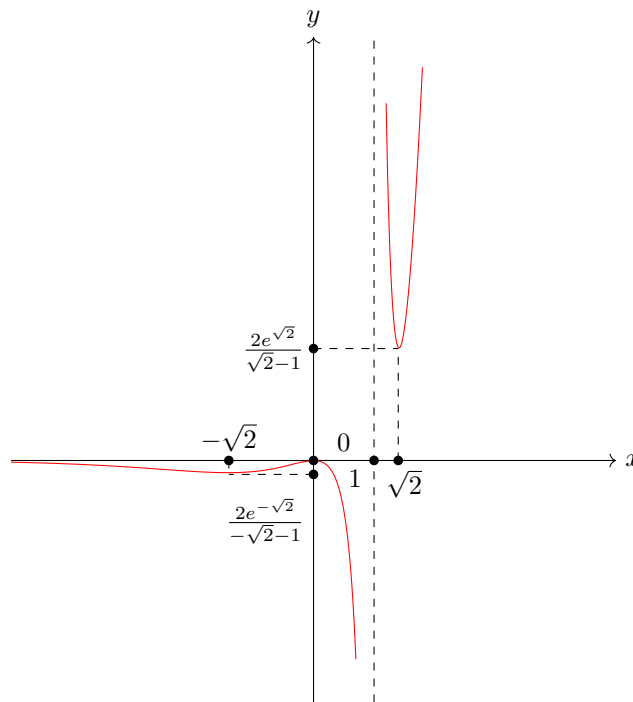
**Sapienza Università degli Studi di Roma**  
**CORSO DI CALCOLO E BIostatistica - CANALE A-E**  
**PROVA DI ESONERO DEL 22/01/2020**  
**FILA A**

1. Disegnare il grafico qualitativo (dominio, studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, derivata prima, punti di minimo e massimo, monotonia) della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 e^x}{x - 1}.$$

Calcolarne la retta tangente nel punto  $(2, 4e^2)$ .

Svolgimento:



- Dominio:  $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}$ ;
- studio del segno:  $f(x) \geq 0$  se  $x > 1$ ,  $f(x) \leq 0$  se  $x < 1$ ;
- eventuali parità:  $f(x)$  non è né pari né dispari;
- asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 e^x}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 e^x}{x - 1} = -\infty;$$

- asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x - 1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 e^x}{x - 1} = 0,$$

quindi  $y = 0$  è asintoto orizzontale a  $-\infty$ ;

- asintoti obliqui: dato che

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 e^x}{x^2 - x} = +\infty$$

non esiste nessun asintoto obliquo a  $+\infty$ ;

Nome e cognome: .....

Matricola .....

- derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(x^2 e^x)'(x-1) - (x-1)'\sqrt{x^2 e^x}}{(x-1)^2} = e^x \frac{x(x^2-2)}{(x-1)^2}.$$

Importante:  $D = D'$ ;

- punti di massimo e minimo:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$ . In particolare  $x = 0$  è punto di massimo e  $f(0) = 0$ , mentre  $\pm\sqrt{2}$  sono punti di minimo e  $f(\pm\sqrt{2}) = \frac{2e^{\pm\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}-1}$ ;

- monotonia:

- $f'(x) \geq 0$  se  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$  oppure  $x \geq \sqrt{2}$ , quindi  $f(x)$  è monotona crescente in questi intervalli;
- $f'(x) \leq 0$  se  $x \leq -\sqrt{2}$  oppure  $0 \leq x < 1$ ,  $1 < x \leq \sqrt{2}$ , quindi  $f(x)$  è monotona decrescente in questi intervalli.

Retta tangente in  $(2, 4e^2)$ : dato che  $f'(2) = 4e^2$ , calcolo

$$4e^2 = 4e^2 \cdot 2 + q \Rightarrow q = -4e^2,$$

quindi la retta cercata è

$$y = 4e^2 x - 4e^2.$$

Nome e cognome: .....

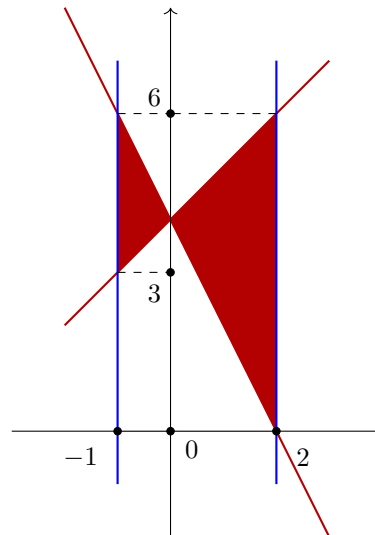
Matricola .....

2. Calcolare l'area della parte di piano compresa tra i grafici di

$$f(x) = 4 - 2x \quad \text{e} \quad g(x) = x + 4,$$

e le rette  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

Svolgimento:



Area del triangolo rosso a sinistra:

$$\int_{-1}^0 4 - 2x \, dx - \int_{-1}^0 x + 4 \, dx = \frac{3}{2}$$

Area del triangolo rosso a destra:

$$\int_0^2 x + 4 \, dx - \int_0^2 4 - 2x \, dx = 6$$

$$\text{Area totale: } \frac{3}{2} + 6 = \frac{15}{2}.$$

3. Risolvere i seguenti integrali:

$$(3.1) \int_2^e \frac{x-2}{x(x-1)} dx;$$

$$(3.2) \int xe^{-x^2} + \log 3x dx;$$

$$(3.3) \int_2^{+\infty} \frac{x}{(x^2-1)^2} dx.$$

Svolgimento:

(3.1) Risolvo il sistema generato da

$$\frac{x-2}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \Rightarrow A = 2, \quad B = -1$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_2^e \frac{x-2}{x(x-1)} dx &= 2 \int_2^e \frac{1}{x} dx - \int_2^e \frac{1}{x-1} dx \\ &= 2 \log x - \log(x-1) \Big|_2^e \\ &= 2 - \log(e-1) - 2 \log 2. \end{aligned}$$

(3.2) Per la linearità dell'integrale, risolvo separatamente

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c \\ \int \log 3x dx &= x \log 3x - \int \frac{x}{3x} 3 dx + c = x \log 3x - x + c \end{aligned}$$

quindi

$$\int xe^{-x^2} + \log 3x dx = -\frac{e^{-x^2}}{2} + x \log 3x - x + c.$$

(3.3) Prima calcolo, per  $b < +\infty$ ,

$$\int_2^b \frac{x}{(x^2-1)^2} dx = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2-1} \Big|_2^b = -\frac{1}{2} \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{6}$$

quindi

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{b^2-1} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.$$

Nome e cognome: .....

Matricola .....

4. Siete nelle miniere di Moria e Peregrino Tuc fa cadere un secchio nel pozzo, allertando gli orchi. Fortunatamente, Aragorn figlio di Arathorn è un bravo spadaccino e colpisce gli orchi con probabilità pari a 0.7. Sia  $F_n$  la variabile aleatoria che conta il numero di orchi colpiti da Aragorn. Determinare

(4.1) la probabilità che colpisca cinque orchi su otto orchi avversari;

(4.2) la probabilità che, di otto orchi avversari, ne colpisca almeno due;

(4.3) la media e la varianza di  $F_8$ .

Svolgimento:

$F_8 \sim B(8, 0.7)$ , quindi

$$(4.1) P(F_8 = 5) = \binom{8}{5} (0.7)^5 (0.3)^3$$

$$(4.2) P(F_8 \geq 2) = 1 - P(F_8 < 2) = 1 - \binom{8}{0} (0.7)^0 (0.3)^8 - \binom{8}{1} (0.7)^1 (0.3)^7$$

$$(4.3) E(F_8) = 8 \cdot 0.7, \text{Var}(F_8) = 8 \cdot 0.7 \cdot 0.3.$$

Nome e cognome: .....

Matricola .....

5. Siano  $Z \sim N(0, 1)$  e  $G \sim N(1, 4)$ . Allora

(5.1)  $P(Z \leq 2.14)$  vale

- 0.4772       0.9918       0.9838       0.4838       0.9772

(5.2)  $P(-1 \leq Z \leq 1)$  vale

- 0.3413       0.8413       0.6826       0.6413       0.3438

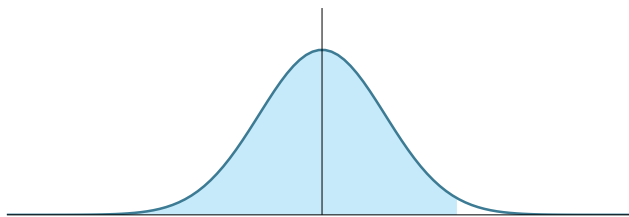
(5.3)  $P(G \geq 5)$  vale

- 0.9772       0.0772       0.4772       0.5228       0.0228

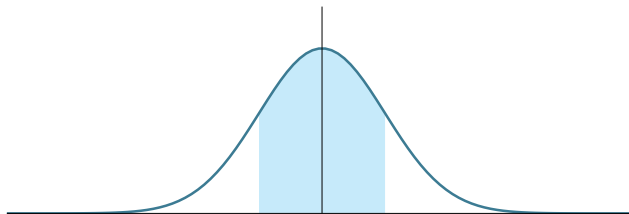
Giustificare le scelte.

Utilizzando la tabella sulla pagina del corso

(5.1)  $P(Z \leq 2.14) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2.14)$



(5.2) Sfruttando la parità della densità di  $Z$ :  $P(-1 \leq Z \leq 1) = 2P(0 \leq Z \leq 1)$



(5.3) Mi riconduco alla densità della normale standard riscrivendo  $G = 2Z + 1$ , quindi  $P(G \geq 5) = P(Z \geq 2)$

