Nome e cognome: .... Matricola ....

Sapienza Università degli Studi di Roma

Corso di Calcolo e Biostatistica - Canale A-E

Prova di esonero del 02/12/2019

FILA A

1. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3n\sqrt[3]{n} + 3\sin n}{4n^2 + n\sqrt{n}}$ (1.2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3n\sqrt[3]{n} + 3}{4n^2 + n\sqrt{n}} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ (1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{4n} - 1}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} - \frac{\log n}{n}$

Provare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+4} = 1$$

utilizzando la definizione di limite.

Svolgimento:

(1.1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - 3n\sqrt[3]{n} + 3\sin n}{4n^2 + n\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4}$

(1.2) non esiste perché $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \pm 1$ se n è dispari, e nullo se n è pari

(1.3) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{4n} - 1}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} - \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos\frac{1}{4n} - 1}{e^{\frac{1}{n^2}} - 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{16n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{32}$

Vogliamo verificare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \text{se } n > N \text{ allora} \quad \left|\frac{n}{n+4} - 1\right| < \varepsilon$$

Dato che, per ε fissato,

$$\left|\frac{n}{n+4} - 1\right| = \frac{4}{n+4} < \varepsilon$$

serve $N = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} - 4 \right\rceil$.

Nome e cognome: .... Matricola ....

2. Stabilire se i seguenti vettori sono o meno linearmente dipendenti:

$$\boldsymbol{v} = (-1, 0, 2), \qquad \boldsymbol{z} = (1, 1, -1), \qquad \boldsymbol{w} = (2, -2, 0).$$

Dati i vettori

$$\boldsymbol{v} = (1, -1, 0), \qquad \boldsymbol{z} = (2, 0, -3), \qquad \boldsymbol{w} = (0, -2, 1),$$

stabilire se

(2.1) esistono dei valori $k \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{z} + k\boldsymbol{w}$ è ortogonale a $\boldsymbol{v}$;

(2.2) esistono dei valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{z} + (0, -2, \lambda)$ è parallelo a $\boldsymbol{v}$.

Svolgimento:

Controllo per quali valori di γ, λ, $\beta \in \mathbb{R}$ vale

$$\gamma\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{w} = 0.$$

Dato che

$$\begin{cases} -\gamma + \lambda + 2\beta = 0 \\ \lambda - 2\beta = 0 \\ 2\gamma - \lambda = 0 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma = \lambda = \beta = 0$$

i vettori sono linearmente indipendenti.

(2.1) Abbiamo $\boldsymbol{u}_1 = (2, -2k, -3 + k)$ e serve $k \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}_1 = 2 + 2k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k = -1.$$

(2.2) Abbiamo $\boldsymbol{u}_2 = (2, -2, -3 + \lambda)$ e serve $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\boldsymbol{u}_2 = (2, -2, -3 + \lambda) = \gamma\boldsymbol{v} \quad \text{per qualche } \gamma \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 3.$$

Nome e cognome: .... Matricola ....

3. Studiare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il sistema lineare $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove

$$A = \begin{pmatrix} k & 0 & -2k \\ -1 & 1 & 3 \\ k & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Utilizzare, quando possibile, il metodo di Cramer. Se il sistema risulta indeterminato, scrivere la soluzione dipendente da parametro/i.

Svolgimento:

Dato che $|A| = k(2k-1)$, allora

- se $k \neq 0$ e $k \neq 1/2$, allora

$$x = -\frac{8k}{k(2k-1)}, \qquad y = \frac{2k+3}{2k-1}, \qquad z = -\frac{4}{2k-1}$$

- se $k = 0$ risolviamo

$$\begin{cases} -x + y + 3z = 1 \\ 2y + z = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = y + 3z - 1 = \dfrac{5t-4}{2} \\ y = \dfrac{-2-t}{2} \\ z = t \end{cases}$$

- se $k = 1/2$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} - z = 0 \\ -x + y + 3z = 1 \\ \dfrac{x}{2} + 2y + z = -2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2z \\ -2z - 1 - z + 3z = 1 \\ y = -1 - z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{impossibile}$$

4. Un'urna contiene 3 sfere rosse, 5 sfere gialle e 2 sfere blu.

(4.1) Pesco una sfera dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera gialla}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera rossa}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ 0.75 ☒ 0.8 ☐ 0.85 ☐ 1.08 ☐ 0.79

(4.2) Pesco due sfere con reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera rossa}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco una sfera blu}\},$$

allora $P(E_1 \cap E_2)$ vale

☐ 0.1 ☐ 0.6 ☒ 0.06 ☐ $0.\overline{6}$ ☐ 0.05

(4.3) Pesco due sfere senza reinserimento dall'urna. Se

$$E_1 = \{\text{pesco una sfera gialla e una rossa}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{pesco due sfere blu}\},$$

allora $P(E_1 \cup E_2)$ vale

☐ $1.\overline{8} \cdot 10^{-3}$ ☐ $18.\overline{8} \cdot 10^{-2}$ ☐ $18.\overline{8} \cdot 10^{-3}$ ☐ $188.\overline{8} \cdot 10^{-4}$ ☐ $188.\overline{8} \cdot 10^{-2}$

<u>Giustificare le scelte.</u>

(4.1) $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{5}{10} + \frac{3}{10}$ (eventi incompatibili);

(4.2) $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{10}$ (eventi indipendenti).

Errata corrige del punto (4.3): data l'ambiguità del testo, considero valide entrambe le seguenti soluzioni:

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{1}+\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}$ (eventi indipendenti, non tengo conto dell'ordine giallo-rosso);
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9}$ (eventi indipendenti, tengo conto dell'ordine giallo-rosso).

Nome e cognome: .... Matricola ....

5. C'è la partita di quidditch Grifondoro-Serpeverde ed il Professor Piton è l'arbitro. Harry è molto preoccupato perché sa che la probabilità che Piton fischi un fallo se non lo ha commesso è del 70% e del 90% se lo ha commesso, ma lui sa che la probabilità che commetta effettivamente un fallo è del 10%.

(5.1) Qual è la probabilità che Piton fischi un fallo?

(5.2) Qual è la probabilità che, se Piton ha fischiato un fallo, Harry non lo abbia commesso?

Svolgimento:
Sappiamo che, se

$$E_1 = \{\text{Harry commette un fallo}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{\text{Piton fischia un fallo}\},$$

allora

$$P(E_1) = 0.1, \quad P(E_1^c) = 0.9, \quad P(E_2|E_1) = 0.9, \quad P(E_2|E_1^c) = 0.7.$$

(5.1) $P(E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1) + P(E_2|E_1^c)P(E_1^c) = 0.72.$

(5.2) $P(E_1^c|E_2) = \dfrac{P(E_2|E_1^c)P(E_1^c)}{P(E_2)} = 0.875.$