Sapienza Università degli Studi di Roma

Esercizi per il corso Calcolo e Biostatistica
Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Docente: Martina Magliocca

Esercizi di ripasso (dalla lezione 20 alla lezione 40)

1. Provare, utilizzando la definizione di limite, che

(1.1) $\lim_{x\to -2} 2x+5=1;$

(1.2) $\lim_{x\to 4} \sqrt{2x+1}=3;$

(1.3) $\lim_{x\to +\infty} 4x-7=+\infty;$

(1.4) $\lim_{x\to -\infty} \log_2(2x^2+1)=+\infty;$

(1.5) $\lim_{x\to +\infty} 2-e^{-x^2}=2;$

(1.6) $\lim_{x\to 0^+} \log x=-\infty.$

2. Calcolare i seguenti limiti:

(2.1) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x-3}{4x+1};$

(2.2) $\lim_{x\to -\infty} \frac{-2x^2+\sqrt{x}}{2x-x^2};$

(2.3) $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{\sqrt{9x^2+1}};$

(2.4) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{3x+2}-\sqrt{3x};$

(2.5) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+2+\sin 2x}{3-3x};$

(2.6) $\lim_{x\to -\infty} (1+e^{-x^2})\cos x;$

(2.7) $\lim_{x\to 0} |x-3|;$

(2.8) $\lim_{x\to -\infty} \log_{1/2}(1-2x);$

(2.9) $\lim_{x\to 0^+} 4^{\frac{1}{x}};$

(2.10) $\lim_{x\to 0^-} 4^{\frac{1}{x}};$

(2.11) $\lim_{x\to +\infty} 3^x-x^4;$

(2.12) $\lim_{x\to 0^+} \log_2 x-\sqrt[3]{x};$

(2.13) $\lim_{x\to 1^+} \log\left(\frac{x^2+2x-2}{x-1}\right);$

(2.14) $\lim_{x\to +\infty} \left(1-\frac{1}{2x}\right)^{4x};$

(2.15) $\lim_{x\to -\infty} \left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{4-6x};$

(2.16) $\lim_{x\to 2^+} \frac{2-3x^2+\cos(\pi x)}{\log e^x-2};$

(2.17) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x^2}{\cos\frac{x}{2}-1};$

(2.18) $\lim_{x\to +\infty} \frac{\log^2 x+3\log x}{2\log^2 x-e^{-x}};$

(2.19) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{-\frac{3}{x^2}}-1}{\log\left(1-\frac{4}{x}\right)};$

(2.20) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x^2)}{\sin 4x^2}-\frac{x^2\sqrt{x}}{e^x};$

(2.21) $\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x^3}{1-e^{2x^3}}-x^2\ln x;$

(2.22) $\lim_{x\to -1} \frac{x^3-3x^2-x+3}{x+1};$

(2.23) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2-3x+2}-x;$

(2.24) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{2x}-\sqrt{2x+1}\right).$

3. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue.

(3.1) $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+5 & x\geq 1,\\ 2ax+2 & x<1;\end{cases}$

(3.2) $f(x)=\begin{cases} -ax+4 & x\leq 0,\\ -x^2+2bx+4 & 0<x\leq 4,\\ \log_2(2ax+4b) & x>4;\end{cases}$

(3.3) $f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & x\leq 1,\\ -x^2+2x+a & x>1;\end{cases}$

(3.4) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{ax}{x-1}} & x\leq 0,\\ -bx+1 & 0<x\leq 1,\\ \log_3(3x+3b)+a & x>1.\end{cases}$

4. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili.

(4.1) $f(x)=\begin{cases} be^{2x-2}+ax^2+1 & x\geq 1,\\ -2ax+3be^{2x-2} & x<1;\end{cases}$

(4.2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos(2x)}{x} & x<0,\\ e^x(ax+b) & x\geq 0;\end{cases}$

(4.3) $f(x)=\begin{cases} a\sqrt{x+4}-6 & -4\leq x<0,\\ \log(x+1)+2b & x\geq 0;\end{cases}$

(4.4) $f(x)=\begin{cases} (2-b)x+1 & x\leq 0,\\ \log(x-a) & x>0.\end{cases}$

5. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni e determinare, se esistono, le rette tangenti nei punti indicati:

(5.1) $x^2 - 2x + 4$, $(0, 4)$;

(5.2) $\dfrac{e^{\frac{x+2}{x}}}{\sqrt{x+2}}$, $\left(0, \dfrac{e^2}{\sqrt{2}}\right)$;

(5.3) $\dfrac{-x+2}{2x-3}$, $(2, 0)$;

(5.4) $e^{-x^2} \log \dfrac{2}{x}$, $(2, 0)$;

(5.5) $\cos^2 3x^4$, $\left(\sqrt[4]{\dfrac{\pi}{3}}, 1\right)$;

(5.6) $\dfrac{1+2e^{3x}}{1-3e^{2x}}$, $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$;

(5.7) $x \cos 2x - 3 \cos x$, $(\pi, \pi + 3)$;

(5.8) $\log\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$;

(5.9) $\tan \dfrac{2x+3}{\log 2x}$, $\left(\dfrac{e}{2}, \tan(e+3)\right)$.

6. Disegnare il grafico qualitativo (studio del segno, eventuali parità, asintoti verticali, orizzontali, obliqui, punti di minimo e massimo, monotonia) delle seguenti funzioni:

(6.1) $\dfrac{e^{3x}}{x-3}$;

(6.2) $\sqrt{1-3x}$;

(6.3) $\sqrt{\dfrac{x^2}{x+2}}$

(6.4) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2}}$;

(6.5) $\sqrt{\dfrac{4-x}{x}}$;

(6.6) $\dfrac{4-x^2}{1-x}$;

(6.7) $\dfrac{4-x^2}{1-x^2}$;

(6.8) $\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$;

(6.9) $\sqrt{x}e^{\frac{-x+2}{x}}$;

(6.10) $\dfrac{\log(x+1)}{x-1}$;

(6.11) $\dfrac{\sin x}{1-\sin x}$;

(6.12) $\log\left(x - \sqrt{x-1}\right)$.

Si assuma $x \in [0, 2\pi]$ per la funzione in (6.11).

7. Calcolare il valor medio delle seguenti funzioni nei rispettivi intervalli:

(7.1) $\dfrac{x^2+2}{x^2-4}$, $[3, 5]$;

(7.2) $\log x + 1$, $[1, 2]$;

(7.3) $\dfrac{x^2}{3} + x$, $[0, 2]$;

(7.4) $\sqrt{2-x}$, $[-\sqrt{2}, 0]$;

(7.5) $\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$, $[e, 1]$;

(7.6) $\dfrac{1+\sqrt{x}}{x^2}$, $[1, 4]$;

(7.7) $\dfrac{2x}{x^2+4}$, $[2, 4]$;

(7.8) $x \sin x^2$, $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$;

(7.9) $x \cos x$, $[0, \frac{\pi}{2}]$.

8. Calcolare l'area della superficie compresa tra

(8.1) $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 4x + 4$;

(8.2) $f(x) = -x^2 + 2x + 5$, $g(x) = x^2 - 4x + 5$;

(8.3) $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$, $g(x) = e^{2x-4}$;

(8.4) $f(x) = -x + 4$, $g(x) = e^{x-4}$, $x = 0$, $x = 4$;

(8.5) $f(x) = e^{-4x+5}$, $g(x) = e^{2x-4}$, $x = 1$, $x = 2$.

9. Calcolare i seguenti integrali definiti ed indefiniti:

(9.1) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-2}\,dx$;

(9.2) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{1-\cos x}\,dx$;

(9.3) $\displaystyle\int_{-4}^{0} \frac{1}{3+\frac{x}{2}}\,dx$;

(9.4) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{(x^3+2x-3)}}\,dx$;

(9.5) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$;

(9.6) $\displaystyle\int \tan x \log(\cos x)\,dx$;

(9.7) $\displaystyle\int_0^2 e^x(x^2+3x)\,dx$;

(9.8) $\displaystyle\int (2-x+x^2)\log x\,dx$;

(9.9) $\displaystyle\int x^3(2-x^4)^{\frac{2}{5}}\,dx$;

(9.10) $\displaystyle\int x^2\cos(x^3+1)\,dx$;

(9.11) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-2}{x^2+2x+3}\,dx$;

(9.12) $\displaystyle\int \frac{2x-4}{x^2+x-2}\,dx$;

(9.13) $\displaystyle\int \frac{3-2x}{x(x^2-4x+4)}\,dx$;

(9.14) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+1}{(x-1)(x^2+2)^2}\,dx$;

(9.15) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^6}{x^2-1}\,dx$;

(9.16) $\displaystyle\int \frac{x^2+4x+4}{x^2+5x+6}\,dx$.

10. Dire se i seguenti integrali impropri convergono o meno e calcolarli se convergenti.

(10.1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{2x}\,dx;$

(10.2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+2)^2}\,dx;$

(10.3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{4}}\,dx;$

(10.4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{e^x-1}{e^x+3}\,dx;$

(10.5) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+2}\,dx;$

(10.6) $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} x\log(x^2+1)\,dx.$

11. La v.a. F assume i valori $\{1,2,3\}$ rispettivamente, con probabilità 0.5, 0.2, 0.3. Trovare la densità discreta della v.a. F^2.

12. Una grande popolazione di uccelli è composta da una specie di tipo A e una di tipo B. La probabilità che un uccello sia di tipo A è del 20%. Durante una battuta di caccia vengono catturati cinque uccelli in successione. Calcolare la probabilità che

(12.1) esattamente 3 uccelli siano di tipo A;

(12.2) almeno due uccelli siano di tipo B;

(12.3) i primi due uccelli siano di tipo B e i secondi due di tipo A.

13. Da una rilevazione risulta che il numero di incidenti sul lavoro avvenuti in una azienda in un mese è una variabile distribuita secondo Poisson con valor medio 1,5. Calcolare la probabilità che

(13.1) in un mese non ci siano incidenti;

(13.2) in un mese ci siano più di due incidenti;

(13.3) in due mesi ci siano al massimo tre incidenti.

14. Nel gioco del tiro al bersaglio si vincono 10 punti se si colpisce il bersaglio entro 2 cm dal centro, 5 se si colpisce tra 2 e 3 cm e 2 se si colpisce tra 3 e 5 cm, Oltre 5 cm non si vince nulla. Si supponga che la distanza del punto in cui si colpisce e il centro del bersaglio abbia distribuzione uniforme sull'intervallo $(0,10)$.

(14.1) Qual è la probabilità di avere 10 punti in un lancio?

(14.2) Qual è il numero atteso di punti per lancio?

15. Correzione dell'esercizio 16 del foglio di esercizi Ex. 16.