Sapienza Università degli Studi di Roma

Esercizi per il corso Calcolo e Biostatistica
Corso di Laurea in Scienze Biologiche

Docente: Martina Magliocca

Esercizi di ripasso (dalla lezione 1 alla lezione 19)

1. Risolvere le seguenti disuguaglianze e le equazioni associate.

(1.1) $\sqrt{2x+7} \leq x+1$;

(1.2) $x+1 < \sqrt{x-1}$;

(1.3) $\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2+x}} < \sqrt{x}$;

(1.4) $1 - 5^{2+x} \geq 0$;

(1.5) $5^x < \dfrac{1}{25}$;

(1.6) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x^2+2} - \left(\dfrac{27}{8}\right)^x < 0$;

(1.7) $\dfrac{2^{3x}}{4^{x+1}} - \dfrac{1}{2^x} > 0$;

(1.8) $3^{2x} - 6 \cdot 3^x - 6 \cdot 3^{-x} + 11 > 0$;

(1.9) $3^{2x} - 10 \cdot 3^x + 9 < 0$;

(1.10) $\dfrac{2^x-1}{2^x+1} - 2^x > 0$;

(1.11) $2\log_5 x \geq 3$;

(1.12) $\log_3(x+1) + \log_3 x < \log_3(5x-3)$;

(1.13) $\log_2 \dfrac{1}{2} \geq -1$;

(1.14) $\log_2(\log_2(4x+6)) < 0$;

(1.15) $\dfrac{\log(x-1)}{\log(x+4)} > 0$;

(1.16) $\dfrac{\log(x+12)}{3x-6} \leq 0$;

(1.17) $2\sin^2 x > \cos x$;

(1.18) $\sin^2 x + \cos x < 1 + \cos x(\cos x + 1)$;

(1.19) $\sqrt{3}\sin x - \cos x > 0$;

(1.20) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) > \dfrac{1}{2}$;

(1.21) $\sin^2 x + \sin x > 0$.

2. Verificare, utilizzando la definizione di limite di successione, che

(2.1) $\lim_{n\to+\infty} \log_2 n^2 = +\infty$;

(2.2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-2n}{n+1} = -2$;

(2.3) $\lim_{n\to+\infty} 3e^{\frac{1}{n}} = 3$;

(2.4) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n-2} = 0$;

(2.5) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-n^2}{n+1} = -\infty$;

(2.6) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4-\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = -\dfrac{1}{2}$;

(2.7) $\lim_{n\to+\infty} e^{2n} = +\infty$;

(2.8) $\lim_{n\to+\infty} \log_3\left(27 - \dfrac{3}{n}\right) = 3$;

(2.9) $\lim_{n\to+\infty} \sin n\pi = 0$.

3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di successione:

(3.1) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{-12n^3+5n^4}{n+2n^2-20n^3}$;

(3.2) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5+4n+3n^2}{7-10n^2+18n^4}$;

(3.3) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5n^2+2n+1}{6n^2+3n-8}$;

(3.4) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{5n}{\sqrt{n^2+1}}$;

(3.5) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}$;

(3.6) $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{4n}\right)^{6n}$;

(3.7) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+2}\right)^n$;

(3.8) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n^3+3)\log_3 n}{n^4}$;

(3.9) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^n-3^n}{1+3^n}$;

(3.10) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{5^n+11^n}$;

(3.11) $\lim_{n\to+\infty} n^2 3^{-\sqrt{n}}$;

(3.12) $\lim_{n\to+\infty} n^{-5}e^n$;

(3.13) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{4-(-1)^n}{n}$;

(3.14) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^5+\log n+2^n}{n^4+\log^2 n+2^{n+1}}$;

(3.15) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(n+3)!-(n+1)!}{n^2(n+1)!}$;

(3.16) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\sin\frac{4}{n}}$;

(3.17) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1-\cos\frac{1}{n}}{\sin\frac{3}{n^2}}$;

(3.18) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n\sin\frac{1}{n}}$;

(3.19) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-n\sin n}{3n^2+\cos n}$;

(3.20) $\lim_{n\to+\infty} n - \sqrt{n^2+4}$;

(3.21) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{3^n+1}$;

(3.22) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n!+2^n}{(n+1)!}$;

(3.23) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^3 - \sin n}{2n^3 + (-1)^n}$; (3.24) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{n^4 \log_5 n^2}{(n-1)^5}$; (3.25) $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3-n}{4-n}\right)^{2n+3}$.

4. Determinare lunghezza, direzione e verso dei seguenti vettori: $\boldsymbol{v} = (2,-1)$, $\boldsymbol{z} = (3,4)$, $\boldsymbol{w} = (1,0,-5)$, $\boldsymbol{u} = (1,-1,3)$.

5. Determinare il vettore $\boldsymbol{v}$ di modulo $|\boldsymbol{v}| = 6$ che forma un angolo di $\frac{\pi}{4}$con l'asse x. Determinare il vettore $\boldsymbol{z}$ di modulo $|\boldsymbol{z}| = 5$ che forma un angolo di $\frac{2\pi}{3}$con l'asse x.

6. Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$, $\boldsymbol{z} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ determinare l'angolo che formano con l'asse x.

7. Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (2,0,3)$, $\boldsymbol{z} = (-1,-3,1)$ e $\boldsymbol{w} = (4,6,1)$, verificare se sono linearmente indipendenti.
   Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (1,1,-2)$, $\boldsymbol{z} = (-3,2,0)$ e $\boldsymbol{w} = (1,3,-1)$, verificare se sono linearmente indipendenti.

8. Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (1,1,-2)$, $\boldsymbol{z} = (0,3,-1)$ e $\boldsymbol{w} = (-1,-4,1)$, verificare che sono linearmente indipendenti. Per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ si ha che $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{z}$ e $(-1,k,1)$ sono linearmente dipendenti?

9. Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (2k,3)$, $\boldsymbol{z} = (-1,-2+k)$, determinare, se esiste, il valore $k \in \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{z}$.
   Dati i vettori $\boldsymbol{v} = (-1,-k)$, $\boldsymbol{z} = (3,1-k)$, determinare, se esiste, il valore $k \in \mathbb{R}$ tale che $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{z}$.

10. Risolvere i seguenti sistemi lineari e, se possibile, applicare il Teorema di Cramer. Riscriverli nella forma $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove $\boldsymbol{v} = (x,y)$ oppure $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$.

(10.1) $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$

(10.2) $\begin{cases} 2x - 2y = 1 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$

(10.3) $\begin{cases} -2x + k^2 y = 2 \\ x + \left(k - \frac{3}{2}\right) y = -6 \end{cases}$

(10.4) $\begin{cases} 3x + k^2 y = 1 \\ -x - 3ky = -1 \end{cases}$

(10.5) $\begin{cases} -3x + 2y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(10.6) $\begin{cases} 2x - y + 2z = 3 \\ -3x + 2y - z = 0 \end{cases}$

(10.7) $\begin{cases} x - y + 4z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \\ x - y + z = -2 \end{cases}$

(10.8) $\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ 2x - 4y + z = 3 \end{cases}$

(10.9) $\begin{cases} x - ky - 2z = 1 \\ kx + y = 2 \\ x - 3y + z = -1 \end{cases}$

(10.10) $\begin{cases} x - 2y + kz = -1 \\ -2kx + z = 2 \\ 3x - 6y + z = 1 \end{cases}$

Utilizzare sia il metodo di Cramer (se possibile) che un altro metodo a scelta.

11. Risolvere i seguenti sistemi lineari $A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b}$, dove $\boldsymbol{v} = (x,y)$ oppure $\boldsymbol{v} = (x,y,z)$ e

(11.1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(11.2) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(11.3) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(11.4) $A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ -3 & k \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(11.5) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(11.6) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(11.7) $A = \begin{pmatrix} -k & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2k & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(11.8) $A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ 0 & -2 & -2k \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(11.9) $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(11.10) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Utilizzare sia il metodo di Cramer (se possibile) che un altro metodo a scelta.

12. Calcolare la probabilità di estrarre, da un mazzo di 52 carte:

    - un seme che non sia di cuori;
    - un 10 o un quadri;
    - né un 4, né un picche.

    [R. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{13}$, $\frac{9}{13}$]

13. Lanciamo due dadi e, definiti gli eventi $A = \{$la somma è 6$\}$, $B = \{$hanno la stessa faccia$\}$, calcolare la probabilità

    - di A e B;
    - di A o B.
    - di B sapendo che è successo A;
    - di A sapendo che è successo B;

    Stabilire se, nei vari casi, A e B sono eventi indipendenti.
    [R. $\frac{1}{36}$, $\frac{5}{18}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$]

14. Calcolare la probabilità di estrarre, da un mazzo di 52 carte:

    - un asso e poi un altro asso, senza reinserimento;
    - un asso e poi un altro asso, con reinserimento.

    [R. $\frac{1}{663}$, $\frac{1}{169}$]

15. Un'urna contiene 8 palline rosse, 3 bianche, 9 gialle. Si estraggono 3 palline, calcolare la probabilità che siano:

    - tutte e tre rosse, con reimbussolamento;
    - tutte e tre rosse, senza reimbussolamento
    - una bianca, una rossa e una gialla con e senza reimbussolamento.

    [R. $\frac{8^3}{20^3}$, $\frac{14}{285}$, $\frac{216}{20^3}$, $\frac{18}{95}$]

16. Si stima che il 40% degli adulti negli Stati Uniti siano obesi, che il 25% siano diabetici e che il 15% siano sia obesi che diabetici. Determina la probabilità che un individuo scelto casualmente

    - sia diabetico se è obeso;
    - sia obeso se è diabetico.

    [R. 0.375, 0.6]

17. Su un tavolo ci sono 2 monete. Quando vengono lanciate, una moneta dà testa con probabilità 0.5 mentre l'altra dà testa con probabilità 0.6. Una moneta viene scelta a caso e lanciata.

    - Qual è la probabilità che esca testa?
    - Se esce croce, qual è la probabilità che fosse la moneta equilibrata?

    [R. 0.55, 0.55]

18. A un esame universitario si presentano sia studenti che hanno seguito il corso sia studenti che non l'hanno seguito. Il docente ritiene che il 65% degli studenti abbiano seguito il corso. La probabilità che uno studente superi l'esame dato che ha seguito il corso è 0.75, mentre la probabilità che uno studente superi l'esame dato che non ha seguito il corso è 0.40.

    - Qual è la probabilità che uno studente superi l'esame?
    - Qual è la probabilità che uno studente abbia seguito il corso dato che ha superato l'esame?

    [R. 0.6275, 0.7769]

19. Un esame del sangue riconosce una certa malattia nel 99% dei casi quando essa è in atto. Tuttavia, l'esame fornisce un falso positivo (esito positivo quando la malattia non è in atto) nel 2% dei pazienti. Supponiamo che 5% della popolazione abbia la malattia. Quale è la probabilità che una persona scelta a caso abbia effettivamente la malattia se il test è positivo?
    [R. 0.7226]

20. Da un'urna con 10 sfere rosse e 8 gialle se ne estrae una a caso per 6 volte con reinserimento. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

    - le sfere estratte sono tutte rosse;
    - si estraggono 4 sfere rosse e 2 gialle;
    - si estraggono almeno 4 sfere rosse.

    [R. 0.03, 0.282, 0.453]

21. Si lancia 10 volte una moneta. Sapendo che la probabilità che esca croce è pari a $\frac{1}{3}$, calcolare qual è la probabilità di ottenere

    - la sequenza $(T, T, C, T, C, C, T, T, T, C)$;
    - esattamente 4 croci;
    - al massimo 4 croci.

    [R. 0.001, 0.227, 0.786]