

Sapienza Università degli Studi di Roma

ESERCIZI PER IL CORSO CALCOLO E BIOSTATISTICA

CORSO DI LAUREA IN SCIENZE BIOLOGICHE

DOCENTE: MARTINA MAGLIOCCA

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO SU LIMITI DI FUNZIONI E CONTINUITÀ

1. Provare, utilizzando la definizione di limite, che

$$(1.1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$(1.2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0;$$

$$(1.3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0;$$

$$(1.4) \lim_{x \rightarrow 9} \frac{3}{\sqrt{x}} = 1;$$

$$(1.5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi^{-x/2} = 0;$$

$$(1.6) \lim_{x \rightarrow -2} \pi^{-x/2} = \pi;$$

$$(1.7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x - 1 = +\infty;$$

$$(1.8) \lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x - 1 = 1;$$

$$(1.9) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x + 1 = +\infty.$$

2. Determinare, se esistono, eventuali asintoti verticali e/o orizzontali per le seguenti funzioni:

$$(2.1) \frac{x^2 + x + 1}{x + 1};$$

$$(2.2) \log(x - 1);$$

$$(2.3) e^{x-2} + 3;$$

$$(2.4) \frac{x}{2x - 3};$$

$$(2.5) \frac{x^2}{x^2 - 1};$$

$$(2.6) \frac{e^x - 1}{\log x - 1}.$$

3. Calcolare, se esistono, i seguenti limiti di funzione

$$(3.1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x + 1};$$

$$(3.2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 - 3\sqrt{x}}{5x - 3x^2};$$

$$(3.3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}};$$

$$(3.4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2 + 1}};$$

$$(3.5) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x + 1} - \sqrt{x};$$

$$(3.6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2 + \cos x}{3 - x};$$

$$(3.7) \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) \sin x;$$

$$(3.8) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \sin e^x}{2x};$$

$$(3.9) \lim_{x \rightarrow 0} e^x (\cos x - 2 \sin x);$$

$$(3.10) \lim_{x \rightarrow 0} |x - 1|;$$

$$(3.11) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x - 2|}{x - 2};$$

$$(3.12) \lim_{x \rightarrow 1} e^{2x-1} - e;$$

$$(3.13) \lim_{x \rightarrow -4} \sqrt{|x|};$$

$$(3.14) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{1+x}};$$

$$(3.15) \lim_{x \rightarrow -\infty} \log_{1/5}(1 - x);$$

$$(3.16) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x + |x|}{x};$$

$$(3.17) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x + |x|}{x};$$

$$(3.18) \lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}};$$

$$(3.19) \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}};$$

$$(3.20) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x - x^2;$$

$$(3.21) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x - \sqrt{x};$$

$$(3.22) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \sqrt{x + 1}}{x};$$

$$(3.23) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x^3 + 1)}{x};$$

$$(3.24) \lim_{x \rightarrow -2^-} \log \left(\frac{x^2 + 2x - 8}{x + 2} \right);$$

$$(3.25) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1 - e^{2x}};$$

$$(3.26) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{2x};$$

$$(3.27) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 3}{2x} \right)^{1-x};$$

$$(3.28) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\log x};$$

$$(3.29) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log x}{x - 1};$$

$$(3.30) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^3 - 3x^3;$$

$$(3.31) \lim_{x \rightarrow +\infty} \log x^4 - x;$$

$$(3.32) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x;$$

$$(3.33) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \log x^2 - x^4;$$

$$(3.34) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x - x e^{x^2};$$

$$(3.35) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3 - x^2 + \sin(\pi x)}{\log_2 x - 2};$$

$$(3.36) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[5]{x}}{e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(3.37) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};$$

$$(3.38) \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x - \log_2(1 - x)}{x^2 - 9};$$

$$(3.39) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x};$$

$$(3.40) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x};$$

$$(3.41) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x + x^2)}{x};$$

$$(3.42) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \frac{x}{2}}{4x};$$

$$(3.43) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \log^2 x + 3 \log x}{4 \log^2 x - 3};$$

$$(3.44) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log \left(1 - \frac{2}{x^3} \right)}{e^{-\frac{1}{x^3}} - 1};$$

$$(3.45) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3)}{\sin(2x^3)} - \frac{x^3}{e^x};$$

$$(3.46) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x^2}{e^{2x^4} - 1} - x^2 \ln x;$$

$$\begin{array}{lll}
(3.47) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^3)}{\sin(x^3)} - x^3 e^x; & (3.50) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{\frac{x-2}{x}} - 1}{\sin(x^2 - 4)}; & (3.53) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x+6}{x^2+x-6}; \\
(3.48) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(2x^4)}{1 - \cos(x^2)} - x^3 \ln x; & (3.51) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x-2}; & (3.54) \sqrt{x^2 + 5x + 6} - x; \\
(3.49) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(3\sqrt{|x|}) \log_3(3-x)}{\log(1+2\sqrt{|x|})}; & (3.52) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}; & (3.55) \sqrt{x}(\sqrt{x} - \sqrt{x+1}).
\end{array}$$

4. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue nei punti indicati e determinare eventuali punti di discontinuità.

$$\begin{array}{ll}
(4.1) f(x) = \sin(3\pi x) - \log_3 \frac{x+2}{3} \text{ in } x = 7; & (4.8) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases} \text{ in } x = 1 \text{ e } x = 0; \\
(4.2) f(x) = \frac{\sin(e^x - \frac{\pi}{2})}{3x-2} \text{ in } x = 0; & \\
(4.3) f(x) = \frac{\sin x}{x+1} \text{ in } x = -1; & (4.9) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 1 \\ 3x-2 & \text{se } x > 1 \end{cases} \text{ in } x = 1; \\
(4.4) f(x) = |x-3| \frac{\sin \frac{x}{4}}{\cos x} \text{ in } x = \pi; & \\
(4.5) f(x) = x^{-2} \sqrt[3]{x^2+2} \text{ in } x = 5; & (4.10) f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{e^x - 1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} \text{ in } x = 0; \\
(4.6) f(x) = x^{-1} \sqrt[4]{x+3} \text{ in } x = 0; & \\
(4.7) f(x) = \begin{cases} x & \text{se } -2 < x \leq 1 \\ 1 & \text{se } 1 < x < 2 \end{cases} \text{ in } x = 1; & (4.11) f(x) = \begin{cases} \frac{\log(1+x)}{e^x - 1} & \text{se } -1 < x < 0 \\ \frac{x}{x} & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases} \text{ in } x = 0.
\end{array}$$

5. Determinare per quali valori dei parametri $k, h \in \mathbb{N}$ le seguenti funzioni sono continue nel loro dominio.

$$\begin{array}{ll}
(5.1) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \sin(x+k) & \text{se } x < 0 \end{cases} ; & (5.3) f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{se } x < 1 \\ 2ke^{x-1} & \text{se } x \geq 1 \end{cases} ; \\
(5.2) f(x) = \begin{cases} 3x^2 + x + 2 - k & \text{se } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4+1} & \text{se } 0 < x \end{cases} ; & (5.4) f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{k} & \text{se } x < 0 \\ h-1 & \text{se } x = 0 \\ e^{hx}(2h-x) & \text{se } x > 0 \end{cases} .
\end{array}$$