

Sapienza Università degli Studi di Roma

ESERCIZI PER IL CORSO CALCOLO E BIostatistica
CORSO DI LAUREA IN SCIENZE BIOLOGICHE

DOCENTE: MARTINA MAGLIOCCA

14 NOVEMBRE 2019

ESERCIZI DI CONSOLIDAMENTO SU VETTORI E MATRICI
E PROBABILITÀ CONDIZIONATA

1. Sono assegnati i vettori del piano $\mathbf{v} = (1, 2)$, $\mathbf{z} = (4, 3)$, $\mathbf{w} = (1, -1)$.
 - Determinare, se esistono, i valori $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che il vettore $\mathbf{u} = \mathbf{v} + \gamma\mathbf{z}$ è parallelo al vettore \mathbf{w} ($\mathbf{u} \parallel \mathbf{w}$).
 - Determinare, se esistono, i valori $\gamma, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\mu\mathbf{v} + \gamma\mathbf{z} = \mathbf{w}$.
 - Scrivere l'equazione della retta passante per $P = (1, 2)$ e ortogonale a quella del vettore con direzione $\mathbf{v} + \mathbf{z}$.
2. Studiare la dipendenza o indipendenza lineare dei seguenti vettori di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$:

(2.a) $(1, 2), (0, 1)$

(2.b) $(1, 0, 7), (2, 0, 0), (0, 2, 2)$

(2.c) $(1, -1, 2), (5, 2, 0), (3, 4, -4)$

3. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Risolvere, se possibile,

(3.a) $2A$,

(3.b) $-C$,

(3.c) $2A - B$,

(3.d) $3A + 2B - 4C$.

4. Calcolare i seguenti prodotti matrice-vettore $A\mathbf{v}$ dove

(4.a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4.d) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(4.b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(4.c) $A = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

(4.e) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

5. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ k+3 & 2 \end{pmatrix}$$

ha determinante nullo? Per quali valori di k si ha

$$A\mathbf{v} = \mathbf{w} \quad \text{con} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix}?$$

6. Calcolare i determinanti delle seguenti matrici:

(6.a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(6.c) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

(6.e) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

(6.b) $\begin{pmatrix} -11 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

(6.d) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(6.f) \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(6.g) \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

7. Risolvere i seguenti sistemi lineari e, se possibile, applicare il Teorema di Cramer. Riscriverli nella forma $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{v} = (x, y)$ oppure $\mathbf{v} = (x, y, z)$.

$$(7.a) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 7y = 17 \end{cases}$$

$$(7.d) \begin{cases} 2x - ky = 6 \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$(7.g) \begin{cases} 2x + 3y - 2z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 7 \end{cases}$$

$$(7.b) \begin{cases} 5x - 13y = 9 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$(7.e) \begin{cases} 3x + ky = 2 \\ (k + 2)x + y = -6 \end{cases}$$

$$(7.h) \begin{cases} x - 4y = 7 \\ 2x + 2y - z = 2 \\ y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$(7.c) \begin{cases} 2x + k^2y = 2 \\ -x - y = -3 \end{cases}$$

$$(7.f) \begin{cases} 4x - y + z = 3 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

8. Risolvere i seguenti sistemi lineari $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{v} = (x, y)$ oppure $\mathbf{v} = (x, y, z)$ e

$$(8.a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(8.d) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(8.b) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(8.c) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$(8.e) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

9. Determinare il numero di punti di intersezione delle rette

$$r : x = \lambda y - 3 \quad \text{and} \quad r' : 2y = 2\lambda x + 1$$

al variare del parametro $\lambda \in (0, \infty)$. Trovare le coordinate del punto di intersezione, nel caso in cui sia unico.

10. Dire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ le rette di equazione

$$kx + y = k + 1 \quad \text{and} \quad -x + ky = k - 3$$

si intersecano in un punto con ascissa positiva.

11. Lanciate un dado due volte e qualcuno vi dice che la somma dei due risultati che avete ottenuto è maggiore di 7. Con che probabilità i risultati dei due lanci erano uguali?

[R. 0.2]

12. Da un mazzo di 40 carte napoletane, si estraggono due carte in successione. Se la prima carta estratta viene rimessa nel mazzo, con che probabilità entrambe le carte sono di spade? Se la prima carta non viene rimessa nel mazzo, con che probabilità entrambe le carte sono di spade?

[R. 0.058]

13. In una città il 40% della popolazione ha i capelli biondi, il 50% ha gli occhi blu e il 35% ha sia i capelli biondi che gli occhi blu. Scegliendo una persona a caso, calcolare la probabilità che abbia

- gli occhi blu se ha i capelli biondi;
- non abbia i capelli biondi se ha gli occhi blu.

[R. $\frac{7}{8}, \frac{3}{10}$]

14. Su una popolazione di 1200 persone, di cui 640 uomini e 560 donne, i non fumatori sono il 30% fra gli uomini e il 40% fra le donne. Se si estrae un individuo, calcolare la probabilità che sia

- un fumatore o una fumatrice;

- un fumatore;
- uomo sapendo che è fumatore o fumatrice.

[R. $\frac{49}{75}, \frac{28}{75}, \frac{4}{7}$]

15. Un sacco contiene 7 gettoni: 4 rossi numerati da 1 a 4 e 3 blu numerati da 5 a 7. Estraendo a caso due gettoni, calcola la probabilità che

- i due gettoni siano dello stesso colore;
- la somma sia dispari;
- la somma sia dispari avendo estratto gettoni dello stesso colore.

[R. $\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{2}{3}$]

16. Hai chiesto ad un vicino di annaffiarti una pianta mentre sei in vacanza. Pensi che senza acqua la piantina muoia con una probabilità del 80%, mentre se annaffiata questa probabilità si ridurrebbe al 15%. La tua fiducia nel fatto che il vicino si ricordi di annaffiarla è del 90%. Calcolare la probabilità che

- la pianta muoia;
- non sia stata annaffiata sapendo che è morta.

[R. $\frac{43}{200}, \frac{16}{43}$]

17. L'urna A contiene 3 sfere bianche e 6 nere, mentre l'urna B contiene 6 sfere bianche e 3 nere. Si lancia un dado e, detto x il risultato, si prende una sfera a caso dall'urna A se $x > 4$, altrimenti dall'urna B . Calcolare la probabilità che

- la sfera sia bianca;
- se si estrae una sfera bianca, calcola la probabilità che venga dall'urna A .

[R. $\frac{5}{9}, \frac{1}{5}$]

18. L'urna A contiene una pallina bianca e una nera, l'urna B contiene una pallina bianca, una nera e una rossa. Si sceglie a caso un'urna e si estrae una pallina. Calcolare la probabilità che

- la pallina estratta è bianca;
- se è bianca allora viene dall'urna B .

[R. $\frac{5}{12}, \frac{2}{5}$]