CALCULS DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

MICKAËL LATOCCA

Mise en garde. Ce document contient de nombreux petits calculs à faire et laissés en exercice. Il ne faut pas croire que l'on peut apprendre à calculer des développements limités uniquement en lisant ces quelques pages. Il est fortement conseillé de faire et refaire les calculs proposés en exemple, notamment ceux de la section 4 ainsi que de reprendre les exemples du TD après la lecture du document.

Remarque 0.1. Ce document manque de dessins, que je n'ai pas réalisés par manque de temps. Vous pouvez vous référer aux autres documents mis en ligne. Le document manque d'exemples mais en ajoutant ceux traités en TD vous en aurez suffisamment.

1. Pourquoi les développements limités ?

Voici plusieurs problèmes qui peuvent se présenter et qui justifient l'outillage que nous allons introduire :

(1) On peut vouloir calculer une limite qui n'entre pas dans le cadre connu des calculs de limite. Par exemple, la limite suivante — si elle existe :
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x},$$
est difficile à calculer. En effet, on commence par dire que $\sin x \to 0^+$ lorsque $x \to 0^+$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sin x} = +\infty$ et de même $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\tan x} = +\infty$ de sorte que l'on se retrouve avec $\infty - \infty$ qui est une *forme indéterminée*, on ne peut donc conclure aussi facilement. Il faut alors trouver un moyen de voir qui de $\frac{1}{\sin x}$ ou de $\frac{1}{\tan x}$ va « plus vite » vers l'infini. Pour cela il faut donne un sens à des phrases comme « la fonction f tend plus vite vers 0 que la fonction g ». C'est l'objectif premier des développements limités.

(2) Quand on veut dessiner sur un même graphique les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$, on trace leur tangente au point 0. Or ici c'est la droite $y = 0$ qui est tangente aux deux courbes. Comment déterminer la position relative entre ces deux courbes ? Concrètement cela revient à déterminer quelle fonction approche le mieux sa tangente et encore une fois les développements limités servent à cela.

2. Qu'est-ce qu'un développement limité ?

Nous allons définir des notations qui permettent de donner un sens précis aux phrases suivantes :

(1) f est négligeable devant g au point a.

(2) f est équivalente à g au point a.

Date: September 2019.

2.1. **Les définitions.** On se donne deux fonctions réelles f et g, ainsi qu'un point $a \in \mathbb{R}$.

Définition 2.1 (Notation o)**.** On écrit $f = o(g)$ s'il existe une fonction ε telle que l'on ait $f(x) = \varepsilon(x)g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

On écira souvent $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ pour préciser le point, mais s'il n'y a pas de confusion possible on notrea $f(x) = o(g(x))$.

Remarque 2.1. Cela signifie bien que f est plus petite que g au voisinage du point a. En effet, si g ne s'annule pas (au moins au voisinage du point a, alors on peut écrire $\frac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Remarque 2.2. Avec cette notation, dire que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ revient à dire que $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$. De même dire que $\lim\limits_{x\to a} = \ell$ s'écrit $f(x) \underset{x\to a}{=} \ell + o(1)$. En effet, si f tend vers ℓ alors $x \mapsto f(x) - \ell$ est une fonction qui tend vers 0 et est donc un $o(1)$

Définition 2.2 (Notation $\sim$)**.** On écrit $f \underset{a}{\sim} g$ si l'on a $f = g + o(g)$.

Remarque 2.3. De la même façon si g ne s'annule pas, alors écrivons, par définition de $h := o(g)$ qu'il existe une fonction ε qui tend vers 0 et telle que $h = o(g) = \varepsilon g$ et donc $f(x) = g(x) + \varepsilon(x)g(x)$ de sorte qu'en divisant par g on a :

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\,.$$

On prendra bien garde à ce que, par exemple, la notation $o(x)$ (dans ce paragraphe les o sont au voisinage du point 0) est bien une *notation*, qui se lit, et devra toujours se lire mentalement comme « une fonction négligeable devant x ». Lire de la sorte évite les confusions liées à la notation elle-même. Typiquement une des erreurs fréquente est de croire que

$$o(x) - o(x) = 0$$

alors que cette relation est fausse. Le membre de gauche se lit « une fonction négligeable devant x à laquelle on retire une fonction négigeable devant x » et donc *a priori* rien ne dit que ces deux fonctions (les deux $o(x)$) sont les mêmes. S'il ne vous paraît pas évident que $o(x) - o(x) = o(x)$ alors il faut écrire le premier $o(x)$ sous la forme $o(x) = \varepsilon_1(x)x$ et le deuxième $o(x) = \varepsilon_2(x)x$ avec ε_1 et ε_2 comme dans la définition. On voit ainsi que ce ne sont pas nécessairement les mêmes fonctions et que :

$$o(x) - o(x) = \varepsilon_1(x)x - \varepsilon_2(x)x = \underbrace{(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))}_{:=\varepsilon(x)\to 0} x = o(x)\,,$$

on a ainsi démontré que $o(x) - o(x) = o(x)$.

Comme le montre un dessin réalisé en TD, le monôme x^3 tend plus vite vers 0 que x^2, qui lui même tend plus vite vers 0 que x. Ainsi pour préciser « à quelle vitesse une fonction f tend vers 0 au voisinage de $x_0 = 0$ » on cherchera à trouver des nombres $a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$f(x) - f(0) = a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x_n)$$

et ainsi plus il y aura des a_i nuls, plus l'approximation de $f(0)$ par $f(x)$ sera bonne ! On généralise cela au voisinage du point a avec la définition suivante.

Définition 2.3. On dit qu'une fonction f admet un développement limité à l'ordre n au point a s'il existe des nombres $a,\dot{;}a_n$ tels que :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)\,.$$

Le premier résultat, important, est l'unicité du développement limité :

Proposition 2.1. *Si f admet un développement limité à un ordre n, alors celui-ci est unique.*

2.2. **Manipulation des o et $\sim$.** Toutes les propriétés de ce paragraphe sont simple à démontrer : dans chaque cas il faut revenir aux définitions précédentes concernant o et $\sim$. De manière générale, dès lors que vous êtes perdu par ces notations, revenez à la définition.

2.2.1. *L'échelle des $o(x^n)$.* Dans ce paragraphe les développements se font au voisinage de 0. D'après la définition des *développements limités* on cherche à développer une fonction suivant les monômes x^k avec un reste d'un ordre donné $o(x^n)$. Il faut maintenant apprendre à calculer avec ses notations. Par exemple, comment développer à l'ordre 3 l'expression $(1+x+x^2+o(x^2))^2$? On peut commencer par développer tous les termes du carré et regrouper, on trouve alors

$$(1+x+x^2+o(x^2))^2 = 1+2x+3x^2+o(x^2)+2x^3+2x^2o(x^2)+x^4+x^2o(x^2)\,.$$

La première question à se poser est « quel est l'ordre de ce développement ? » En l'occurence on voit qu'il y a un $o(x^2)$ ce qui fait que le développement est à l'ordre 2, tous les termes d'ordre supérieurs sont des $o(x^2)$! En effet on a :

$$x^3 = \underbrace{x}_{\to 0} x^2 = o(x^2)$$

et de même $x^4 = o(x^2)$. On a aussi :

$$2x^2o(x^2) = \underbrace{2\varepsilon_1(x)}_{\to 0} x^4 = o(x^4)\,,$$

et bien sûr $o(x^4) = o(x^2)$. En effet :

$$o(x^4) = \varepsilon_2(x)x^4 = \underbrace{\varepsilon(x)x^2}_{\to 0} x^2 = o(x^2)\,.$$

Finalement on a $(1+x+x^2+o(x^2))^2 = 1+2x+3x^2+o(x^2)$.

Exercice 2.1. Reprendre le calcul précédent de la façon suivante : on développe le carré, mais on écrit directement $o(x^2)$ dès qu'on identifie un terme d'ordre strictement supérieur.

Lors de calculs plus compliqués il arrive souvent de devoir évaluer une expression de la forme $o\left((x+x^2+o(x^3))^3\right)$ par exemple. On va montrer que $o\left((x+x^2+o(x^3))^3\right) = o(x^3)$. Pour cela on adopte un point de vue légèrement plus général pour en dégager une règle pratique : soient f et g deux fonctions telles que $f \sim g$. Alors $o(f) = o(g)$. En effet, par définition de $o(f)$, cette fonction s'écrit $o(f(x)) = \varepsilon_1(x)f(x)$ avec ε_1 une fonction qui tend vers 0. Comme $f \sim g$ il existe ε_2 une fonction qui tend vers 0 telle que

$f(x) = g(x) + \varepsilon_2(x)g(x)$ et finalement :

$$\begin{aligned} o(f(x)) &= \varepsilon_1(x)\left(g(x) + \varepsilon_2(x)g(x)\right) \\ &= \underbrace{\left(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right)}_{\to 0} g(x) \\ &= o(g(x)) \, . \end{aligned}$$

On revient maintenant à notre exemple. Il suffit donc de trouver un équivalent de $(x + x^2 + o(x^3))^3$. Trouver un équivalent c'est « développer au plus petit ordre non nul », ici quand on développe on voit que le plus petit terme est en x^3 donc on va développer à l'ordre 3. Lorsque l'on développe le cube il n'y a qu'un terme en x^3 et tous les autres termes sont d'ordre supérieur. Ainsi $(x + x^2 + o(x^3))^3 = x^3 + o(x^3) \sim x^3$ et finalement

$$o\left((x + x^2 + o(x^3))^3\right) = o(x^3) \, .$$

Remarque 2.4. On aurait pu factoriser $(x + x^2 + o(x^3))^3 = x^3(1 + x + o(x^2))^3$ et ne développer la parenthèse qu'à l'ordre 1, c'est d'ailleurs souvent préférable.

Exercice 2.2. Dans cet exercice on ne parle que de développements limités au voisinage du point 0. Montrer les égalités suivantes :

(1) $o(x) - 3o(x^2) = o(x)$.
(2) $o(o(o(x))) = o(x)$
(3) $o(x)^{12} = o(x^{12})$.
(4) $o((x - x^2 + o(x^2))^2) = o(x^2)$.
(5) $o(x^4)x^3 = o(x^7)$ et $o(x^4)o(x^3) = o(x^7)$: ainsi on peut factoriser dans le $o(\cdot)$.

2.3. **Avec les suites.** Tout se passe de la même manière sauf qu'en général on va développer en puissances de $\frac{1}{n}$, pour avoir des développements de la forme

$$u_n = a_0 + \frac{a_1}{n} + \cdots + \frac{a_p}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

et on dira que c'est un développement à la précision $\frac{1}{n^p}$.

3. Le formulaire de base

Nous ne donnons pas le formulaire complet mais plutôt une manière efficace de le retrouver. Il est conseillé d'établir un formulaire à la main plutôt que de l'imprimer. La mémorisation des développements usuels n'en sera que facilitée !

3.1. **Les résultats fondamentaux.** Les résultats énoncés dans cette section sont admis et leur démonstration se trouvent dans votre cours de première année.

Le premier développement limité est le suivant :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \, .$$

La preuve est simple : on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1-x}$ et donc

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x} = x^n \varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) := \frac{x}{1-x} \to 0$. On peut alors conclure par la définition de $o(\cdot)$.

En changeant x en $-x$ on obtient aussi

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)\,.$$

Remarque 3.1. On fera attention : un développement limité s'applique au point auquel il est donné. Pour développer $w_n := \frac{1}{1-n}$ on ne développe pas en $x = n$. Il faut d'abord factoriser par n au dénominateur :

$$w_n = \frac{1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

et comme $\frac{1}{n} \to 0$ on peut appliquer le développement limité :

$$w_n = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Proposition 3.1 (Intégration terme à terme)**.** *Si f est une fonction dérivable et telle que, à l'ordre n on ait*

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ donné par :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})\,.$$

Avec ce résultat on peut calculer quelques développements limités. Soit $f(x) := \log(1+x)$, alors $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^k + o(x^{n-1})$ donc par intégration

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n)$$

On verra d'autres exemples dans la section 4.

Théorème 3.1 (Formule de Taylor)**.** *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage d'un point a, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage du point a donné par :*

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + o((x-a)^n)\,.$$

Avec ce théorème on peut calculer encore d'autres développements :

(1) L'exponentielle : vu que $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^x = e^x$ on obtient, au voisinage de 0

$$e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)\,.$$

(2) De la même façon on obtient cos et sin et même les fonctions trigonométriques hyperboliques.

(3) Avec $f(x) := (1+x)^\alpha$, α réel, on peut appliquer le théorème et obtenir

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^k)\,,$$

avec $\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Exercice 3.1. Compléter le formulaire avec les développements de sin, cos, etc.

4. Les calculs de développements limités

On passe maintenant à une séries de calculs explicites de développements limités. La démarche est toujours la même : on développe en utilisant ou en se ramenant aux développements usuels qui sont connus par coeur, et on évitera d'appliquer la formule de Taylor !

4.1. **Additionner, soustraire, multiplier et diviser.** Pour additionner et soustraire c'est très simple : si l'on veut développer $f(x) \pm g(x)$ en un point, disons 0 à l'ordre n alors il faut développer f et g à l'ordre n.

Pour multiplier, et donner un développement de $f(x)g(x)$ c'est tout aussi simple : on peut calculer un développement de f et g à l'ordre n puis développer la multiplication. Il y a toutefois des simplifications qui peuvent se présenter, si les deux développements ne possèdent pas de terme constant. Donnons un exemple en développant $\sin(x)\log(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 sans trop réfléchir. On développe tout à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\sin(x)\log(1+x) &\underset{x\to 0}{=} (x+o(x^2))\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^3}{2}+xo(x^2)+o(x^2)x-o(x^2)\frac{x^2}{2}+o(x^2)^2\end{aligned}$$

ce qui se simplifie en

$$\sin(x)\log(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3) \underset{x\to 0}{=} x^2+o(x^2)\,.$$

On a donc obtenu un développement trop précis et que l'on a dû simplifier ensuite, mais ce n'est pas grave.

Enfin, la division n'est qu'une multiplication, donnons encore une fois un exemple :

$$\begin{aligned}\frac{e^x}{1-x} &= e^x \times \frac{1}{1-x}\\ &\underset{x\to 0}{=} \left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)(1+x+x^2+o(x^2))\\ &\underset{x\to 0}{=} 1+2x+2x^2+o(x^2)\,.\end{aligned}$$

4.2. **Se ramener au point de calcul.** Nous ne donnons qu'une série d'exemples :

(1) $\sqrt{2+x}$ au voisinage de 0 : on factorise par 2 sous la racine et on écrit $\sqrt{2+x} = \sqrt{2}\sqrt{1+\frac{x}{2}}$ et on est alors ramené au développement de $(1+y)^{\frac{1}{2}}$ lorsque $y \to 0$.

(2) $\log(1+n) - \log n$ quand $n \to \infty$ à la précision $\frac{1}{n^2}$. Dans ce cas on ne peut pas directement appliquer le développement de $\log(1+x)$ car ce développement est

valable quand $x \to 0$. On écrit alors :

$$\begin{aligned}\log(1+n) &= \log\left(n(1+\frac{1}{n})\right)\\ &= \log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &\underset{n\to\infty}{=} \log(n) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Finalement

$$\log(1+n) - \log n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(3) $\sin(x)$ au voisinage de 2 à l'ordre 3 : ici c'est une situation où on ne voit pas comment se ramener au développement en 0 donc on applique la formule de Taylor.

Remarque 4.1. Dès que possible on utilisera le développement de $(1+x)^\alpha$ plutôt que de calculer les puissances. Par exemple $g(x) := \frac{1}{(1-x)^3}$ à l'ordre 3 est très rapide à calculer si on écrit $g(x) = (1-x)^{-3}$. C'est beaucoup plus long si on développe $\frac{1}{1-x}$ puis qu'on passe au cube. C'est aussi plus long si on développe le cube puis qu'on applique le développement de $\frac{1}{1-y}$.

4.3. **Composer.** Lorsqu'on calcule le développement de $f(g(x))$ on commmence par développer g puis on applique f. Voici une série d'exemples :

(1) $\sin(\log(1+x))$ à l'ordre 3 en 0. On écrit que

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

puis on applique le développement de sin en 0 donné par $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ avec $y := x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ car $y \to 0$ quand $x \to 0$. Alors :

$$\begin{aligned}\sin(\log(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) - \frac{1}{6}o\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\\ + o\left(\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3\right).\end{aligned}$$

Ensuite on écrit :

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^3 = x^3\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^3$$

où on a juste factorisé par x^3. Ensuite on se souvient que l'on ne veut qu'un développement à l'ordre 3 et que l'on a déjà un x^3 en facteur qui fait gagner trois ordres ! Donc *il suffit* de développer la parenthèse à l'ordre 0 c'est à dire qu'il suffit d'écrire :

$$\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)^3 = (1+o(1))^3 = 1 + o(1).$$

Attention : si vous n'avez pas compris cette étape alors il faut relire la fin de la section 2 pour voir que $x = o(1)$, $x^2 = o(1)$, etc.

On a donc. $\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3 = x^3+o(x^3)$. Enfin on a

$$o\left(\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3\right) = o(x^3)$$

car $\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)^3 = x^3+o(x^3) \sim x^3$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\sin(\log(1+x)) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\frac{1}{6}(x^3+o(x^3)+o(x^3)\\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+o(x^3)\,.\end{aligned}$$

(2) Développons $a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ à la précision $\frac{1}{n^2}$. On revient à la définition de la puissance à base d'exponentielle pour écrire :

$$a_n = \exp\left(n\log(1+\frac{1}{n})\right)$$

et on doit faire attention en développant : comme on veut un résultat à la précision $\frac{1}{n^2}$ et que dans l'exponentielle on a un facteur n, il faut développer $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ à la précision $\frac{1}{n^3}$:

$$\begin{aligned}a_n &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right)\\ &= \exp\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

Pour appliquer le développement de e^y en 0 on factorise à l'intérieur de l'exponentielle en écrivant

$$\exp\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = e\times\exp\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

que l'on peut développer en appliquant le développement $e^y = 1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ avec $y = -\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. En développant le tout comme pour l'exemple précédent on obtient :

$$\begin{aligned}a_n &= e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)+\\ &\quad+o\left(\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2\right)\\ &= e\left(1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{8n^2}+\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$a_n = e-\frac{e}{2n}+\frac{11}{24n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Exercice 4.1. Reprendre les exercices de calculs de développements limités du TD.

4.4. **Utilisation d'une équation différentielle.** Dans le cas où une fonction satisfait une équation différentielle *avantageuse* ou que sa dérivée est facilement calculable il convient de l'exploiter. Typiquement ce sera le cas pour les fonctions trigonométrique inverses mais aussi de tan. Bornons nous à deux exemples :

(1) Donner un développement limité à l'ordre 3 de arcsin au voisinage de 0. On se souvient que $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et donc il suffit de développer cette dérivée à l'ordre 2 puis d'intégrer. Pour cela on se sert du développement de $(1+y)^\alpha$ de la sorte :
$$\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$
et donc finalement
$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\,.$$

(2) Pour obtenir un développement de tan on peut toujours le calculer comme quotient. Il existe toutefois une méthode très rapide : en partant de $\tan x = 1 + o(1)$ on obtient :
$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = 1 + (1+o(1))^2 = 1 + o(1)$$
et donc en intégrant
$$\tan(x) = x + o(x)$$
et on recommence :
$$\tan'(x) = 1 + (x + o(x))^2 = x + x^2 + o(x^2)$$
donc
$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$
et ainsi de suite.

4.5. **Calcul de limite.** On en profite pour donner la limite
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}\,,$$
et ici la difficulté c'est qu'on ne sait pas à quel ordre développer. Comme on cherche une limite il faut développer $f(x) := \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$ à l'ordre 0, mais cela ne nous dit pas à que ordre développer le sin et le tan. En fait on est pas tout à fait dans le cadre des DL puisque par exemple, au voisinage de 0 on a $\frac{1}{\sin(x)} \sim \frac{1}{x}$ qui n'est pas une puissance positive de x. Essayons avec des développements à l'ordre 3 :
$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} - \frac{1}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} - \frac{1}{1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}\right)$$
et donc
$$f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} - 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = \frac{x}{2} + o(x)\,.$$
Finalement on a $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x}$ et même mieux, on a un équivalent $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\tan x} \sim \frac{x}{2}$.