Une remarque sur la valeur absolue dans certains espaces de Sobolev ou de Besov.

Pierre Gilles LEMARIÉ–RIEUSSET (plemarie@univ-evry.fr)

Laboratoire Analyse et Probabilités, EA2172, Université d'Évry Val d'Essonne, 91025 Évry Cedex, France

Résumé : Nous démontrons, pour $1/2 < s < 1$, l'équivalence entre la norme H^s de f et celle de $|f|$.

Abstract: **Remark on the absolute value in Sobolev spaces.** We show, for $1/2 < s < 1$, the equivalence between the H^s norm of f and the norm of $|f|$.

1. Énoncé des théorèmes.

Définition 1 :
Si $0 < s < 1$, *l'espace* $\dot{H}^s(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions* f *localement de carré intégrable qui vérifient*

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s} = \int\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^2}{|x-y|^{n+2s}} \, dx \, dy < +\infty$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 1 :
Si $1/2 < s < 1$, *si* f *est une fonction continue de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}$, *alors* $f \in \dot{H}^s$ *si et seulement si* $|f| \in \dot{H}^s$ *et il existe une constante* $C_{s,n} > 0$ *qui ne dépend que de* s *et de* n *telle que*

$$\| \, |f| \, \|_{\dot{H}^s} \leq \|f\|_{\dot{H}^s} \leq C_{s,n} \| \, |f| \, \|_{\dot{H}^s}$$

Le théorème s'étend au cas des espaces de Besov $\dot{B}^{s,p}_p$:

Définition 2 :
Si $0 < s < 1$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$, *l'espace* $\dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R}^n)$ *est l'espace des fonctions* f *mesurables pour la mesure de Lebesgue qui vérifient*

$$\|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p} = \| \frac{\|f(x) - f(x+h)\|_p}{|h|^s} \|_{L^p(\frac{dh}{|h|^n})} < +\infty$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 2 :
Si $1 < p \leq +\infty$ *et* $1/p < s < 1$, *si* f *est une fonction continue de* $\mathbb{R}^n$ *vers* $\mathbb{R}$, *alors* $f \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si* $|f| \in \dot{B}^{s,p}_p(\mathbb{R}^n)$ *et il existe une constante* $C_{s,p,n} > 0$ *qui ne dépend que de* s, *de* p *et de* n *telle que*

$$\| \, |f| \, \|_{\dot{B}^{s,p}_p} \leq \|f\|_{\dot{B}^{s,p}_p} \leq C_{s,p,n} \| \, |f| \, \|_{\dot{B}^{s,p}_p}$$

2. Le cas $p = +\infty$.

Le cas $p = +\infty$ est trivial. L'espace $\dot{B}^{s,\infty}_\infty$ est l'espace des fonctions höldériennes. Pour vérifier que f est höldérienne si $|f|$ l'est, il suffit de remarquer que si $f(x)f(y) < 0$ et si f est continue, alors (théorème des valeurs intermédiaires) il existe $z \in [x, y]$ tel que $f(z) = 0$. On écrit alors

$$|f(x) - f(y)| \leq \Big| \, |f(x)| - |f(z)| \, \Big| + \Big| \, |f(z)| - |f(y)| \, \Big| \leq 2 \| \, |f| \, \|_{\dot{B}^{s,\infty}_\infty} |x-y|^s$$

3. Le cas $n = 1$ et $p < +\infty$.

Dans le cas de la dimension 1, l'espace $\dot{B}_p^{s,p}$ pour $1/p < s < 1$ est composé de fonctions continues et nous allons montrer une version précisée de l'inégalité de Hardy [2] [6] :

Lemme 1 :
Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tous $a < b \leq +\infty$

$$\int_a^b \frac{|f(x) - f(a)|^p}{|x - a|^{ps}} \, dx \leq C_{s,p} \iint_{[a,b]\times[a,b]} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} \, dx \, dy$$

Preuve : Par convergence monotone, il suffit de traiter le cas $b < +\infty$. Par invariance par translation ou par dilatation, on peut supposer $a = 0$ et $b = 1$. Quitte à régulariser f en $\omega * f$ avec $\omega \in \mathcal{D}$, on peut supposer que f est $\mathcal{C}^\infty$ et donc que le membre de gauche de l'inégalité est fini. On pose $N(f) = \iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}} \, dx \, dy$ et $A(f) = \int_0^1 \frac{|f(x)-f(0)|^p}{|x|^{ps}} \, dx$.

Pour estimer $A(f)$, on écrit

$$A(f) = \frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} \int_0^1 |f(x) - f(0)|^p \int_{x/3}^{x/2} \frac{dy}{|x - y|^{1+ps}} \, dx$$

et donc

$$\big(A(f)\big)^{1/p} \leq \big(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} N(f)\big)^{1/p} + \big(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} \int_0^1 \int_{x/3}^{x/2} \frac{|f(y) - f(0)|^p}{|x - y|^{1+ps}} \, dy \, dx\big)^{1/p}$$

et finalement

$$\big(A(f)\big)^{1/p} \leq \big(\frac{ps}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{ps}} N(f)\big)^{1/p} + \big(\frac{1 - 2^{-ps}}{2^{ps} - (\frac{3}{2})^{s}} A(f)\big)^{1/p}$$

Appliquant les accroissements finis à $2^{ps} - 1^{ps}$ et à $4^{ps} - 3^{ps}$, et puisque $ps > 1$, on voit que $\frac{1-2^{-ps}}{2^{ps}-(\frac{3}{2})^{ps}} < 1$, ce qui permet de contrôler $A(f)$ par $N(f)$.

Cette inégalité a pour corollaires les lemmes suivants :

Lemme 2 :
Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{B}_p^{s,p}(\mathbb{R})$ et tout intervalle ouvert I tels que $f(x) = 0$ aux extrémités de I, on a

$$\|f 1_I\|_{\dot{B}_p^{s,p}} \leq C_{s,p} \|f\|_{\dot{B}_p^{s,p}}$$

Lemme 3 :
Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{\dot{B}}_p^{s,p}(\mathbb{R})$ et tout intervalle ouvert I tels que $f(x) = 0$ pour tout $x \notin I$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} \, dx \, dy \leq C_{s,p} \iint_{I\times I} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+ps}} \, dx \, dy$$

Preuve : On écrit $I =]a, b[$. On pose $N(f) = \iint_{I\times I} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}} \, dx \, dy$, $A(f) = \int_I \frac{|f(x)-f(a)|^p}{|x-a|^{ps}} \, dx$ (si $a = -\infty$, on pose $A = 0$) et $B(f) = \int_I \frac{|f(x)-f(b)|^p}{|b-x|^{ps}} \, dx$ (si $b = +\infty$, on pose $B = 0$). Si f est nulle en dehors de I, on vérifie facilement $\|f\|^p_{\dot{B}_p^{s,p}} = N(f) + \frac{2}{ps}(A(f) + B(f))$ et on applique le lemme 1.

Nous pouvons alors énoncer le lemme principal :

Lemme 4 :

Si $1/p < s < 1$ et $1 < p < +\infty$, il existe une constante $C_{s,p} > 0$ telle que, pour tout $f \in \dot{B}_p^{s,p}(\mathbb{R})$, si $\Omega_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ f(x) \neq 0\}$ et si $\Omega_f = \sum_{k\in K} I_k$, $K \subset \mathbb{N}$, est la décomposition de Ω_f en intervalles ouverts disjoints, on a

$$\sum_{k\in K} \int\int_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy \leq \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy \leq C_s \sum_{k\in K} \int\int_{I_k\times I_k} \frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy$$

Preuve : On pose $f_k = 1_{I_k} f$, $I_k =]a_k, b_k[$. Enfin, on note $\Delta = \sum_{k\in K} I_k \times I_k$. En remarquant que $|f(x)|^p = \sum_{k\in K} |f_k(x)|^p$, on écrit (avec la convention $\frac{1}{|c-x|^{ps}} = 0$ si $c = -\infty$ ou $c = +\infty$) :

$$\begin{aligned}
\int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \tfrac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy &= \int\int_{\Delta} \tfrac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy + \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}-\Delta} \tfrac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy \\
&\leq \sum_{k\in K} \int\int_{I_k\times I_k} \tfrac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy + 2^p \sum_{k\in K} \int\int_{x\in I_k,\ y\notin I_k} \tfrac{|f(x)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy \\
&\leq \sum_{k\in K} \int\int_{I_k\times I_k} \tfrac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{1+ps}}\, dx\, dy + C_s \sum_{k\in K} \int_{I_k} |f(x)|^p \left(\tfrac{1}{|x-a_k|^{ps}} + \tfrac{1}{|b_k-x|^{ps}}\right) dx
\end{aligned}$$

On conclut alors en appliquant à f_k les lemmes 2 et 3.

Le théorème 1 dans le cas $n = 1$ est alors une conséquence directe du lemme 4.

4. Le cas $n > 1$.

Pour traiter le cas général, on utilise les coordonnées sphériques : on a

$$\|f\|^p_{\dot{B}_p^{s,p}} = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x+\rho\sigma) - f(x)|^p}{|\rho|^{1+sp}}\, dx\, d\rho\, d\sigma$$

puis en écrivant $x = y + t\sigma$ avec $y \in \sigma^\perp$

$$\|f\|^p_{\dot{B}_p^{s,p}} = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \Big(\int_{\sigma^\perp} \big(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{|f(y+(\rho+t)\sigma) - f(y+t\sigma)|^p}{|\rho|^{1+sp}}\, dt\, d\rho \big)\, dy \Big)\, d\sigma$$

La démonstration des Théorèmes 1 et 2 dans le cas général se ramène donc au cas $n = 1$.

5. Un exemple d'application.

Comme exemple d'application, nous allons considérer le problème de la régularité des solutions faibles de l'équation quasi-géostrophique dissipative. Notons $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ l'opérateur de Calderón. Pour $0 < \alpha \leq 1$, l'équation quasi-géostrophique dissipative (QG_α) est l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \vec{u}.\vec{\nabla}\theta = -\Lambda^{2\alpha}\theta \\ \vec{u} = (-R_2\theta, R_1\theta) \\ \theta(0,.) = \theta_0 \end{cases}$$

où R_j est la transformation de Riesz $R_j = \frac{1}{\sqrt{-\Delta}}\partial_j$. Le terme d'advection $\vec{u}.\vec{\nabla}\theta$ peut se réécrire $\mathrm{div}(\theta\ \vec{u})$ et on peut donc considérer les solutions peu régulières de l'équation modifiée :

$$\begin{cases} \partial_t\theta + \mathrm{div}(\theta\ \vec{u}) = -\Lambda^{2\alpha}\theta \\ \vec{u} = (-R_2\theta, R_1\theta) \\ \theta(0,.) = \theta_0 \end{cases}$$

En 2008, Marchand [5] a étudié le cas d'une donnée initiale $\theta_0 \in L^p$; pour $2 \leq p < +\infty$, il a établi l'existence de solutions faibles qui vérifient de plus

$$\text{pour } t > 0, \quad \|\theta(t,.)\|_p^p + p \int_0^t \int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\, dx\, ds \leq \|\theta_0\|_p^p$$

où l'intégrale double donne une contribution positive, comme le montre l'inégalité de Córdoba [4] [

$$2\int |\Lambda^\alpha(|\theta|^{p/2})|^2\ dx \leq p\int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\ dx.$$

Cette inégalité montre que $|\theta|^{p/2}$ appartient à $L^2_t\dot H^\alpha$, ce qui entraîne que $|\theta|$ appartient à $L^p\dot B_p^{2\alpha/p,p}$. Cependant, la régularité de la fonction θ elle-même restait obscure.

En collaboration avec D. Chamorro, nous avons montré dans [3] une inégalité plus précise, pour $0<\alpha<1$,

$$\|\theta\|^p_{\dot B_p^{2\alpha/p,p}} \leq C_{p,\alpha}\|\theta|\theta|^{\frac{p-2}{2}}\|^2_{\dot H^\alpha} \leq C'_{p,\alpha}\int \theta|\theta|^{p-2}\Lambda^{2\alpha}\theta\ dx$$

La démonstration utilisait des propriétés élémentaires des semi-groupes de diffusion [1]. Dans le cas $1/2<\alpha<1$, le théorème 1 permet une autre démonstration de cette inégalité.

6. Remarques finales.

Le théorème 2 est faux si f est à valeurs complexes ou si $0<s<1/p$, comme le montrent les contre-exemples suivants :
a) fonction à valeurs complexes : prendre $f(t)=\varphi(t)e^{\frac{i}{\ln|x|}}$ où $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\varphi(0)=1$ et $\varphi(x)=0$ pour $|x|\geq 1/2$.
b) cas $0<s<1/p$: prendre $g(x)=1_{]0,1[}(x)$; on a $g\in\dot B_p^{s,p}(\mathbb{R})$ pour $0<s<1/p$ (et g peut être approximée en norme $\dot B_p^{s,p}$ par des fonctions continues); si $f_N=\sum_{k=0}^{2N-1}(-1)^k g(x-k)$, on a

$$\|\,|f_N\,|\,\|_{\dot B_p^{s,p}} = \|g(\frac{x}{2N})\|_{\dot B_p^{s,p}} = (2N)^{1/p-s}\|g\|_{\dot B_p^{s,p}} \text{ et } \|f_N\|_{\dot B_p^{s,p}} \geq N^{1/p}\Big(\int_0^1\int_1^2 \frac{1}{|x-y|^{1+2s}}\ dx\ dy\Big)^{1/p}$$

de sorte que $\lim_{N\to+\infty}\frac{\|\,|f_N\,|\,\|_{\dot B_p^{s,p}}}{\|f_N\,\|_{\dot B_p^{s,p}}}=0$.

Remerciements : Pour élémentaires que ces calculs soient, ils m'ont résisté deux ans durant. L'étincelle de compréhension est venue dans la salle de réveil de l'hôpital de jour de l'Hôpital Robert Debré, au chevet de ma fille au sortir de son opération. Merci à l'équipe soignante de cet hôpital pour savoir créer dans des circonstances difficiles une atmosphère sereine pour les jeunes opéré(e)s et leur famille!

Références.

[1] BAKRY, D., Functional inequalities for Markov semigroups. In *Probability measures on groups: recent directions and trends*, pp. 91–147. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006.

[2] BOURDAUD, G., Localisation et multiplicateurs des espaces de Sobolev homogènes, *Manuscripta Math.* 60 (1988), pp. 93–130.

[3] CHAMORRO, D. et LEMARIÉ–RIEUSSET, P. G., Quasi-geostrophic equations, nonlinear Bernstein inequalities and α-stable processes, à paraître in *Revista Matematica Iberoamer.*.

[4] CÓRDOBA, A., CÓRDOBA, D., A maximum principle applied to Quasi-Geostrophic equations, *Commun. Math. Phys.* 249 (2004), 511-528.

[5] MARCHAND, F., Existence and Regularity of Weak Solutions to the Quasi-Geostrophic Equations in the Spaces L^p or $\dot H^{-1/2}$, *Commun. Math. Phys.* 277 (2008), 45–67.

[6] YOUSSFI, A., Localisation des espaces de Lizorkin–Triebel homogènes, *Math. Nach.* 147 (1990), 107–121.