

Point fixe d'une application non contractante.

Pierre Gilles LEMARIÉ–RIEUSSET

Département de mathématiques, Université d'Evry, boulevard F. Mitterrand, 91025 Evry cedex, France
Pierre-Gilles.Lemarie@maths.univ-evry.fr

Résumé. Nous étudions une équation de point fixe multilinéaire dans une boule d'un espace de Banach où l'application est 1-lipschitzienne : existence, unicité, approximations, régularité.

Abstract. We study a multilinear fixed-point equation in a closed ball of a Banach space where the application is 1-Lipschitzian : existence, uniqueness, approximations, regularity.

MSC 2000 : 47J99, 65J99, 76D05

Key words : fixed point, iterative approximation, Besov spaces, Navier-Stokes equations

Nous nous proposons de résoudre le problème de point fixe suivant :

Théorème 1. –

Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k est une application k -linéaire continue sur E

$$\|T_k(x_1, \dots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E.$$

On pose

$$r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k} \text{ et } R_k = \frac{k}{k-1} r_k.$$

B_k désignera la boule fermée $B_k = \bar{B}(0, R_k)$. Soit enfin $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E \leq r_k$. Alors l'équation $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ a une et une seule solution x_∞ dans B_k .

Le cas où $\|x_0\| \leq \delta < r_k$ est classique et facile : l'application $F : x \mapsto x_0 + T(x, \dots, x)$ envoie continument la boule fermée $\bar{B}(0, \frac{k}{k-1}\delta)$ sur elle-même et y est contractante de facteur $(\frac{\delta}{r_k})^{k-1}$. Nous nous intéressons donc au cas limite $\delta = r_k$. Dans le cas $k = 2$, Auscher et Tchamitchian [1] ont montré qu'il y avait existence et unicité de la solution dans la boule $\bar{B}(0, 2r_2)$ pour $\|x_0\|_E \leq r_2$. Nous généralisons ce résultat au cas $k \geq 2$, en donnant une démonstration élémentaire. De plus, nous étudions la convergence de plusieurs méthodes de résolution et nous établissons un résultat de régularité qui généralise au cas limite $\delta = r_k$ les résultats de persistance de Furioli et al. [2] et de Zahrouni [4].

1. Inégalités élémentaires pour les applications k -linéaires.

Dans cette section, nous formulons des inégalités immédiates permettant de comparer le comportement d'une application k -linéaire à l'application polynôme x^k .

Lemme 1. –

Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k est une application k -linéaire continue sur E

$$\|T_k(x_1, \dots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E.$$

On note DT_k la différentielle de l'application $x \mapsto T_k(x, \dots, x)$:

$$DT_k(x).y = T_k(y, x, \dots, x) + T_k(x, y, x, \dots, x) + \dots + T_k(x, \dots, x, y).$$

Alors, si A et B sont deux réels positifs et x et y deux vecteurs de E tels que $\|x\|_E \leq A$ et $\|y\|_E \leq B$, on a les inégalités suivantes :

i) $\|T_k(x, \dots, x)\|_E \leq C_0 A^k$

- ii) $\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E \frac{A^k - B^k}{A - B}$
iii) pour $z \in E$, $\|T_k(x, \dots, x, z) - T_k(y, \dots, y, z)\|_E \leq C_0 \|z\|_E \|x - y\|_E \frac{A^{k-1} - B^{k-1}}{A - B}$
iv) $\|DT_k(y) \cdot x\|_E \leq C_0 k B^{k-1} A$
v) $\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) - DT_k(y) \cdot (x - y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E^2 \frac{A^k - B^k - k B^{k-1} (A - B)}{(A - B)^2}$

Démonstration. – i) est immédiat. Pour démontrer ii), il suffit d'utiliser la multi-linéarité pour écrire $T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) = \sum_{j=1}^k T_k(x_{j,1}, \dots, x_{j,k})$ avec $x_{j,k} = y$ pour $k < j$, $x_{j,j} = x - y$ et $x_{j,k} = x$ pour $k > j$. On a donc

$$\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E \sum_{j=1}^k \|y\|_E^{j-1} \|x\|_E^{k-j} \leq C_0 \|x - y\|_E \sum_{j=1}^k B^{j-1} A^{k-j}$$

et donc $\|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y)\|_E \leq C_0 \|x - y\|_E \frac{A^k - B^k}{A - B}$.

iii) est une conséquence directe de ii), par $(k-1)$ -linéarité de $(x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto T_k(x_1, \dots, x_{k-1}, z)$. iv) est immédiat. Enfin, v) est immédiat par multi-linéarité : $T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) - DT_k(y) \cdot (x - y) = \sum_{j=1}^k T_k(x_{j,1}, \dots, x_{j,k}) - DT_k(y) \cdot (x - y) = \sum_{j=1}^k (T_k(y, \dots, y, x - y, x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y, x - y, y, \dots, y)) = \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} T_k(x_{j,1}, \dots, x_{j,j}, x_{j+l,j+1}, \dots, x_{j+l,k})$. On a donc

$$\begin{aligned} & \|T_k(x, \dots, x) - T_k(y, \dots, y) - DT_k(y) \cdot (x - y)\|_E \\ & \leq C_0 \|x - y\|_E^2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} \|y\|_E^{j+l-2} \|x\|_E^{k-j-l} \\ & \leq C_0 \|x - y\|_E^2 \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{l=1}^{k-j} B^{j+l-2} A^{k-j-l} \\ & = C_0 \|x - y\|_E^2 \frac{A^k - B^k - k B^{k-1} (A - B)}{(A - B)^2}. \end{aligned}$$

2. L'équation réelle.

Pour résoudre l'équation dans E , on se ramènera à comparer celle-ci à l'équation polynomiale $t = r_k + C_0 t^k$.

Lemme 2. –

Soit $k \geq 2$. Soient $r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k}$ et $R_k = \frac{k}{k-1} r_k$. R_k est la seule racine réelle positive de l'équation polynomiale $t = r_k + C_0 t^k$. De plus, les suites itératives suivantes convergent vers R_k :

- i) si $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = r_k + C_0 \alpha_n^k$, alors $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \rightarrow R_k$ et $\alpha_{n+1} - \alpha_n \sim \frac{2R_k}{k-1} \frac{1}{n^2}$.
ii) si $\beta_0 = 0$ et $\beta_{n+1} = r_k + C_0 \beta_n^{k-1} \beta_{n+1}$, alors $0 \leq \beta_n \leq \beta_{n+1} \rightarrow R_k$ et $\beta_{n+1} - \beta_n \sim \frac{2R_k}{k} \frac{1}{n^2}$.
iii) si $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_{n+1} = r_k + C_0 \gamma_n^k + k C_0 \gamma_n^{k-1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$ alors $0 \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \rightarrow R_k$ et il existe une constante C telle que $\gamma_{n+1} - \gamma_n \sim C 2^{-n}$.

Démonstration. – Il est immédiat par récurrence que $\alpha_n \leq R_k$. Enfin $\alpha_1 \geq \alpha_0$ et par récurrence α_n est croissante. Elle converge donc vers R_k , qui est la seule solution réelle positive de $t = r_k + C_0 t^k$. Enfin, on pose $\epsilon_n = R_k - \alpha_n$; de l'égalité $\alpha_{n+1} = R_k - C_0 R_k^k + C_0 \alpha_n^k$, on tire

$$\epsilon_{n+1} = C_0 R_k^k (1 - (1 - \frac{\epsilon_n}{R_k})^k) = \epsilon_n - \frac{(k-1)}{2R_k} \epsilon_n^2 + o(\epsilon_n^2)$$

et il est alors classique que $\epsilon_n \sim \frac{2R_k}{k-1} \frac{1}{n}$ et donc $\alpha_{n+1} - \alpha_n \sim \frac{2R_k}{k-1} \frac{1}{n^2}$.

On montre par récurrence que β_n reste inférieur ou égal à R_k : $\beta_{n+1} \leq r_k + C_0 R_k^{k-1} \beta_{n+1}$, d'où $(1 - C_0 R_k^{k-1}) \beta_{n+1} = \frac{k-1}{k} \beta_{n+1} \leq r_k = \frac{k-1}{k} R_k$. Par ailleurs, $\beta_1 = r_k \geq \beta_0 = 0$ et par récurrence la suite $\beta_{n+1} = \frac{r_k}{1 - C_0 \beta_n^{k-1}}$ est croissante; elle converge donc vers R_k . Enfin, on pose $\eta_n = R_k - \beta_n$; de l'égalité $\beta_{n+1} = R_k - C_0 R_k^k + C_0 \beta_n^{k-1} \beta_{n+1}$, on tire

$$\eta_{n+1} = C_0 R_k^k (1 - (1 - \frac{\eta_n}{R_k})^{k-1} (1 - \frac{\eta_{n+1}}{R_k}))$$

d'où (puisque $C_0 R_k^k = \frac{R_k}{k}$)

$$\eta_{n+1} = \eta_n \left(1 - \frac{\eta_{n+1}}{R_k} - \frac{(k-2)}{2R_k} \eta_n + o(\eta_n)\right) = \eta_n \left(1 - \frac{k}{2R_k} \eta_n + o(\eta_n)\right)$$

et il est alors classique que $\eta_n \sim \frac{2R_k}{k} \frac{1}{n}$.

On vérifie par récurrence sur n que $0 \leq \gamma_n < R_k$. En effet, on a $\gamma_{n+1} = \frac{r_k - C_0(k-1)\gamma_n^k}{1 - C_0 k \gamma_n^{k-1}} = \frac{k-1}{k} \frac{R_k^k - \gamma_n^k}{R_k^{k-1} - \gamma_n^{k-1}}$ et la formule des accroissements finis pour la fonction $t \mapsto t^{\frac{k}{k-1}}$ sur $[\gamma_n^{k-1}, R_k^{k-1}]$ nous donne bien que $\gamma_{n+1} < R_k$. De plus, la fonction $t \mapsto t^{\frac{k}{k-1}}$ étant convexe, on voit que la suite γ_n est croissante et converge donc vers R_k . Enfin, on pose $R_k - \gamma_n = \zeta_n$. De l'identité $R_k - \gamma_{n+1} = C_0(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n))$, on tire $R_k - \gamma_{n+1} = \frac{C_0(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(R_k - \gamma_n))}{1 - C_0 k \gamma_n^{k-1}} = \frac{(R_k^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(R_k - \gamma_n))}{k(R_k^{k-1} - \gamma_n^{k-1})}$, d'où $\zeta_{n+1} = \frac{1}{2}\zeta_n + O(\zeta_n^2)$. Cela prouve que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \zeta_n < \infty$ et que $\zeta_n \sim 2^{-n} \zeta_0 \prod_{j=0}^{\infty} \frac{2\zeta_j}{\zeta_{j-1}}$.

3. La méthode de Picard.

Comme dans l'article d'Auscher et Tchamitchian [1], l'existence et l'unicité du point fixe sont démontrées par le fait que toutes les suites de Picard de terme initial dans la boule $\bar{B}(0, R_k)$ convergent vers la même limite.

Théorème 2. –

Soit $k \geq 2$. Soient E un espace de Banach et T_k est une application k -linéaire continue sur E

$$\|T_k(x_1, \dots, x_k)\|_E \leq C_0 \|x_1\|_E \dots \|x_k\|_E.$$

On pose

$$r_k = (C_0 k)^{-\frac{1}{k-1}} \frac{k-1}{k} \text{ et } R_k = \frac{k}{k-1} r_k.$$

B_k désignera la boule fermée $B_k = \bar{B}(0, R_k)$. Soit enfin $x_0 \in E$ avec $\|x_0\|_E \leq r_k$. Alors :

- i) l'équation $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ a une et une seule solution x_∞ dans B_k .
- ii) (Méthode de Picard) Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par $y_0 \in B_k$ et $y_{n+1} = x_0 + T_k(y_n, \dots, y_n)$ alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|y_n - x_\infty\|_E < \infty$.

Démonstration. – On pose $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$, $\alpha_0 = 0$ et $\alpha_{n+1} = r_k + C_0 \alpha_n^k$. Il est immédiat que $\|a_n\|_E \leq \alpha_n$.

Par ailleurs, $\|a_1 - a_0\|_E = \|x_0\|_E \leq r_k = \alpha_1 - \alpha_0$ et (en utilisant l'inégalité ii) du Lemme 1)

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_E = \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \leq C_0 \|a_{n+1} - a_n\|_E \frac{\alpha_{n+1}^k - \alpha_n^k}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$$

d'où $\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_E \leq C_0 \|a_{n+1} - a_n\|_E \frac{\alpha_{n+1}^k - \alpha_n^k}{\alpha_{n+1} - \alpha_n} = (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1}) \frac{\|a_{n+1} - a_n\|_E}{\alpha_{n+1} - \alpha_n}$ et donc par récurrence on a $\|a_{n+1} - a_n\|_E \leq \alpha_{n+1} - \alpha_n$. Cela entraîne que a_n converge vers un point fixe x_∞ .

Considérons maintenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est immédiat que $\|y_n\|_E \leq R_k$ pour tout n . De plus, $\|y_0 - a_0\|_E = \|y_0\|_E \leq R_k = R_k - \alpha_0$. On écrit alors (en utilisant l'inégalité ii) du Lemme 1)

$$\|y_{n+1} - a_{n+1}\|_E = \|T_k(y_n, \dots, y_n) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \leq C_0 \|y_n - a_n\|_E \frac{R_k^k - \alpha_n^k}{R_k - \alpha_n}$$

d'où $\|y_{n+1} - a_{n+1}\|_E \leq C_0 \|y_n - a_n\|_E \frac{R_k^k - \alpha_n^k}{R_k - \alpha_n} = (R_k - \alpha_{n+1}) \frac{\|y_n - a_n\|_E}{R_k - \alpha_n}$ et donc par récurrence on a $\|y_n - a_n\|_E \leq R_k - \alpha_n$. En particulier, $\|x_\infty - y_n\| \leq 2(R_k - \alpha_n)$. Cela entraîne l'unicité du point fixe.

4. Une méthode implicite d'approximation.

Il peut être parfois utile d'utiliser d'autres méthodes d'approximation pour exploiter certaines propriétés de l'application multi-linéaire T_k . Par exemple, nous allons voir qu'un schéma implicite élémentaire converge encore vers le point fixe.

Théorème 3. –

Sous les hypothèses et notations du théorème 1, on a également le résultat d'approximation suivant : Si $z_0 \in B_k$ et si $z_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire $z_{n+1} = x_0 + T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1})$ alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|z_n - x_\infty\|_E < \infty$.

Démonstration. – On pose $b_0 = 0$ et $b_{n+1} = x_0 + T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})$, $\beta_0 = 0$ et $\beta_{n+1} = r_K + C_0 \beta_n^{k-1} \beta_{n+1}$. On montre par récurrence que $\|b_n\|_E$ et $\|z_n\|_E$ sont inférieurs ou égaux à R_k : par exemple, $\|b_{n+1}\|_E \leq r_k + C_0 R_k^{k-1} \|b_{n+1}\|_E$, d'où $(1 - C_0 R_k^{k-1}) \|b_{n+1}\|_E = \frac{k-1}{k} \|b_{n+1}\|_E \leq r_k = \frac{k-1}{k} R_k$.

Par ailleurs, $\|b_1 - b_0\|_E = \|x_0\|_E \leq r_k = \beta_1 - \beta_0$ et

$$\begin{aligned} \|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E &= \|T_k(b_{n+1}, \dots, b_{n+1}, b_{n+2}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq \|T_k(b_{n+1}, \dots, b_{n+1}, b_{n+2}) - T_k(b_{n+1}, \dots, b_{n+1}, b_{n+1})\|_E \\ &\quad + \|T_k(b_{n+1}, \dots, b_{n+1}, b_{n+1}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq C_0 \beta_{n+1}^{k-1} \|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E + C_0 \beta_{n+1} \|b_{n+1} - b_n\|_E \frac{\beta_{n+1}^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{\beta_{n+1} - \beta_n} \end{aligned}$$

d'où $\|b_{n+2} - b_{n+1}\|_E \leq \frac{C_0}{1 - C_0 \beta_{n+1}^{k-1}} \|b_{n+1} - b_n\|_E \frac{\beta_{n+1}^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{\beta_{n+1} - \beta_n} = (\beta_{n+2} - \beta_{n+1}) \frac{\|b_{n+1} - b_n\|_E}{\beta_{n+1} - \beta_n}$ et donc par récurrence on a $\|b_{n+1} - b_n\|_E \leq \beta_{n+1} - \beta_n$. Cela entraîne que b_n converge vers le point fixe x_∞ .

Considérons maintenant la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a $\|z_0 - b_0\|_E = \|z_0\|_E \leq R_k = R_k - \beta_0$. On écrit alors

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E &= \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(z_n, \dots, z_n, b_{n+1})\|_E \\ &\quad + \|T_k(z_n, \dots, z_n, b_{n+1}) - T_k(b_n, \dots, b_n, b_{n+1})\|_E \\ &\leq C_0 R_k^{k-1} \|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E + C_0 \beta_{n+1} \|z_n - b_n\|_E \frac{R_k^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{R_k - \beta_n} \end{aligned}$$

d'où $\|z_{n+1} - b_{n+1}\|_E \leq \frac{C_0}{1 - C_0 R_k^{k-1}} \|z_n - b_n\|_E \frac{R_k^{k-1} - \beta_n^{k-1}}{R_k - \beta_n} = (R_k - \beta_{n+1}) \frac{\|z_n - b_n\|_E}{R_k - \beta_n}$ et donc par récurrence on a $\|z_n - b_n\|_E \leq R_k - \beta_n$. En particulier, $\|x_\infty - z_n\| \leq 2(R_k - \beta_n)$.

5. La méthode de Newton.

Théorème 4. – (Méthode de Newton)

Sous les hypothèses et notations du théorème 1, on a également le résultat d'approximation suivant : si $w_0 = 0$ et si $w_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire $w_{n+1} = x_0 + T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n) \cdot (w_{n+1} - w_n)$ (où DT_k est la différentielle de l'application $w \mapsto T_k(w, \dots, w)$) alors $\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty$.

Démonstration. –

On pose $\gamma_0 = 0$ et $\gamma_{n+1} = r_k + C_0 \gamma_n^k + k C_0 \gamma_n^{k-1} (\gamma_{n+1} - \gamma_n)$. On montre par récurrence que $\|w_{n+1} - w_n\|_E \leq \gamma_{n+1} - \gamma_n$ et donc aussi que $\|w_{n+1}\|_E \leq \gamma_{n+1}$. On remarque d'abord que c'est vrai pour $n = 0$ puisque $\|w_1 - w_0\|_E = \|x_0\|_E \leq r_k = \gamma_1 - \gamma_0$. Pour passer au rang $n + 1$, on remarque que $\|DT_k(w_{n+1})\|_{op} \leq C_0 k \|w_{n+1}\|_E^{k-1} \leq C_0 k \gamma_{n+1}^{k-1} < 1$, de sorte que w_{n+2} est bien défini. On écrit alors

$$\begin{aligned} &\|w_{n+2} - w_{n+1}\|_E \\ &= \|T_k(w_{n+1}, \dots, w_{n+1}) + DT_k(w_{n+1}) \cdot (w_{n+2} - w_{n+1}) - T_k(w_n, \dots, w_n) - DT_k(w_n) \cdot (w_{n+1} - w_n)\|_E \\ &\leq \|DT_k(w_{n+1}) \cdot (w_{n+2} - w_{n+1})\|_E + \|T_k(w_{n+1}, \dots, w_{n+1}) - T_k(w_n, \dots, w_n) - DT_k(w_n) \cdot (w_{n+1} - w_n)\|_E \end{aligned}$$

On utilise alors les inégalités iv) et v) du Lemme 1 pour obtenir

$$\|DT_k(w_{n+1}) \cdot (w_{n+2} - w_{n+1})\|_E \leq C_0 k \gamma_{n+1}^{k-1} \|w_{n+2} - w_{n+1}\|_E$$

et

$$\begin{aligned} & \|T_k(w_{n+1}, \dots, w_{n+1}) - T_k(w_n, \dots, w_n) - DT_k(w_n) \cdot (w_{n+1} - w_n)\|_E \\ & \leq C_0 \|w_{n+1} - w_n\|_E^2 \frac{\gamma_{n+1}^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)}{(\gamma_{n+1} - \gamma_n)^2} \end{aligned}$$

d'où par l'hypothèse de récurrence

$$\|w_{n+2} - w_{n+1}\|_E \leq \frac{1}{1 - C_0 k \gamma_{n+1}^{k-1}} C_0 (\gamma_{n+1}^k - \gamma_n^k - k\gamma_n^{k-1}(\gamma_{n+1} - \gamma_n)) = \gamma_{n+2} - \gamma_{n+1}.$$

6. Amélioration de la régularité.

On se place toujours dans les hypothèses du Théorème 1. Si on suppose de plus que, pour un autre espace de Banach F , l'application k -linéaire envoie continument $(x_1, \dots, x_k)$ dans F lorsque les x_i appartiennent à (l'adhérence de $F \cap E$ dans) E et que l'un au moins des x_i appartient également à F (ce qui s'écrit qu'il existe une constante C_1 telle que pour tous $x_1, \dots, x_k \in F$ on ait

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C_1 \min_{1 \leq i \leq k} (\|x_i\|_F + \|x_i\|_E) \prod_{j \neq i} \|x_j\|_E \quad)$$

alors on va montrer que si $x_0 \in F$ et $\|x_0\|_E \leq r_k$ la solution x_∞ dans B_k de $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ vérifie encore $x_\infty \in F$ (ceci sans aucune condition de taille sur $\|x_0\|_F$). De plus, les suites itératives considérées dans les théorèmes 2, 3 et 4 convergent vers x_∞ dans F également.

Pour alléger les notations (quitte à remplacer F par $E \cap F$), on peut supposer que F s'injecte continument dans E .

Théorème 5. — (Amélioration de la régularité.)

Sous les hypothèses et notations du théorème 1, si F est un espace de Banach qui s'injecte continument dans E et si pour tous $x_1, \dots, x_k \in F$ on a

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C_1 \min_{1 \leq i \leq k} (\|x_i\|_F + \|x_i\|_E) \prod_{j \neq i} \|x_j\|_E$$

alors si $x_0 \in F$ et $\|x_0\|_E \leq r_k$ la solution x_∞ dans B_k de $x = x_0 + T_k(x, \dots, x)$ vérifie $x_\infty \in F$.

Plus précisément, on a :

- i) Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par récurrence par $y_0 \in B_k \cap F$ et $y_{n+1} = x_0 + T_k(y_n, \dots, y_n)$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $y_n \in F$ et de plus $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|y_n - x_\infty\|_E < \infty$.*
- ii) si $z_0 \in B_k \cap F$ et si $z_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation linéaire $z_{n+1} = x_0 + T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1})$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $z_n \in F$ et de plus $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|z_n - x_\infty\|_F < \infty$.*
- iii) si $w_0 = 0$ et si $w_{n+1} \in B_k$ est solution de l'équation $w_{n+1} = x_0 + T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n) \cdot (w_{n+1} - w_n)$ (où DT_k est la différentielle de l'application $w \mapsto T_k(w, \dots, w)$) alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_n \in F$ et de plus $\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_F < \infty$.*

Démonstration. — Comme pour le théorème 2, on considère d'abord la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$. Il est immédiat par récurrence que $a_n \in F$ pour tout n . De plus,

$$\begin{aligned} \|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F & = \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_E \\ & \leq C_1 \|a_{n+1} - a_n\|_E k \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F) (\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E))^{k-2} \end{aligned}$$

Or on sait que $\|a_n\|_E \leq R_k$ pour tout n et que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_E \leq \frac{2R_k}{k-1}$. Il existe donc une constante C_2 qui ne dépend pas de n telle que $\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \leq C_2 \frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)$. Si $M_n = \sup_{l \leq n} \|a_l\|_F$, on a $M_{n+2} \leq (1 + \frac{C_2}{n^2}) M_{n+1}$. Comme $\prod_{n \geq 1} (1 + \frac{C_2}{n^2}) < \infty$, on voit que $\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n < \infty$ et donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_F < \infty$. Cela prouve que a_n converge dans F et donc que $x_\infty \in F$.

Considérons maintenant la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Il est immédiat par récurrence que $y_n \in F$ pour tout n . De plus,

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(y_n, \dots, y_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 \|y_n - x_\infty\|_E k \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F) (\sup(\|y_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-2} \\ &\leq C_1 \|y_n - x_\infty\|_E k (\|y_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F) R_k^{k-2} \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|y_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_3 qui ne dépend pas de n telle que $\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_3 \frac{1}{n} (\|y_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$. On choisit alors n_0 tel que $\frac{C_3}{n_0} \leq \frac{1}{2}$ et on choisit Γ tel que $2C_3 \|x_\infty\|_F \leq \Gamma$ et $n_0 \|y_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{n}$. Le point i) est donc démontré.

Pour démontrer le point ii), on commence par vérifier que z_n appartient bien à F . Mais c'est immédiat par récurrence puisque si $z_n \in F$ et $z_{n+1} \in E$ on a bien $T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) \in F$.

On écrit alors

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\ &\leq \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty)\|_F \\ &\quad + \|T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 R_k^{k-2} \|z_n\|_F \|z_{n+1} - x_\infty\|_E + C_1 (k-1) \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F) \|z_n - x_\infty\|_E R_k^{k-2} \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|z_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_4 qui ne dépend pas de n telle que $\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_4 \frac{1}{n} (\|z_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$ et on conclut comme pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour démontrer le point iii), on commence par vérifier que w_n appartient bien à F . Mais c'est immédiat par récurrence puisque si $w_n \in F$ et $w_{n+1} \in E$ on a bien $DT_k(w_n).w_{n+1} \in F$.

On écrit alors

$$\begin{aligned} \|w_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq \|DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n)\|_F + \|T_k(w_n, \dots, w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 k R_k^{k-2} \|w_n\|_F \|w_{n+1} - w_n\|_E + C_1 k R_k^{k-2} \min(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F) \|w_n - x_\infty\|_E \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_5 qui ne dépend pas de n telle que $\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_5 2^{-n} (\|w_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$ et on conclut facilement : on choisit n_0 tel que $\frac{C_5}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{2}$ et on choisit Γ tel que $2C_5 \|x_\infty\|_F \leq \Gamma$ et $2^{n_0} \|w_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{2^n}$.

7. Cas d'un contrôle plus faible.

Les résultats du Théorème 5 restent valables même si on suppose qu'il faut contrôler la norme dans F de tous les arguments x_i (au lieu d'un seul dans le Théorème 5), pourvu que l'influence de tous les termes sauf un ne soit que partielle :

Théorème 6. –

Les résultats du Théorème 5 restent valables sous l'hypothèse plus faible que, pour un $\theta \in]0, 1[$ et une constante C_1 , on a pour tous $x_1, \dots, x_k \in F$

$$\|T(x_1, \dots, x_k)\|_F \leq C_1 \min_{1 \leq i \leq k} (\|x_i\|_F \prod_{l \neq i} \|x_l\|_E + \sum_{j \neq i} \|x_i\|_F^\theta \|x_j\|_E^\theta \|x_i\|_E^{1-\theta} \|x_j\|_F^{1-\theta} \prod_{l \neq i, j} \|x_l\|_E)$$

La démonstration du théorème 6 suit le modèle du théorème 5. La principale difficulté est de justifier que z_n et w_n appartiennent bien à F . Cela se vérifie par le lemme suivant :

Lemme 3. –

Soient E et F deux espaces de Banach tels que F s'injecte continument dans E . Soit L un opérateur linéaire continu de E dans E et de F dans F tel que

- i) la norme d'opérateur de L sur E soit strictement plus petite que 1 : $\|Lx\|_E \leq A_1 \|x\|_E$ avec $A_1 < 1$
- ii) pour un $\theta \in]0, 1[$, L soit continu de $[F, E]_{\theta, 1}$ dans F : $\|Lx\|_F \leq A_2 \|x\|_F^{1-\theta} \|x\|_E^\theta$.

Alors $Id - L$ est inversible sur F . (Plus précisément, on a $\limsup_{k \rightarrow \infty} \|L^k\|_{\mathcal{L}(F, F)}^{\frac{1}{k}} \leq A_1$).

Démonstration du lemme 3. - Si $x \in E$, on a $(Id - L)^{-1}x = \sum_{k \in \mathbb{N}} L^k x$. Or, si $x \in F$, on a $\|L^{k+1}x\|_F = \|L(L^k x)\|_F \leq A_2 \|L^k x\|_F^{1-\theta} (A_1^k \|x\|_E)^\theta$. Si on choisit Γ assez grand pour que $A_2 \|x\|_E^\theta \leq A_1 \Gamma^\theta$ et $\|x\|_F \leq \Gamma$, on obtient par récurrence que $\|L^k x\|_F \leq \Gamma A_1^k$. En particulier, on a (si $\|x\|_E \leq A_3 \|x\|_F$) $\|L^k\|_{\mathcal{L}(F, F)} \leq (1 + A_3 (\frac{A_1}{A_2})^{\frac{1}{\theta}}) A_1^k$.

Démonstration du théorème 6. -

Comme pour le théorème 5, on considère d'abord la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = x_0 + T_k(a_n, \dots, a_n)$. On a

$$\begin{aligned} \|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F &= \|T_k(a_{n+1}, \dots, a_{n+1}) - T_k(a_n, \dots, a_n)\|_F \\ &\leq C_1 k (\|a_{n+1} - a_n\|_E \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F) (\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E))^{k-2} \\ &\quad + \|a_{n+1} - a_n\|_E^\theta \|a_{n+1} - a_n\|_F^{1-\theta} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)^\theta (\sup(\|a_n\|_E, \|a_{n+1}\|_E))^{k-1-\theta}) \end{aligned}$$

Or on sait que $\|a_n\|_E \leq R_k$ pour tout n et que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_E \leq \frac{2R_k}{k-1}$. Il existe donc une constante C_2 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \leq C_2 \left(\frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F) + \frac{1}{n^{2\theta}} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F)^\theta \|a_{n+1} - a_n\|_F^{1-\theta} \right).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_2(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|a_{n+2} - a_{n+1}\|_F \leq \epsilon \|a_{n+1} - a_n\|_F + D_2(\epsilon) \frac{1}{n^2} \sup(\|a_n\|_F, \|a_{n+1}\|_F).$$

On prend $\epsilon = 1/4$. Si $M_n = \sum_{l=1}^n \|a_l - a_{l-1}\|_F$ et $\frac{\omega_n = \|a_{n+1} - a_n\|_F}{M_{n+1}}$, on a

$$\omega_{n+1} \leq \frac{\omega_n}{4} + \frac{D_2}{n^2}.$$

Pour $n \geq 3$, on a donc $n^2 \omega_{n+1} \leq D_2 + \frac{9}{16} (n-1)^2 \omega_n$ et donc $\omega_{n+1} \leq \frac{\sup(16D_2/7, 4\omega_3)}{n^2} = \frac{E_2}{n^2}$. Cela donne $M_{n+2} \leq (1 - \frac{E_2}{n^2})^{-1} M_{n+1}$. On a donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} M_n < \infty$ et donc $\sup_{n \in \mathbb{N}} n^2 \|a_{n+1} - a_n\|_F < \infty$. Cela prouve que a_n converge dans F et donc que $x_\infty \in F$.

Pour estimer y_n , on écrit

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(y_n, \dots, y_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 k (\|y_n - x_\infty\|_E \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F) (\sup(\|y_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-2} \\ &\quad + \|y_n - x_\infty\|_E^\theta \|y_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta (\sup(\|y_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-1-\theta}) \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n \|y_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_3 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_3 \left(\frac{1}{n} \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F) + \frac{1}{n^\theta} \sup(\|y_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta \|y_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \right).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_3(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \epsilon \|y_n - x_\infty\|_F + D_3(\epsilon) \frac{1}{n} (\|y_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F).$$

On prend $\epsilon = 1/4$. On choisit alors $n_0 \geq 2$ tel que $\frac{D_3}{n_0} \leq \frac{1}{4}$ et on choisit Γ tel que $4D_3\|x_\infty\|_F \leq \Gamma$ et $n_0\|y_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|y_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{n}$.

Pour estimer z_n , on écrit

$$\begin{aligned} \|z_{n+1} - x_\infty\|_F &= \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\ &\leq \|T_k(z_n, \dots, z_n, z_{n+1}) - T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty)\|_F \\ &\quad + \|T_k(z_n, \dots, z_n, x_\infty) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 (\|z_{n+1} - x_\infty\|_E \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F) (\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-2} \\ &\quad + \|z_{n+1} - x_\infty\|_E^\theta \|z_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta} \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta (\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-1-\theta}) \\ &\quad + C_1 (k-1) (\|z_n - x_\infty\|_E \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F) (\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-2} \\ &\quad + \|z_n - x_\infty\|_E^\theta \|z_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta (\sup(\|z_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{k-1-\theta}) \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} n\|z_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_4 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_4 \left(\frac{\sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{n} + \left(\frac{\sup(\|z_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{n} \right)^\theta (\|z_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} + \|z_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta}) \right).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_4(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \epsilon (\|z_n - x_\infty\|_F + \|z_{n+1} - x_\infty\|_F) + D_4(\epsilon) \frac{1}{n} (\|z_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F).$$

On prend $\epsilon = 1/5$. On obtient alors

$$\|z_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{1}{4} \|z_n - x_\infty\|_F + \frac{5}{4} D_4 \frac{1}{n} (\|z_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$$

et on conclut comme pour la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Pour estimer w_n , on écrit

$$\begin{aligned} &\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \\ &= \|T_k(w_n, \dots, w_n) + DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq \|DT_k(w_n).(w_{n+1} - w_n)\|_F + \|T_k(w_n, \dots, w_n) - T_k(x_\infty, \dots, x_\infty)\|_F \\ &\leq C_1 k R_k^{k-2} \|w_n\|_F \|w_{n+1} - w_n\|_E + C_1 k R_k^{k-2} \min(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F) \|w_n - x_\infty\|_E \\ &\leq C_1 k R_k^{k-2} (\|w_{n+1} - w_n\|_E \|w_n\|_F + \|w_{n+1} - w_n\|_E^\theta \|w_{n+1} - w_n\|_F^{1-\theta} \|w_n\|_F^\theta \|w_n\|_F^{1-\theta}) \\ &\quad + C_1 k R_k^{k-2} (\|w_n - x_\infty\|_E \sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F) \\ &\quad + \|w_n - x_\infty\|_E^\theta \|w_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} \sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)^\theta (\sup(\|w_n\|_E, \|x_\infty\|_E))^{1-\theta}) \end{aligned}$$

Or on sait que $\limsup_{n \rightarrow \infty} 2^n \|w_n - x_\infty\|_E < \infty$. Il existe donc une constante C_5 qui ne dépend pas de n telle que

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq C_5 \left(\frac{\sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{2^n} + \left(\frac{\sup(\|w_n\|_F, \|x_\infty\|_F)}{2^n} \right)^\theta (\|w_n - x_\infty\|_F^{1-\theta} + \|w_{n+1} - x_\infty\|_F^{1-\theta}) \right).$$

En utilisant l'inégalité de Young, on voit que pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $D_5(\epsilon)$ qui ne dépend pas de n telle que

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \epsilon (\|w_n - x_\infty\|_F + \|w_{n+1} - x_\infty\|_F) + D_5(\epsilon) \frac{1}{2^n} (\|w_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F).$$

On prend $\epsilon = 1/5$. On obtient alors

$$\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{1}{4}\|w_n - x_\infty\|_F + \frac{5}{4}D_5 \frac{1}{2^n}(\|w_n - x_\infty\|_F + \|x_\infty\|_F)$$

et on conclut facilement : on choisit n_0 tel que $\frac{5}{4}D_5 \frac{1}{2^{n_0}} \leq \frac{1}{4}$ et on choisit Γ tel que $\frac{5}{4}D_5\|x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{4}$ et $2^{n_0}\|w_{n_0+1} - x_\infty\|_F \leq \Gamma$. Il est alors immédiat par récurrence que pour $n \geq n_0$ on a $\|w_{n+1} - x_\infty\|_F \leq \frac{\Gamma}{2^n}$.

8. Exemple.

Dans [2], Furioli, Lemarié-Rieusset, Zahrouni et Zhioua étudient la régularité des solutions de Koch et Tataru pour les équations de Navier-Stokes. Ils considèrent donc les équations suivantes sur $\vec{u}(t, x)$, $t \in]0, \infty[, x \in \mathbb{R}^3$:

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}), \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs de vecteurs à divergence nulle. La résolution du problème de Cauchy associé à la valeur initiale $\vec{u}_0$ revient à étudier les solutions de l'équation intégrale

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) ds.$$

On définit donc l'opérateur bilinéaire B par

$$B(\vec{u}, \vec{v})(t) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v}) ds.$$

Le résultat fondamental de Koch et Tataru [3] est alors le suivant :

Théorème 7. –

L'opérateur B est bilinéaire continu sur l'espace $E = \mathcal{E}^3$ où $\mathcal{E}$ est l'espace des fonctions f définies sur $]0, \infty[\times \mathbb{R}^3$ telles que :

- i) $\sqrt{t} f(t, x) \in L^\infty([0, \infty[\times \mathbb{R}^3)$
- ii) $\sup_{0 < t, x_0 \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{0 < s < t, |x - x_0| < \sqrt{t}} |f|^2 ds dx < \infty$
- iii) $\sup_{0 < t} \|f(t, \cdot)\|_{\dot{B}_{\infty}^{-1, \infty}} < \infty$.

Le problème de Cauchy sera alors bien posé si $\vec{u}_0$ vérifie la condition de Koch et Tataru : $e^{t\Delta} \vec{u}_0$ appartient à E avec une norme petite (Théorème 1). Si de plus $\vec{u}_0$ vérifie une condition d'intégrabilité ou de régularité, cette condition est préservée en tout temps (Théorèmes 5 et 6) : si $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}')^3$ vérifie la condition de Koch et Tataru et si $\vec{u}$ est la solution associée à $\vec{u}_0$, si de plus $\vec{u}_0$ appartient à l'un des espaces de Banach G suivants

- i) espace de Lebesgue $G = L^p, 1 \leq p \leq \infty$
 - ii) espace de Besov homogène $G = \dot{B}_p^{s, q}, 1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty, s > -1$
- alors si $\vec{u}_0 \in G^3$ on a $\vec{u} \in L^\infty([0, \infty[, G^3)$.

Dans [2], la démonstration de ce résultat de persistance de régularité passe par la démonstration que $\vec{u}_0$ et $\vec{u}$ appartiennent à un certain espace de Banach $F = X^3$:

i) Cas des espaces de Lebesgue :

Si $G = L^p$, on choisit $X = L^\infty([0, \infty[, L^p)$. Il suffit de remarquer qu'on a $\|fg\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_\infty$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. Il est alors immédiat que B est continu de $E \times F$ vers F et de $F \times E$ vers F . Par exemple, $\|B(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\|_p \leq C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s} \|\vec{\alpha}(s)\|_\infty \|\vec{\beta}(s)\|_p ds \leq C' \sup_{t>0} \sqrt{t} \|\vec{\alpha}(t)\|_\infty \sup_{t>0} \|\vec{\beta}(t)\|_p$.

ii) Cas des espaces singuliers ($G = \dot{B}_p^{s, q}, s < 0$) :

On choisit

$$X = \{f / t^{-s/2} f(t, x) \in L^q([0, \infty[, \frac{dt}{t}, L^p(dx))\}.$$

Il est encore facile de vérifier que B est continu de $E \times F$ vers F et de $F \times E$ vers F .

iii) Cas des espaces de régularité nulle ($G = \dot{B}_p^{s, q}, s = 0$) :

On remarque que $\dot{B}_p^{0,q} \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty} \subset \dot{B}_{2p}^{-1/2,\infty}$. On peut alors choisir $X = \{f / \sup_{t>0} t^{1/4} \|f(t, \cdot)\|_{2p} < \infty\}$.
iv) Cas des espaces réguliers ($G = \dot{B}_p^{s,q}, s > 0$) :
On choisit

$$X = L^\infty(]0, \infty[, \dot{B}_p^{s,q}).$$

On part de l'inégalité bien connue

$$\|fg\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_\infty + \|f\|_\infty \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}}.$$

Elle permet de démontrer que B est continue de $(E \cap F) \times (E \cap F)$ vers F . Mais pour appliquer le théorème 6, il faut affaiblir le rôle de la norme $\|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}}$. Pour cela, on montre dans [2] que, pour $s > 0$, si $s/(s+1) < \lambda < 1$, si $f \in \dot{B}_p^{s,q} \cap \dot{B}_\infty^{-1,\infty}$ et $g \in \dot{B}_p^{s,q} \cap L^\infty$, alors on peut décomposer fg en $fg = u + v$ où

$$\|u\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_1 \|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_\infty$$

et

$$\|v\|_{\dot{B}_p^{s-\lambda,q}} \leq C_2 (\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \|g\|_\infty)^{1-\lambda} (\|f\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}} \|g\|_{\dot{B}_p^{s,q}})^\lambda.$$

On obtient alors

$$\|B(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_3 A + C_4 B$$

avec

$$A = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{s} \|\vec{\alpha}(s)\|_\infty \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}} ds$$

et

$$B = \int_0^t (t-s)^{-1/2-\lambda/2} s^{-1/2+\lambda/2} \omega(s) ds$$

où

$$\omega(s) = \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{1/r} \|\vec{\beta}(s)\|_{\dot{B}_\infty^{-1,\infty}}^{1/r'} \|\vec{\alpha}(s)\|_{\dot{B}_p^{s,q}}^{1/r'} (\sqrt{s} \|\vec{\alpha}(s)\|_\infty)^{1/r},$$

$r = 1/(1-\lambda)$ et $r' = 1/\lambda$. D'où

$$\|B(\vec{\alpha}, \vec{\beta})\|_{\dot{B}_p^{s,q}} \leq C_5 (\|\vec{\alpha}\|_E \|\vec{\beta}\|_F + \|\vec{\beta}\|_F^{1/r} \|\vec{\beta}\|_E^{1/r'} \|\vec{\alpha}\|_F^{1/r'} \|\vec{\alpha}\|_E^{1/r}).$$

Références bibliographiques

- [1] Auscher, P. et Tchamitchian, P., Espaces critiques pour le système des équations de Navier–Stokes, Preprint, 1999.
- [2] Furioli, G., Lemarié-Rieusset, P.G., Zahrouni, E., et Zhioua, A., Un théorème de persistance de la régularité en norme d'espaces de Besov pour les solutions de Koch et Tataru des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$, C. R. Acad. Sci. Paris (Série I) 330 (2000) 339–342.
- [3] Koch, H. and Tataru, D., Well-posedness for the Navier–Stokes equations, Advances in Math. 157 (2001) 22–35.
- [4] Zahrouni E., Un théorème de régularité pour l'équation de Burgers généralisée, Preprint, Université de Monastir, 2001.