

Une remarque sur l'analyticité des solutions milds des équations de Navier–Stokes dans $\mathbb{R}^3$

Pierre Gilles LEMARIÉ-RIEUSSET

Département de mathématiques, Université d'Evry, boulevard F.-Mitterrand, 91025 Evry cedex, France
Courriel : lemarie@lami.univ-evry.fr

(Reçu le 15 septembre 1999, accepté après révision le 22 novembre 1999)

Résumé. Nous donnons une preuve élémentaire de l'analyticité en espace des solutions milds des équations de Navier–Stokes sur $\mathbb{R}^3$. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

On the analyticity of mild solutions for the Navier–Stokes equations in $\mathbb{R}^3$

Abstract. We give a simple proof that mild solutions for the Navier–Stokes equations on $\mathbb{R}^3$ are spatial analytic. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

En 1989, Foias et Temam [4] ont montré l'analyticité en temps des solutions fortes périodiques des équations de Navier–Stokes. Leur démonstration reposait sur le lemme suivant :

LEMME 1. – Si $e^{-\tau\sqrt{-\Delta}}$ est défini par $e^{-\tau\sqrt{-\Delta}}(\sum_{k \in \mathbb{Z}^3} a_k e^{ik \cdot x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^3} a_k e^{-\tau|k|_2} e^{ik \cdot x}$ (où $|k|_2 = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{1/2}$), alors pour $\tau > 0$, $\vec{u}, \vec{v} \in (H^2(\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3))^3$ on a $(e^{-\tau\sqrt{-\Delta}}\vec{u}) \cdot \vec{\nabla}(e^{-\tau\sqrt{-\Delta}}\vec{v}) = e^{-\tau\sqrt{-\Delta}}\vec{w}$ avec $\vec{w} \in (L^2(\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3))^3$.

De ce lemme, ils déduisaient que les solutions périodiques (en espace) des équations de Navier–Stokes sur $\mathbb{R}^3$:

$$\partial_t \vec{u} = \Delta \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) - \vec{\nabla} p, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \quad (1)$$

vérifiaient (lorsque $\vec{u} \in C([0, T], (H^2(\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3))^3)$) que $\vec{u} = e^{-\sigma\sqrt{-\Delta}}\vec{v}$ avec $\sigma > 0$ et $\vec{v} \in C([0, T], (H^2(\mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3))^3)$. On en déduit immédiatement que $\vec{u}(t, \cdot)$ est analytique en espace et admet un prolongement holomorphe à la bande $\{(x + iy) \in \mathbb{C}^3 \mid |y|_2 < \sigma\sqrt{t}\}$.

Nous noterons maintenant $|x|$ pour $|x|_2$, sauf lorsque nous voudrions insister sur le choix spécifique de la norme sur $\mathbb{R}^3$.

En 1998, Grujić et Kukavica [6] ont de même estimé le rayon d'analyticité spatiale des solutions en fonction de la norme L^p de la donnée initiale. Cependant, ils ont renoncé à estimer la norme d'analyticité $\|e^{\sigma\sqrt{-\Delta}}\vec{u}\|$ de la solution, en qualifiant la méthode de Foias et Temam de « méthode d'espace de Hilbert » inadaptée à L^p .

Note présentée par Yves MEYER.

Dans cette Note, nous montrons que la méthode de Foias et Temam, une fois retranscrite dans le langage des solutions milds de Kato [7], s'adapte en fait relativement bien au cas $L^p(\mathbb{R}^3)$. Suivant Kato, nous considérons donc le problème intégral associé à la donnée initiale $\vec{u}_0$:

$$\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds, \quad (2)$$

où $\mathbb{P}$ est le projecteur orthogonal sur les champs de vecteurs à divergence nulle et $\vec{u}_0$ est la valeur initiale de $\vec{u}$ en $t = 0$. Nous réécrivons (2) en $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - B(\vec{u}, \vec{u})$, où B est défini par :

$$B(\vec{u}, \vec{v}) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{v}) \, ds. \quad (3)$$

Plus précisément, nous étudions les solutions qui se construisent comme les limites du processus récursif défini par $\vec{u}^{(0)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0$ et $\vec{u}^{(n+1)} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - B(\vec{u}^{(n)}, \vec{u}^{(n)})$.

Une approche élémentaire de ce problème est alors la suivante :

PROPOSITION 1. – Soit $\mathcal{F}$ un espace de Banach de fonctions définies sur $]0, T^*[\times \mathbb{R}^3$ tel que l'opérateur bilinéaire B agisse continûment sur $\mathcal{F}^3$. On associe à $\mathcal{F}$ l'espace E défini par $f \in E$ si et seulement si $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et $(e^{t\Delta} f)_{0 < t < T^*} \in \mathcal{F}$. Alors, il existe une constante strictement positive $C_{\mathcal{F}}$ telle que pour tout $\vec{u}_0 \in E^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$ et $\|(e^{t\Delta} \vec{u}_0)_{0 < t < T^*}\|_{\mathcal{F}} < C_{\mathcal{F}}$, il existe une solution $\vec{u} \in \mathcal{F}^3$ des équations de Navier–Stokes associées à la valeur initiale $\vec{u}_0$: $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds$.

De nombreux exemples ont été donnés de tels espaces $\mathcal{F}$ et de leurs associés E . Par exemple :

- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_b([0, T^*[, \dot{H}^{1/2}) \cap L^2([0, T^*[, \dot{H}^{3/2}), E = \dot{H}^{1/2}$ (Kato et Fujita [5], Chemin [3]) ;
- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_b([0, T^*[, L^3) \cap \{f(t, x) \mid \sup_{0 < t < T^*} t^{1/2} \|f(t, \cdot)\|_{\infty} < \infty, \lim_{t \rightarrow 0} t^{1/2} \|f(t, \cdot)\|_{\infty} = 0\}$, $E = L^3$ (Kato [7]) ;
- $\mathcal{F} = \mathcal{C}_b([0, \infty[, L^3) \cap \{f(t, x) \mid \sup_{t \geq 0} \|f(t, \cdot)\|_{\infty} < \infty\}$, $E = L^3$ (Calderón [1] et Cannone [2]) ;
- $\mathcal{F} = \{f(t, x) \mid \sup_{t > 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{f}(t, \xi)| < \infty\}$, $E = \{f(x) \mid \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)| < \infty\}$ (Le Jan et Sznitman [9]) ;
- $\mathcal{F} = \{f(t, x) \mid \sup_{t > 0} t^{1/2} \|f(t, \cdot)\|_{\infty} < \infty \text{ et } \sup_{0 < t, x_0 \in \mathbb{R}^3} \frac{1}{t^{3/2}} \int \int_{0 < s < t, |x-x_0| < \sqrt{t}} |\vec{u}|^2 \, ds \, dx < \infty\}$, $E = \{f(x) \mid \exists f_1, f_2, f_3 \in \text{BMO}, f = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} f_j\}$ (Koch et Tataru [8]).

La démonstration de Le Jan et Sznitman est particulièrement simple. Elle repose sur les trois lemmes élémentaires suivants (en notant $\widehat{f}(\xi)$ la transformée de Fourier de $f(x)$: $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} f(x) e^{-ix \cdot \xi} \, dx$) :

LEMME 2. – Si $\vec{w} = B(\vec{u}, \vec{v})$, on a $|\widehat{w}(t, \xi)| \leq C_1 |\xi| \int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} |\widehat{u}(s, \xi)| * |\widehat{v}(s, \xi)| \, ds$.

LEMME 3. – Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|\xi - \eta|^2} \frac{1}{|\eta|^2} \, d\eta \leq C_2 \frac{1}{|\xi|}$.

LEMME 4. – Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, $\int_0^t e^{-(t-s)|\xi|^2} \, ds \leq C_3 \frac{1}{|\xi|^2}$.

Cette démonstration s'adapte immédiatement pour montrer que les solutions obtenues sont en fait très régulières, les hautes fréquences disparaissant à une vitesse exponentielle :

THÉORÈME 1. – Il existe une constante strictement positive C_4 telle que pour tout $\vec{u}_0 \in (\mathcal{S}')^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\widehat{\vec{u}_0}(\xi)$ localement intégrable et $\sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}_0}(\xi)| < C_4$, il existe une solution $\vec{u}$ des équations de Navier–Stokes associées à la valeur initiale $\vec{u}_0$: $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) \, ds$ qui vérifie

$$\sup_{t > 0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t} |\xi|} |\xi|^2 |\widehat{\vec{u}}(t, \xi)| < \infty. \quad (4)$$

Démonstration. – Il suffit de démontrer que B est continu sur $\mathcal{F}^3$, où $\mathcal{F}$ est défini par $\mathcal{F} = \{f(t, x) \mid \sup_{t>0} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^3} e^{\sqrt{t}|\xi|} |\hat{f}(t, \xi)|^2 < \infty\}$. Pour cela, on transforme le lemme 2 en le lemme suivant :

LEMME 5. – Si $\vec{w} = B(\vec{u}, \vec{v})$, et si $\vec{u}(t, \cdot) = e^{-\sqrt{-t\Delta}} \vec{U}$ et $\vec{v}(t, \cdot) = e^{-\sqrt{-t\Delta}} \vec{V}$, alors $\vec{w}(t, \cdot) = e^{-\sqrt{-t\Delta}} \vec{W}$ avec $|\widehat{W}(t, \xi)| \leq C_5 |\xi| \int_0^t e^{-(t-s)/2} |\widehat{U}(s, \xi)| * |\widehat{V}(s, \xi)| ds$.

Pour démontrer ce lemme, on se ramène à montrer, pour $0 < s < t$ et $\xi, \eta \in \mathbb{R}^3$, l'inégalité suivante (dans l'esprit de Foias et Temam) :

$$e^{-(t-s)|\xi|^2} e^{-\sqrt{s}|\xi-\eta|} e^{-\sqrt{s}|\eta|} \leq e^2 e^{-\sqrt{t}|\xi|} e^{-(t-s)/2|\xi|^2}. \quad (5)$$

Passant aux logarithmes, et utilisant l'inégalité triangulaire $-\sqrt{s}|\xi-\eta| - \sqrt{s}|\eta| \leq -\sqrt{s}|\xi|$, on se ramène à montrer que $I = -(t-s)/2|\xi|^2 + (\sqrt{t} - \sqrt{s})|\xi| \leq 2$. On factorise I en

$$I = (\sqrt{t} - \sqrt{s})|\xi|(1 - (\sqrt{t} + \sqrt{s})|\xi|/2).$$

Si $\sqrt{t}|\xi| \geq 2$, on a $I \leq 0 < 2$, tandis que si $\sqrt{t}|\xi| < 2$, on a $I \leq \sqrt{t}|\xi| < 2$.

Une fois (5) démontrée, il suffit d'appliquer les lemmes 3 et 4 pour démontrer le théorème. $\square$

La démonstration que nous venons de donner se généralise sans problème particulier au cas d'une donnée initiale dans $\dot{H}^{1/2}$ de petite norme :

THÉORÈME 2. – Il existe une constante strictement positive C_6 telle que pour tout $\vec{u}_0 \in (S')^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\widehat{u}_0(\xi)$ localement intégrable et $\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < C_6$, il existe une solution $\vec{u}$ des équations de Navier–Stokes associées à la valeur initiale $\vec{u}_0 : \vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) ds$ qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| \left(\sup_{t>0} e^{\sqrt{t}|\xi|} |\widehat{u}(t, \xi)| \right)^2 d\xi < \infty. \quad (6)$$

Démonstration. – Dans ce cas, il suffit de démontrer que B est continu sur $\mathcal{F}^3$, où $\mathcal{F}$ est défini par $\mathcal{F} = \{f(t, x) \mid \int_{\mathbb{R}^3} |\xi| (\sup_{t>0} e^{\sqrt{t}|\xi|} |\widehat{f}(t, \xi)|)^2 d\xi < \infty\}$. On applique le lemme 5. Le lemme 4 donne alors qu'on est ramené à l'estimation $\int \frac{|U*V|^2}{|\xi|} d\xi \leq C_7 \left(\int |\xi| |U(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int |\xi| |V(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}$ qui est immédiate puisque $\dot{H}^{1/2} \subset L^3$ et donc $\dot{H}^{1/2} \cdot \dot{H}^{1/2} \subset L^{3/2} \subset \dot{H}^{-1/2}$. $\square$

Le cas de solutions locales se traite de manière presque aussi immédiate, en adaptant la démonstration de Cannone [2] sur l'existence de solutions locales :

THÉORÈME 3. – Pour tout $\vec{u}_0 \in (S')^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, $\widehat{u}_0(\xi)$ localement intégrable et $\int_{\mathbb{R}^3} |\xi| |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \infty$, il existe $T > 0$ et une solution $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T], (\dot{H}^{1/2})^3)$ des équations de Navier–Stokes associées à la valeur initiale $\vec{u}_0 : \vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) ds$ qui vérifie $\widehat{u} = e^{-\sqrt{t}|\xi|} \widehat{v}$ avec $\vec{v} \in \mathcal{C}([0, T], (\dot{H}^{1/2})^3)$, $t^{1/8} \widehat{v} \in L^\infty([0, T], (L^{4/3})^3)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1/8} \|\widehat{v}(t, \cdot)\|_{4/3} = 0$.

Démonstration. – On définit $\mathcal{F}_T$ par $f \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si $t^{1/8} e^{\sqrt{t}|\xi|} \widehat{f} \in L^\infty([0, T], L^{4/3})$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1/8} \|e^{\sqrt{t}|\xi|} \widehat{f}(t, \cdot)\|_{4/3} = 0$. Alors l'inégalité (5) et le fait que $L^{4/3} * L^{4/3} \subset L^2$ donnent $\|e^{-\sqrt{-t\Delta}} B(\vec{u}, \vec{v})\|_{\mathcal{F}_T} \leq C_8 \sup_{0 < t < T} t^{1/8} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{7/8}} \frac{1}{s^{1/4}} ds \|\vec{u}\|_{\mathcal{F}_T} \|\vec{v}\|_{\mathcal{F}_T} = C_9 \|\vec{u}\|_{\mathcal{F}_T} \|\vec{v}\|_{\mathcal{F}_T}$ ainsi que $\sup_{0 < t < T} \|e^{-\sqrt{-t\Delta}} B(\vec{u}, \vec{v})\|_{\dot{H}^{1/2}} \leq C_{10} \sup_{0 < t < T} \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/4}} \frac{1}{s^{1/4}} ds \|\vec{u}\|_{\mathcal{F}_T} \|\vec{v}\|_{\mathcal{F}_T} = C_{11} \|\vec{u}\|_{\mathcal{F}_T} \|\vec{v}\|_{\mathcal{F}_T}$. Les constantes C_9 et C_{11} ne dépendent pas de T . Pour conclure, il suffit de remarquer que $\lim_{T \rightarrow 0} \|e^{t\Delta} \vec{u}_0\|_{\mathcal{F}_T} = 0$ pour tout $\vec{u}_0 \in (\dot{H}^{1/2})^3$. $\square$

Nous pouvons maintenant passer au cas d'une donnée L^p ($p \geq 3$). Si on essaye de calquer la démonstration précédente dans le cas de L^3 (le plus compliqué), on définit $\mathcal{F}_T$ par $f \in \mathcal{F}_T$ si et seulement si $t^{1/8} e^{\sqrt{-t}\Delta} f \in L^\infty([0, T], L^4)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1/8} \|e^{\sqrt{-t}\Delta} f(t, \cdot)\|_4 = 0$. L'équivalent de l'inégalité (5) serait d'estimer la norme L^2 de $A_t(f, g) = e^{\sqrt{-t}\Delta}(e^{-\sqrt{-t}\Delta} f \cdot e^{-\sqrt{-t}\Delta} g)$ en fonction des normes L^4 de f et de g . L'opérateur A_t est un opérateur bilinéaire et son symbole $\alpha_t(\xi, \eta)$ défini par $A_t(f, g)(x) = \int \int e^{ix \cdot (\xi + \eta)} \alpha_t(\xi, \eta) \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\eta) d\xi d\eta$ vaut $\alpha_t(\xi, \eta) = e^{t|\xi + \eta| - t|\xi| - t|\eta|}$. Nous ne savons pas prouver la continuité de A_t de $L^4 \times L^4$ vers L^2 . Mais la situation est beaucoup plus simple si nous utilisons la norme $|\xi|_1 = |\xi_1| + |\xi_2| + |\xi_3|$ au lieu de $|\xi| = |\xi|_2$. On notera Λ l'opérateur linéaire de symbole $|\xi|_1$. Le résultat obtenu est alors :

THÉORÈME 4. – *Pour tout $p \geq 3$ et $\vec{u}_0 \in (L^p)^3$ vérifiant $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}_0 = 0$, il existe $T > 0$ et une solution $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T], (L^p)^3)$ des équations de Navier–Stokes associées à la valeur initiale $\vec{u}_0$: $\vec{u} = e^{t\Delta} \vec{u}_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{u}) ds$ qui vérifie $\vec{u} = e^{-\sqrt{t}\Lambda} \vec{v}$ avec $\vec{v} \in \mathcal{C}([0, T], (L^p)^3)$.*

De plus, si $p = 3$ et si la norme de $\vec{u}_0$ dans L^3 est assez petite, cette solution est globale ($T = \infty$).

Démonstration. – On considère le cas $p = 3$. L'opérateur $e^{t\Delta/2 + \sqrt{t}\Lambda}$ est continu (uniformément par rapport à t) sur L^p pour $1 < p < \infty$ (c'est le produit tensoriel de trois opérateurs monodimensionnels de symboles $e^{-t\xi_j^2/2 + \sqrt{t}|\xi_j|}$, $j = 1, 2, 3$, qui sont des opérateurs de Calderón–Zygmund sur $\mathbb{R}$). On peut donc considérer l'espace $\mathcal{G}_T$ défini par $f \in \mathcal{G}_T$ si et seulement si $t^{1/8} e^{\sqrt{t}\Lambda} f \in L^\infty([0, T], L^4)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{1/8} \|e^{\sqrt{t}\Lambda} f(t, \cdot)\|_4 = 0$. Il s'agit alors d'estimer la norme L^2 de $B_t(f, g) = e^{\sqrt{t}\Lambda}(e^{-\sqrt{t}\Lambda} f \cdot e^{-\sqrt{t}\Lambda} g)$ en fonction des normes L^4 de f et de g . L'opérateur B_t est un opérateur bilinéaire de symbole $\beta_t(\xi, \eta) = e^{t|\xi + \eta|_1 - t|\xi|_1 - t|\eta|_1}$. C'est à nouveau un produit tensoriel d'opérateurs monodimensionnels et nous sommes donc ramenés à étudier sur $L^p(\mathbb{R})$ l'opérateur bilinéaire de symbole $\sigma(\xi, \eta) = e^{t|\xi + \eta|_1 - t|\xi|_1 - t|\eta|_1}$; on découpe alors σ en $\sigma(\xi, \eta) = \sum_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{-1, 1\}^3} \sigma(\xi, \eta) 1_{\varepsilon_1 \xi > 0} 1_{\varepsilon_2 \eta > 0} 1_{\varepsilon_3(\xi + \eta) > 0}$ et chacun des huit termes de la somme s'exprime simplement à l'aide de la transformation de Hilbert agissant sur f, g ou fg et de convoluteurs intégrables. Il reste à étudier l'action de $e^{(t-s)\Delta} e^{(\sqrt{t} - \sqrt{s})\Lambda}$. On factorise en $e^{(t-s)\Delta/2} e^{(t-s)\Delta/2} e^{(\sqrt{t} - \sqrt{s})\Lambda} = e^{(t-s)\Delta/2} A_{t,s}$. $A_{t,s}$ est un produit tensoriel d'opérateurs de Calderón–Zygmund monodimensionnels, et on vérifie que les opérateurs $A_{t,s}$, $0 < s < t$ sont équicontinus sur L^p pour $1 < p < \infty$. Enfin, on peut utiliser les estimations de régularité $L^p - L^q$ sur le noyau de la chaleur $e^{(t-s)\Delta/2}$ pour conclure. $\square$

Le théorème 4 entraîne l'analyticité en espace des solutions. Un argument de compacité permet de vérifier que si $\vec{u} \in \mathcal{C}([0, T], (L^3)^3)$, alors $\vec{u}(t, \cdot)$ est analytique en espace pour tout $0 < t \leq T$.

Références bibliographiques

- [1] Calderón C., Initial values of Navier–Stokes equations, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 761–766.
- [2] Cannone M., Ondelettes, Paraproducts et Navier–Stokes, Diderot Editeur, Paris, 1995.
- [3] Chemin J.-M., Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier–Stokes incompressible, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992) 20–28.
- [4] Foias C., Temam R., Gevrey class regularity for the solutions of the Navier–Stokes equations, J. Funct. Anal. 87 (1989) 359–369.
- [5] Fujita H., Kato T., On the Navier–Stokes initial value problem, I, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964) 269–315.
- [6] Grujić Z., Kukavica I., Space analyticity for the Navier–Stokes and related equations with initial data in L^p , J. Funct. Anal. 152 (1998) 247–466.
- [7] Kato T., Strong L^p solutions of the Navier–Stokes equations in $\mathcal{R}^m$ with applications to weak solutions, Math. Z. 187 (1984) 471–480.
- [8] Koch H., Tataru D., Well-posedness for the Navier–Stokes equations, Preprint, 1999.
- [9] Le Jan Y., Sznitman A.A.S., Cascades aléatoires et équations de Navier–Stokes, C. R. Acad. Sci. Paris Série I 324 (1997) 823–826.