M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2008-2009
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Mars 2009
Sans documents

Rappels:

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, sur lequel est contruit un mouvement Brownien W. Dans un marché financier, comportant un actif sans risque, de taux r constant et un actif risqué de dynamique
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)\,,$$
l'unique probabilité $\mathbb{Q}$ telle que $(\widetilde{S}_t = S_t e^{-rt}, t \geq 0)$ soit une $\mathbb{Q}$-martingale est donnée par
$$dQ|_{\mathcal{F}_t} = \zeta_t d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t},$$
avec
$$d\zeta_t = -\zeta_t \theta dW_t,\ \zeta_0 = 1 \tag{1}$$
et $\theta = (\mu - r)\sigma^{-1}$. Cette probabilité est la mesure martingale équivalente. On notera $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la filtration naturelle de W (qui est aussi celle de S). Dans ce modèle, que l'on appelle modèle Black et Scholes, le prix à la date t d'une option européenne de strike K et maturité T est $\mathcal{BS}(t, S_t; \sigma)$ avec
$$\mathcal{BS}(t, x; \sigma) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$
avec
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, sur lequel sont contruits deux mouvements Browniens indépendants B et W de filtration naturelle $\mathbb{F}$. Alors, toute $\mathbb{F}$ martingale M strictement positive s'écrit
$$dM_t = M_t(\varphi_t dB_t + \gamma_t dW_t) \tag{2}$$
où φ et γ sont deux processus $\mathbb{F}$-adaptés.

****

1. On considère un modèle Black et Scholes. On utilise les notations des rappels.
   (a) Expliciter ζ_t donné en (1).
   (b) Quelle est la dynamique de $\widetilde{S}$ sous $\mathbb{P}$ et sous $\mathbb{Q}$?
   (c) Calculer, pour tout couple (s, t) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t|\mathcal{F}_s)$ et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_t|\mathcal{F}_s)$.
   (d) On note $Y_t = \int_0^t S_u du$.
      - Quel est le prix, à la date t du payoff Y_T (versé en T)?
      - Expliciter la stratégie de couverture de Y_T
      - On considère le payoff $h(Y_T, S_T)$, versé en T, où h est une fonction borélienne (bornée)
        – Montrer que le prix à la date t de $h(Y_T, S_T)$ s'écrit $\varphi(t, Y_t, S_t)$ et montrer comment obtenir $\varphi(t, y, x)$ par un calcul d'espérance (non conditionnelle)
        – Quelle est l'EDP satisfaite par φ?
        – Déterminer la stratégie de couverture associée.
   (e) On considère c et π deux processus adaptés et $X^{\pi,c}$ la solution de
$$dX_t = rX_t dt + \pi_t(dS_t - rS_t dt) - c_t dt, \quad X_0 = x$$
      - Montrer que $(e^{-rt}X_t + \int_0^t e^{-rs}c_s ds, t \geq 0)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

- Montrer que, pour $t < T$,

$$\begin{aligned} X_t e^{-rt} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T e^{-rT} + \int_t^T e^{-rs} c_s ds | \mathcal{F}_t) \\ X_t e^{-rt} \zeta_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_T e^{-rT} \zeta_T + \int_t^T \zeta_s e^{-rs} c_s ds | \mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

- Soit ψ et ϑ deux processus adaptés. On souhaite que les relations $\pi_t = \psi_t X_t$ et $c_t = \vartheta_t X_t$ soient satisfaites. Quelle sera dans ce cas la solution $X_t^{\pi,c}$ (l'expliciter en terme des processus ψ, ϑ, W)?.
- On admet que le processus X représente la richesse d'un agent financier investissant π sur l'actif risqué et consommant $c_t dt$ durant l'intervalle de temps $t, t+dt$. Montrer, en utilisant cette interprétation que pour obtenir une richesse terminale (en T) positive et avoir une consommation positive, l'agent doit avoir une richesse initiale positive et que sa richesse sera positive à chaque instant t.

2. On considère un marché financier où sont négociés un actif sans risque de prix S_t^0, de taux déterministe $(r(t), t \geq 0)$, soit

$$dS_t^0 = S_t^0 r(t) dt, \quad S_0^0 = 1$$

et un actif de prix de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \Sigma(t) dB_t) \tag{3}$$

où Σ est une fonction déterministe.

   (a) Quelle est la solution de (3)?

   (b) Quelle est, dans ce modèle où le taux n'est pas constant, la définition d'une m.m.e.? Déterminer la m.m.e. $\mathbb{Q}$. Quelle est la dynamique de S sous $\mathbb{Q}$?

   (c) Soit $\Phi(t, S_t, \Sigma)$ le prix d'une option européenne de strike K sur le sous jacent S. Montrer que Φ s'exprime facilement en fonction de $\mathcal{BS}(t, S_t; \sigma)$ et de Σ.

3. On considère un marché financier où sont négociés un actif sans risque de prix S_t^0, de taux déterministe $(r(t), t \geq 0)$ et un actif risqué de prix de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t dW_t)$$

où

$$d\sigma_t = \sigma_t(\alpha dt + \beta dB_t)$$

avec μ, α et β constants, B étant un mouvement Brownien indépendant de W.

   (a) Quelle est la solution de (2) dans le cas $M_0 = 1, \varphi = 0$? Quelle est la solution de (2) dans le cas $M_0 = 1$?

   (b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{Q}$ des mesures martingales équivalentes (seuls S^0 et S sont des prix). Montrer en particulier que $\mathcal{Q}$ est décrit en fonction d'un processus γ arbitraire.

   (c) Soit $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Préciser quelle est la dynamique de S et celle de σ sous $\mathbb{Q}$.

   (d) Le marché est-il sans arbitrage? complet? Peut on couvrir $\int_0^T S_u du$?

   (e) Soit $\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}$. Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_T)$. Montrer que le calcul de $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((S_T - K)^+)$ peut se faire à partir de la fonction $\mathcal{BS}$.