M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2006-2007
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Mars 07

Dans tous les exercices, W est un mouvement Brownien. *Vous devez répondre aux 3 premières questions sans documents durant la première heure. Ensuite, vous passez à la suite, avec documents.*

1. *DANS CETTE QUESTION, des réponses fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisé.* Donner la définition d'une mesure martingale équivalente (mme). Enoncer ses propriétés. Comment évaluer un produit dérivé en utilisant la mme. Liens entre l'existence de mme et marché complet, marché sans arbitrage.

2. Expliciter la solution de
$$dX_t = X_t(tdt + e^t dW_t),\ X_0 = 1$$
On pourra donner la solution sans faire de calculs intermédiaires, car des calculs de ce type ont été souvent effacués en cours, ou trouver de l'aide en introduisant le processus $Y_t = X_t e^{-t^2/2}$.

3. Montrer que, si M est une martingale continue, le processus Z défini par
$$Z_t = (M_t - a\langle M\rangle_t)\ \exp(aM_t - \frac{1}{2}a^2\langle M\rangle_t)$$
est une martingale locale. On pourra se limiter au cas $M_t = m + \int_0^t \theta_s dW_s$). Si Z est une martingale, quelle est son espérance? Quel est le crochet de M? Quel est le processus croissant A tel que $Z_t^2 - A_t$ est une martingale (locale)?

****
****

4. Soit Y un processus continu nul en 0 tel que $Y_t = M_t + A_t$ où M est une martingale continue et A un processus croissant que l'on supposera absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e., de la forme $A_t = \int_0^t a_s ds$ (on parlera de décomposition additive). On pourra se contenter d'étudier le cas
$$Y_t = \int_0^t y_s dW_s + \int_0^t a_s ds\,.$$
On souhaite montrer qu'il existe une martingale locale continue μ et un processus croissant α tels que $Y_t = \mu_t \alpha_t$
   (a) Montrer que Y est une sur-martingale ou une sous martingale.
   (b) En supposant l'existence du couple μ, α, écrire la dynamique de Y en fonction de μ et de α.
   (c) En utilisant la décomposition additive de Y, en déduire une ED vérifiée par α du type
$$d\alpha_t = \alpha_t f_t dt$$
   où f_t est un processus que l'on explicitera en fonction de Y et de a.
   (d) Montrer l'existence d'un couple (μ, α)

5. Soit r un processus vérifiant
$$dr_t = adt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t,\ r_0 = x$$
Soit $0 < \alpha < x < \beta$ donnés. On suppose qu'il existe V telle que $\frac{1}{2}\sigma^2 rV''(r) + aV'(r) = 0$ pour $\alpha < r < \beta$ et $V(\beta) = 1,\ V(\alpha) = 0$. On note $T_y = \inf\{t \geq 0 \,:\, r_t = y\}$.
   (a) Ecrire la dynamique de $Y_t = V(r_t)$.
   (b) En admettant que les martingales locales qui apparaissent sont des martingales uniformément intégrables, calculer $E(V(r_{T_\alpha \wedge T_\beta}))$ en fonction de $V(x)$.
   (c) Exprimer $P(T_\beta < T_\alpha)$ en fonction de $V(x)$.

6. Soit $dX_t = (a+bX_t)dt + \sqrt{\sigma+\theta X_t}dW_t$. On admet que les coefficients constants a, b, σ, θ sont tels que cette équation a une solution.

   (a) Justifier que, pour $t < T$ et λ réel, $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2}X_T}|F_t^W) = \psi(t, X_t)$ pour une fonction ψ que l'on supposera de classe $C^{1,2}$. Montrer que le calcul de $E(e^{-\frac{\lambda^2}{2}X_T})$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord. On ne demande pas la résolution de l'EDP.

   (b) Montrer que le calcul de $E(\exp(-\frac{\lambda^2}{2}X_T - \mu\int_0^T X_s ds))$ peut se ramener à la recherche de la solution d'une EDP dont on précisera les conditions au bord.

7. Soit

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t(rdt + \sigma_t d\widehat{B}_t) \quad (1) \\ d\sigma_t &= \sigma_t(kdt + \gamma dW_t) \quad (2) \end{aligned}$$

   la dynamique du prix d'un actif de volatilité stochastique. On suppose les MB B et W indépendants. On admet que les deux dynamiques sont des dynamiques risques neutres. Comment calculer le prix d'une option Européenne de strike K.

8. Soit $\mathbf{F}$ une filtration donnée, U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, A un processus $\mathbf{F}$-adapté, décroissant, tel que $A_0 = 1, A_\infty = 0$ et $\tau = \inf\{t \ : \ A_t < U\}$

   (a) Calculer le prix d'un actif versant $X \in \mathcal{F}_T$
   a la date T s'il n'y a pas eu défaut et versant $R(\tau)$ en τ s'il y a eu défaut, lorsque le taux d'intérêt est constant, égal à r.

   (b) On suppose qu'il y a deux défauts arrivant en τ_i $\tau_i = \inf\{t \ : \ A_t^i < U_i\}$, où les U_i sont indépendantes. Comment calculer le prix d'un first-to-defaut, s'est à dire le prix d'un actif qui verse X s'il n y a eu aucun défaut, et $R(\tau)$ si $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$, en τ, si $\tau < T$?