M2 Ingéniérie financière. Université d'EVRY 2008-2009
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 2008

Dans tous les exercices, W est un mouvement Brownien unidimensionnel construit sur un espace $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle.

1. *Dans cette question, des réponses grossiérement fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisés.* Donner la définition d'une mesure martingale équivalente (mme). Enoncer ses propriétés. Liens entre l'existence de mme et marché complet, marché sans arbitrage. Comment évaluer un produit dérivé en utilisant une mme.

2. On considère un marché financier où deux actifs sont négociés: un actif sans risque, de taux constant r, un actif risqué dont le prix S suit la dynamique

$$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dW_t)$$

les coefficients μ et σ étant des fonctions déterministes.

   (a) Ecrire la valeur de S_t en fonction de S_0, des fonctions μ, σ, et du MB W.
   (b) Déterminer le(s) mesure(s) martingale(s) équivalente(s).
   (c) Justifier que ce marché est complet, sans arbitrage.
   (d) On considère l'actif contingent versant $h(S_T)$ à la date T, où h est une fonction (déterministe).
      i. Quel est le prix de cet actif à la date t? Montrer que ce prix peut être obtenu sous forme d'une intégrale dt́erministe.
      ii. Ecrire l'EDP d'évaluation.
      iii. Comment couvrir cet actif en utilisant l'actif sans risque et l'actif S? Expliquer en particulier comment déterminer le nombre de parts d'actifs S et le montant de cash (on ne demande pas de calcul explicite)
      iv. Comment calculerait-on $\mathbb{P}(h(S_T) < a)$ dans le cas h croissante?
      v. Quels seraient les modifications à apporter si r est une fonction déterministe? un processus?
   (e) On se place dans le cas $h(x) = x^2$. Expliciter le prix à la date t et le portefeuille de couverture. Même question pour $h(x) = ax + b$ où a et b sont des constantes.
   (f) Quelle serait la richesse d'un agent qui détiendrait à chaque instant t, un nombre de parts d'actif risqué égal à t, en utilisant une stratégie autofinançante
   (g) Quelle serait la richesse terminale (à l'instant T) d'un agent de richesse initiale x qui souhaite avoir un montant de cash égal à $(T-t)x$ à chaque instant t en utilisant une stratégie autofinançante (on donnera le résultat sous forme d'un intégrale stochastique dont tous les coefficients sont explicites)

3. Formules de parité:
Soit S le prix d'un actif versant des dividendes. Sa dynamique **risque neutre** est

$$dS_t = S_t((r-\delta)dt + \sigma dW_t), \ S_0 = x$$

Soit $C_{fi}^{Asian} = C_{fi}^{Asian}(S_0, K; r, \delta)$ (resp. P_{fi}^{Asian}) le prix d'un call (resp. d'un put) Asiatique avec un prix d'exercice K **fi**xé, dont le payoff est $(\frac{1}{T}A_T - K)^+$ (resp. $(K - \frac{1}{T}A_T)^+$) et $C_{f\ell}^{Asian} = C_{f\ell}^{Asian}(S_0, \lambda; r, \delta)$ le prix d'un call Asiatique de prix d'exercice **fl**otant, de payoff $(\lambda S_T - \frac{1}{T}A_T)^+$ où $A_t = \int_0^t S_s ds$. Montrer que

$$C_{f\ell}^{Asian}(S_0, \lambda; r, \delta) = P_{fi}^{Asian}(\lambda S_0, S_0; \delta, r)$$

$$C_{fi}^{Asian}(S_0, K; r, \delta) = P_{f\ell}^{Asian}(K/S_0, S_0; , \delta, r)$$

On pourra utiliser un changement de numéraire

4. Soit R le processus solution (on admet que cette solution existe) de

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + dW_t, \; R_0 = 1 \,.$$

   (a) Montrer que $Z_t = \frac{1}{R_t}$ est une martingale locale.

   (b) Montrer que $(U_t = \exp(-\frac{\lambda^2 t}{2}) \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}, t \geq 0)$ est une martingale locale. On admettra que c'est une martingale.

   (c) En déduire la valeur de $E(\exp(-\frac{\lambda^2 T_m}{2}))$ où $T_m = \inf\{t \, : \, R_t = m\}$, avec $m > 0$.

   (d) Soit f une fonction continue bornée et a un nombre réel. Quelles conditions doit vérifier la fonction v pour que

$$v(R_t) \exp[-at - \int_0^t f(R_s) ds]$$

   soit une martingale?

   (e) Supposons que v est explicitée. Comment calculerez vous

$$E(\exp[-aT_m - \int_0^{T_m} f(R_s) \, ds]) \, ?$$

5. Soit a, α, b, β quatre constantes réelles. Soit $x \in I\!R$.
   On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= (a + \alpha X_t) \, dt + (b + \beta X_t) \, dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \tag{1}$$

   Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ l'unique solution de l'équation (1) quand $a = b = 0$ vérifiant $Y_0 = 1$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$Z_t = x + (a - b\beta) \int_0^t Y_s^{-1} \, ds + b \int_0^t Y_s^{-1} \, dB_s \,.$$

   Montrer que la solution X_t de (1) peut s'écrire $X_t = Y_t Z_t$.

M2GRA. Université d'EVRY 2008-2009
M. Jeanblanc

Examen Calcul Stochastique. Décembre 2008

Dans tous les exercices, W est un mouvement Brownien unidimensionnel construit sur un espace $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle.

1. *Dans cette question, des réponses grossiérement fausses seront affectées de points négatifs. Si vous ne répondez pas à cette question, vous serez également pénalisés.* Donner la définition d'une mesure martingale équivalente (mme). Enoncer ses propriétés. Liens entre l'existence de mme et marché complet, marché sans arbitrage. Comment évaluer un produit dérivé en utilisant une mme.

2. Expliciter la solution de
$$dX_t = X_t(tdt + e^t dW_t), \; X_0 = 1$$
On pourra donner la solution sans faire de calculs intermédiaires, car des calculs de ce type ont été souvent effectués en cours, ou trouver de l'aide en introduisant le processus $Y_t = X_t e^{-t^2/2}$.

3. On considère un marché financier où deux actifs sont négociés: un actif sans risque, de taux r, un actif risqué dont le prix S suit la dynamique
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$
les coefficients μ et σ étant des constantes.
   (a) Ecrire la valeur de S_t en fonction de S_0, des constantes μ, σ, et du MB W.
   (b) Déterminer le(s) mesure(s) martingale(s) équivalente(s).
   (c) Justifier que ce marché est complet, sans arbitrage.
   (d) On considère l'actif contingent versant $h(S_T)$ à la date T, où h est une fonction (déterministe).
      i. Quel est le prix de cet actif à la date t? Montrer que ce prix est obtenu par une intégrale déterministe.
      ii. Ecrire l'EDP d'évaluation.
      iii. Comment couvrir cet actif en utilisant l'actif sans risque et l'actif S? Expliquer en particulier comment déterminer le nombre de parts d'actifs S. (on ne demande pas de calcul explicite)
   (e) On se place dans le cas $h(x) = x^2$. Expliciter le prix à la date t et le portefeuille de couverture.
   (f) Quels changements apporter aux résultats précédents si
   $$dS_t = S_t(\mu(t)dt + \sigma(t)dW_t)$$
   les coefficients μ et σ étant des fonctions déterministes.

4. Formules de parité:
On rappelle que, lorsque le taux sans risque est constant égal à r, le prix d'une option Européenne de strike K écrite sur le sous-jacent S de dynamique
$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$
est
$$C(t,x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$
avec
$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{x}{Ke^{-r(T-t)}}\right)\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$
Soit S le prix d'un actif versant des dividendes. Sa dynamique **risque neutre** est
$$dS_t = S_t((r-\delta)dt + \sigma dW_t), \; S_0 = x$$

Quel est le prix d'un call de strike K? (donner une formule globale en terme d'espérance et une formule explicite). On notera $C_E(x, K; r, \delta)$ ce prix: la première variable désigne la valeur du sous-jacent à la date 0, la seconde la valeur du strike, la troisième variable est le taux sans risque, la quatrième le taux de dividendes. On note $P_E(a, b; \rho, \nu)$ le prix d'un put quand la valeur du sous-jacent à la date 0 est a, la valeur du strike est b, le taux sans risque est ρ et le taux de dividende est ν. Montrer en utilisant un changement de numéraire (on prendra S comme numéraire)

$$C_E(x, K; r, \delta; T - t) = P_E(K, x; \delta, r; T - t)$$

5. Soit R le processus solution de

$$dR_t = \frac{1}{R_t} dt + dW_t, \; R_0 = 1 \, .$$

   (a) Montrer, en utilisant le lemme d'Itô, que $Z_t = \frac{1}{R_t}$ est une martingale locale.

   (b) Montrer que $(U_t = \exp(-\frac{\lambda^2 t}{2}) \frac{\sinh \lambda R_t}{\lambda R_t}, t \geq 0)$ est une martingale locale. On admettra que c'est une martingale.

   (c) En déduire la valeur de $E(\exp(-\frac{\lambda^2 T_m}{2}))$ où $T_m = \inf\{t \; : \; R_t = m\}$, avec $m > 0$.

   (d) Soit f une fonction continue bornée et a un nombre réel. Quelles conditions doit vérifier la fonction v pour que
$$v(R_t) \exp[-at - \int_0^t f(R_s) ds]$$
soit une martingale?

6. Soit a, α, b, β quatre constantes réelles. Soit $x \in I\!R$.
On considère l'équation différentielle stochastique

$$\begin{aligned} dX_t &= (a + \alpha X_t) \, dt + (b + \beta X_t) \, dB_t \\ X_0 &= x \end{aligned} \qquad (2)$$

Soit $(Y_t)_{t \geq 0}$ l'unique solution de l'équation (2) quand $a = b = 0$ vérifiant $Y_0 = 1$ et $(Z_t)_{t \geq 0}$ le processus défini par

$$Z_t = x + (a - b\beta) \int_0^t Y_s^{-1} \, ds + b \int_0^t Y_s^{-1} \, dB_s \, .$$

Montrer que la solution X_t de (2) peut s'écrire $X_t = Y_t Z_t$.