Master 2 - MLV 2006-07
Risque de crédit. Examen
M. Jeanblanc

Lundi 12 Mars 2007; 9h30-12h30
Sans documents

La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Dans tout le devoir, un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbf{F}$ est donné, τ est une variable aléatoire finie strictement positive, les processus H, G et Γ sont définis par $H_t := 1\!\!1_{\tau \leq t}$, $G_t := \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$ et $\Gamma_t := -\ln G_t$. Le processus G est supposé continu et strictement positif. On note $\mathbf{H}$ la filtration engendrée par le processus H et $\mathbf{G} = \mathbf{F} \vee \mathbf{H}$.
Dans toutes les questions d'évaluation de produits financiers, le taux d'intérêt sera pris nul, et la probabilité risque neutre sera la probabilité $\mathbb{P}$. On rappelle que si Y est un processus $\mathbf{F}$-adapté, on a, pour $t < s$,

$$\mathbb{E}(Y_\tau 1\!\!1_{t<\tau\leq s}|\mathcal{G}_t) = 1\!\!1_{t<\tau} \frac{1}{G_t} \mathbb{E}(\int_t^s Y_u dF_u|\mathcal{F}_t) .$$

La décomposition de Doob-Meyer de G est $G = Z - A$ où Z est une martingale et A un processus croisant, nul en 0 que l'on suppose de la forme $A_t = \int_0^t a_s ds$. On rappelle que

$$M_t := H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \frac{a_s}{G_s} ds = H_t - \int_0^{t\wedge\tau} \lambda_s ds = H_t - \Lambda_{t\wedge\tau}$$

(avec $\lambda_s = \frac{a_s}{G_s}$, $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$) est une martingale.

Les questions 1,3,4,5,6 sont indépendantes; la question 2 est utile (mais non indispensable) dans une (et une seule) des questions suivantes.

1. Le processus G est-il une sur-martingale? une sous-martingale?
2. Soit μ un processus $\mathbf{G}$-prévisible. Expliciter la solution de $dL_t = \mu_t L_{t-} dM_t,\ L_0 = 1$.
3. Dans cette question, on se place dans le cas où la filtration $\mathbf{F}$ est triviale.
   (a) Vérifier (rapidement!) que F est croissant. On suppose que $F = 1 - G$ est différentiable, de dérivée f. Identifier le λ dans la décomposition de M en fonction de f et de F. Montrer que, pour tout $\theta > -1$, le processus $X_t = (1+\theta)^{H_t} e^{-\theta\Lambda_{t\wedge\tau}}$ est une martingale (on pourra écrire $X_t = H_t x_t + (1 - H_t)\widetilde{x}_t$ pour des processus x et $\widetilde{x}$ que l'on identifiera, et faire du calcul stochastique, mais il y a d'autres méthodes plus rapides). En déduire, en se plaçant en $t = \infty$ que Λ_τ a une loi exponentielle.
   (b) Soit R une fonction déterministe. Quel est le prix à la date t d'un actif délivrant $R(\tau)$ à maturité T si $\tau \leq T$, et X (constante) si $T < \tau$. Donner la dynamique de ce prix.
   (c) On se donne deux temps τ_i et on note $\mathbb{P}(\tau_1 > u_1, \tau_2 > u_2) = G(u_1, u_2)$.
      i. Quel est le prix d'un actif financier qui verse 1 en T s'il n'y a eu aucun défaut avant T.
      ii. Quel est le prix d'un actif financier qui verse 1 en T s'il y a eu un seul défaut avant T.
      iii. Quel est le prix d'un actif financier qui verse 1 en $\tau_1 \wedge \tau_2$ si $\tau_1 \wedge \tau_2 < T$.
4. Dans cette question, on suppose que $\tau = \inf\{t\ :\ C_t < U\}$ où U est une va de loi uniforme sur $[0, 1]$, indépendante de $\mathcal{F}_\infty$ et C un processus $\mathbf{F}$-adapté, décroissant tel que $C_0 = 1$ et $C_\infty = 0$.
   (a) Calculer G_t.
   (b) Soit R un processus $\mathbf{F}$-adapté et $X \in \mathcal{F}_T$. Quel est le prix à la date t d'un actif délivrant R_τ à maturité T si $\tau \leq T$, et $X \in \mathcal{F}_T$ si $T < \tau$. Donner la dynamique de ce prix.

5. On admet que $G_t = L_t D_t$ où L est une martingale et D un processus décroissant. Ecrire dG_t en fonction de D et L. Donner l'expression de D en fonction de G et de A. Soit $X \in \mathcal{F}_T$. Montrer que le prix d'un actif qui délivre X à maturié T s'il n'y a pas eu défaut est $1\!\!1_{\{t<\tau\}} \exp(\Delta_t)\widehat{\mathbb{E}}(X \exp(-\Delta_T)|\mathcal{F}_t)$ où Δ est un processus croissant que l'on explicitera, et $\widehat{\mathbb{E}}$ désigne l'espérance sous une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ que l'on explicitera.

6. Le but de cet exercice est de démontrer une formule de grossissement de filtration, en utilisant les techniques développées en cours. Dans tout l'exercice, X est une **F**-martingale continue.

   (a) Supposons qu'il existe un processus **G**-adapté K tel que

   $$\mathbb{E}(\widehat{A}_s(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) = \mathbb{E}(\widehat{A}_s \int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} K_u du) \qquad (1)$$

   pour tout $\widehat{A}_s \in \mathcal{G}_s$, Montrer que le processus $X_{t\wedge\tau} - \int_0^{t\wedge\tau} K_u du$ est une **G**-martingale.
   Le but de l'exercice, est de déterminer K, obtenant ainsi que X est une **G**-semi-martingale, de décomposition connue.

   (b) Justifier qu'il suffit, pour établir (1), de montrer que

   $$\mathbb{E}(A_s 1\!\!1_{s<\tau}(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) = \mathbb{E}\left(A_s 1\!\!1_{s<\tau} \int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} K_u du\right)$$

   pour tout $A_s \in \mathcal{F}_s$.

   (c) Soit Y un processus **F**-adapté. Exprimer $E(Y_\tau 1\!\!1_{\tau\leq t}|\mathcal{G}_s)1\!\!1_{s<\tau}$ et $E(Y_t 1\!\!1_{\tau\leq t}|\mathcal{G}_s)1\!\!1_{s<\tau}$ en fonction de G et d'une espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_s$.
   Montrer que, pour $A_s \in \mathcal{F}_s$,

   $$\mathbb{E}(A_s 1\!\!1_{s<\tau}(X_{t\wedge\tau} - X_{s\wedge\tau})) = \mathbb{E}\left(A_s\left(X_t G_t - X_s G_s - \int_s^t X_u dG_u\right)\right)$$

   Calculer $X_t G_t - X_s G_s - \int_s^t X_u dG_u$ en fonction du crochet de X et G.

   (d) Montrer que si K est **F**- adapté

   $$\mathbb{E}(A_s 1\!\!1_{s<\tau} \int_{s\wedge\tau}^{t\wedge\tau} K_u du) = \int_s^t \mathbb{E}(A_s K_u G_u) du$$

   (e) Identifier K.