hangement de probabilité - Théorème de Girsanov

1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et Z une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable positive d'espérance 1. On définit une nouvelle probabilité Q sur $\mathcal{F}$ par $Q(A) = E(Z\mathbb{1}_A)$. On a, pour toute v.a. Q intégrable $E_Q(X) = E_P(ZX)$.

Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si Z_T est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable positive d'espérance 1, on définit Q sur $\mathcal{F}_T$ par$Q(A) = E(Z_T \mathbb{1}_A)$. La probabilité Q est équivalente à P sur $\mathcal{F}_T$ si la v.a. Z_T est strictement positive. Enfin, pour tout $t < T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$ on a

$$Q_T[A] \; = \; E[E_P[Z_T \,|\, \mathcal{F}_t] \mathbb{1}_A] \; = \; E_P[Z_t \mathbb{1}_A] \,,$$

en posant$Z_t = E_P[Z_T \,|\, \mathcal{F}_t]$ et

$$dQ|_{\mathcal{F}_t} = Z_t dP|_{\mathcal{F}_t} \,.$$

Lemme 1.1 *Un processus* $\{M_t,\ t \geq 0\}$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale sous* Q *si et seulement si le processus* $(Z_t M_t, t \geq 0)$ *est une* $(\mathcal{F}_t)$*-martingale sous* P*.*

2 La formule de Cameron-Martin

2.1 Dimension finie

Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$E\left[\exp \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right] \;=\; \prod_{i=1}^{n} E\left[\exp\left[\mu_i X_i\right]\right] \;=\; \exp \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\right],$$

ce qui entraîne que

$$E\left[\exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right] \;=\; 1.$$

On définit une nouvelle probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant

$$Z(\omega) \;=\; \exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2}\right)$$

et $Q(d\omega) = Z(\omega)P(d\omega)$, autrement dit, pour tout $A \in \mathcal{F}$

$$Q[A] \;=\; E_P[Z\mathbb{1}_A] \;=\; \int_A Z(\omega)P(d\omega)$$

La mesure Q est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ équivalente à P.

$$\begin{aligned}
Q(X_1 \in dx_1, \ldots, X_n \in dx_n) &= e^{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i x_i - \mu_i^2/2\right)} P(X_1 \in dx_1, \ldots, X_n \in dx_n) \\
&= (2\pi)^{-n/2}\, e^{\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i x_i - \mu_i^2/2\right)} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2}}\, dx_1 \cdots dx_n \\
&= (2\pi)^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_i)^2}\, dx_1 \cdots dx_n
\end{aligned}$$

et l'on en déduit que sous Q,

$$(X_1, \ldots, X_n) \;\sim\; \mathcal{N}(\mu, \mathrm{Id}),$$

où $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

2.2 Cas Brownien

Soit $\{W_t,\ t \geq 0\}$ un MB et $\left\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\right\}$ sa filtration naturelle complétée.

Pour tout $m \in I\!R$, le processus

$$t \mapsto Z_t^m = \exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right]$$

est une $(\mathcal{F}_t^W)$-martingale positive.

On fixe alors un horizon $T > 0$. La mesure Q_T^m définie sur sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par

$$Q_T^m[A] = E_P\left[Z_T^m \mathbb{1}_A\right]$$

est une probabilité équivalente à P sur $\mathcal{F}_T^W$.

Théorème 2.1 [Formule de Cameron-Martin] ***Sous la mesure*** Q_T^m***,*** *le processus*

$$\tilde{W} : t \mapsto W_t - mt, \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

3 Les deux théorèmes de Girsanov

Soit $\{W_t,\ t \geq 0\}$ un MB sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et $\left\{\mathcal{F}_t^W,\ t \geq 0\right\}$ sa filtration naturelle complétée. Soit $\{\theta_t,\ t \geq 0\}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov. Par les résultats du chapitre précédent, on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta \ = \ 1 \ + \ \int_0^t \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

s'écrit

$$Z_t^\theta \ = \ \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

et que Z^θ est une $(\mathcal{F}_t^W)$-martingale. On définit la mesure

$$Q_T^\theta(d\omega) \ = \ Z_T(\omega)P(d\omega)$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$, qui est une probabilité équivalente à P sur $\mathcal{F}_T^W$.

Théorème 3.1 **[Théorème de Girsanov]** *Sous la mesure* Q_T^θ*, le processus*

$$\widetilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s \, ds, \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Théorème 3.2 **[Théorème de Girsanov abstrait]** *Soit P et Q deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace filtré $(\Omega, \{\mathcal{F}_t,\ t \leq T\})$. On suppose que toutes les $(\mathcal{F}_t)$-martingales sont continues. Alors sous P il existe L une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue telle que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,*

$$Q\left[A\right] \;=\; E_P\left[\exp\left[L_t - \langle L\rangle_t/2\right]\mathbb{1}_A\right].$$

De plus, si M une martingale locale continue sous P, alors le processus

$$\tilde{M} \;:\; t \;\mapsto\; M_t - \langle M, L\rangle_t$$

est une ***martingale locale continue sous Q.***

Expliquons d'abord la première partie de ce théorème concernant l'existence de la martingale L. Elle repose sur le théorème de Radon-Nikodym, qui assure l'existence d'un processus densité $\{D_t,\ t \geq 0\}$ de P par rapport à Q, au sens où pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$Q[A] \;=\; E_P[D_t \mathbb{1}_A].$$

Comme $A \in \mathcal{F}_T$, on a aussi

$$Q[A] \;=\; E_P[D_T \mathbb{1}_A] \;=\; E_P[E_P[D_T|\mathcal{F}_t]\,\mathbb{1}_A]$$

de sorte, par identification, que

$$D_t \;=\; E_P[D_T|\mathcal{F}_t]$$

pour tout $t \leq T$. On en déduit que D est une martingale UI continue sous P. De plus elle est strictement positive, par équivalence entre P et Q. On peut alors (on peut effectivement définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale continue) définir le processus

$$L_t \;=\; \log D_0 \;+\; \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$$

et on applique la formule d'Itô à

$$\begin{aligned} R_t \;=\; \exp\left[L_t - \langle L\rangle_t/2\right] \quad &= \quad D_0 \;+\; \int_0^t R_s\, dL_s \;-\; \frac{1}{2}\int_0^t R_s\, d\langle L\rangle_s \;+\; \frac{1}{2}\int_0^t R_s\, d\langle L\rangle_s \\ &= \quad D_0 \;+\; \int_0^t R_s\, dL_s. \end{aligned}$$

Mais par définition de L, on a aussi

$$D_t \;=\; D_0 \;+\; \int_0^t D_s\, dL_s,$$

de sorte que D et R sont solutions fortes de la *même EDS*. Par unicité, on en déduit que $R \equiv D$, d'où

$$D_t \;=\; \exp\left[L_t - \langle L\rangle_t/2\right].$$

Ceci entraîne finalement que pour tout $t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$,

$$Q[A] \;=\; E_P\left[\exp\left[L_t - \langle L\rangle_t/2\right] \mathbb{1}_A\right].$$

$\triangle$

On voit enfin facilement comment le théorème 3.2 entraîne le théorème 3.1. La martingale L du théorème 3.2 est ici

$$L_t \;=\; \int_0^t \theta_s \, dB_s$$

et on a donc

$$\langle B, L\rangle_t \;=\; \int_0^t \theta_s \, ds.$$

Comme B est une martingale locale continue sous P, $\tilde{B}$ est une martingale locale continue sous Q_T^θ. On démontre comme ci-dessus que son crochet est $\langle \tilde{B}\rangle_t = t$, et l'on en déduit que $\tilde{B}$ est un mouvement brownien sous Q_T^θ.

$\triangle$

4 Théorème de représentation prévisible

Soit B un mouvement brownien et $\mathbf{F}$ sa filtration naturelle, soit $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$.

4.1 Représentation prévisible

Théorème 4.1 *Soit B un mouvement Brownien et $(\mathcal{F}_t)$ sa filtration naturelle. Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale, telle que $\sup_{t \leq T} E[M_t^2] < \infty$. Il existe un unique processus prévisible H vérifiant $E(\int_0^T H_s^2 \, ds) < \infty$, tel que*

$$\forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s \,.$$

Si M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que

$$\forall t \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$

Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture.

Corollaire 4.2 *Toutes les* $(\mathcal{F}_t^B)$*-martingales locales sont continues.*

5 Applications

5.1 Calcul d'espérances

5.1.1 Calcul de

$$E\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right]$$

pour $t < T$ et θ fonction déterministe. On effectue un changement de probabilité

$$L_t \;=\; \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

et on calcule

$$\begin{aligned} E_P\left[B_t L_T\right] \;=\; E_P\left[B_t L_t\right] \;=\; E_Q\left[B_t\right] \quad &= \quad E_Q\left[\tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s ds\right] \\ &= \quad E_Q\left[\int_0^t \theta_s\, ds\right] \;=\; \int_0^t \theta_s\, ds. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right] \;=\; \int_0^t \theta_s\, ds$$

5.1.2 Calcul de

$$I \;=\; E\left[\exp-\left[\alpha B_t^2+\frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right]\right]$$

où B est un brownien issu de a. On pose $x=a^2$ et on effectue un changement de probabilité $P\rightarrow P^\beta$ avec densité sur $\mathcal{F}_t^W$

$$\frac{dP^\beta}{dP} \;=\; L_t^\beta \;=; \exp\left[-\beta\int_0^t B_s\, dB_s-\frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right].$$

En utilisant la formule d'intégration par parties,

$$L_t^\beta \;=\; \exp-\left[\frac{\beta}{2}(B_t^2-x-t)+\frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right]$$

Sous P^β,

$$B_t \;=\; a \;+\; W_t \;-\; \beta\int_0^t B_s\, ds$$

avec W P^β-Brownien. Donc B est un **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** sous P^β, et B_t une v.a. gaussienne d'espérance $ae^{-\beta t}$ et de variance $\frac{1}{2\beta}(1-e^{-2\beta t})$. On en déduit que

$$I = E^\beta\left[L_t^{-1}\exp-\left[\alpha B_t^2+\frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right]\right] = E^\beta\left[\exp\left[-\alpha B_t^2+\frac{\beta}{2}(B_t^2-x-t)\right]\right].$$

Après quelques calculs simples et longs, on obtient

$$I = (\cosh\beta t+2\alpha\sinh\beta t/\beta)^{-1/2}\exp\left[-\frac{x\beta(1+2\alpha\coth\beta t/\beta)}{2(\coth\beta t+2\alpha/\beta)}\right].$$

En faisant $a=\alpha=0$ et $\beta=\sqrt{2\lambda}$, cette formule donne la transformée de Laplace de la norme L^2 du Brownien :

$$E\left[\exp-\lambda\int_0^t B_s^2\,ds\right] = \left(\cosh\sqrt{2\lambda}t\right)^{-1/2}.$$

5.2 Temps de passage du Brownien drifté

On considère W un mouvement Brownien standard issu de 0 et

$$T_b^\mu \;=\; \inf\{t > 0,\; W_t + \mu t = b\}\,,$$

premier temps de passage au seuil b du Brownien drifté $W^\mu : t \mapsto W_t + \mu t$, pour $\mu \in I\!R$. On définit

$$P^\mu(d\omega) \;=\; \exp\left[\mu W_t - \mu^2 t/2\right] P(d\omega)$$

sur $\mathcal{F}_t^W$.

Ceci permet de calculer la densité de T_b^μ en écrivant

$$
\begin{aligned}
P\left[T_b^\mu \leq t\right] \;=\; P^\mu\left[T_b \leq t\right] \quad &= \quad E\left[\exp\left[\mu W_t - \mu^2 t/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}\right] \\
&= \quad E\left[\exp\left[\mu W_{T_b \wedge t} - \mu^2 (T_b \wedge t)/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}\right] \\
&= \quad E\left[\exp\left[\mu W_{T_b} - \mu^2 T_b/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}\right] \\
&= \quad e^{\mu b}\, E\left[\exp - \left[\mu^2 T_b/2\right] \mathbb{1}_{\{T_b \leq t\}}\right] \\
&= \quad e^{\mu b} \int_0^t e^{-\mu^2 s/2} \left(\frac{|b|\, e^{-b^2/2s}}{\sqrt{2\pi s^3}} \right) ds \\
&= \quad \int_0^t \frac{|b|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp - \left[\frac{(b - \mu s)^2}{2s} \right] ds,
\end{aligned}
$$

Ceci entraîne par dérivation que

$$P\left[T_b^\mu \in dt\right] \;=\; \frac{|b|}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp - \left[\frac{(b-\mu t)^2}{2t}\right] dt.$$

Enfin, soit par calcul direct avec la densité, soit en utilisant une nouvelle fois la formule de Cameron-Martin, on peut calculer la transformée de Laplace de T_b^μ :

$$E\left[\exp -\lambda T_b^\mu\right] \;=\; \exp\left[\mu b - |b|\sqrt{\mu^2 + 2\lambda}\right] .$$

6 Théorème fondamental de la finance: Probabilité risque neutre

Une **opportunité d'arbitrage** est une stratégie d'investissement qui permet, à partir d'une mise de fonds initiale nulle, d'obtenir une richesse terminale positive, non nulle.

Dans le cas d'un marché où sont négociés **un actif sans risque**, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 = S_t^0 r_t dt$$

et un actif risqué de dynamique

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma_t dB_t)$$

Une **stratégie (ou portefeuille)** d'investissement est un couple (π^0, π) de processus adaptés. La **richesse** associée est $X_t = \pi_t^0 S_t^0 + \pi_t S_t$. La stratégie est dite **auto-finançante** si $dX_t = \pi_t^0 dS_t^0 + \pi_t dS_t$. Il en résulte que

$$dX_t = rX_t dt + \pi_t (dS_t - rS_t dt)\,.$$

Si l'on note $X_t^a = R_t X_t$ et $S_t^a = R_t S_t$, on voit que

$$dX_t^a = \pi_t dS_t^a\,.$$

Dans un modèle de prix d'actifs financiers, on doit veiller à ce que le mocdèle ne présente pas d'opportunités d'arbitrage. Dans un marché comportant un actif sans risque, c'est-à-dire d'un actif dont le prix suit la dynamique

$$dS_t^0 \;=\; S_t^0 r_t dt$$

le théorème fondamental montre que le marché est sans arbitrage si et seulement si il existe une probabilité Q équivalente à la probabilté historique -celle sous laquelle on écrit les dynamiques des prix- telle que les processus des prix actualisés (soit S_t^i/S_t^0) sont des martingales. Cette probabilité est qualifiée **de risque-neutre**. La valeur actualisée de tout portefeuille autofinançant est alors une martingale (locale) sous toute probabilité risque neutre.

Si elle est unique, la valeur d'un actif financier H, payé à la date T, est calculée comme **l'espérance sous la probabilité risque neutre du payoff actualisé**, soit $V_t = E_Q(HR_T|\mathcal{F}_t)$, où $R_T = \int_0^T r_s ds$. On parle alors de **marché complet**. On montre alors que le théorème de représentation prévible s'applique et qu'il existe π tel que $dV_t^a = \pi_t dS_t^a$.

Si la probabilité risque neutre n'est pas unique, on parle de marché incomplet. POur une probabilité Q, il n'existe pas, en général de π tel que $E_Q(HR_T|\mathcal{F}_t) = x + \int_0^t \pi_s dS_s^a$.

6.1 Changement de numéraire

Il est parfois très utile d'exprimer les prix en valeur relative par rapport à un autre processus de prix.

Définition 6.1 *Un* ***numéraire*** *est un actif financier de prix strictement positif.*

Si M est un numéraire, on peut évaluer la valeur V_t d'une stratégie en terme de ce numéraire, soit V_t/M_t.

Proposition 6.2 *Supposons qu'il y a d actifs risqués dans le marché, dont les prix* $(S_t^{(i)};\, i = 1, \cdots, d,\, t \geq 0)$ *sont des processus d'Itô, et tels que* $S^{(1)}$ *est strictement positif. Soit* $V_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i S_t^{(i)}$ *le valeur du portefeuille* $\pi_t = (\pi_t^i, i = 1, \cdots, d)$. *Si* $(\pi_t,\, t \geq 0)$ *est auto-financant, i.e. si* $dV_t = \sum_{i=1}^d \pi_t^i dS_t^{(i)}$, *et si l'on choisit* $S_t^{(1)}$ *comme numéraire, alors*

$$dV_t^1 = \sum_{i=2}^{d} \pi_t^i dS_t^{(i,1)}$$

où $V_t^1 = V_t / S_t^{(1)}$, $S_t^{(i,1)} = S_t^{(i)} / S_t^{(1)}$.

On associe à un numéraire M le changement de probabilité suivant: Soit Q la probabilité risque neutre, telle que le processus $(M_t R_t, t \geq 0)$ est une Q-martingale. Soit Q^M défini par $Q^M|_{\mathcal{F}_t} = (M_t R_t) Q|_{\mathcal{F}_t}$.

Proposition 6.3 *Soit*$(X_t, t \geq 0)$ *le prix d'un actif financier et* M *un numéraire. Le prix de* X*, dans le numéraire* M*, soit* $(X_t/M_t, 0 \leq t \leq T)$ *est une* Q^M*-martingale.*

Le calcul du terme $E_Q(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{S_T \geq a})$ qui apparait dans la formule de Black et Scholes est immédiat: il suffit d'utiliser que, sous Q le processus $M_t = S_t e^{-rt}/S_0$ est une martingale strictement positive d'espérance 1, et de poser $d\widehat{Q} = M_t dQ$

$$\begin{aligned} E_Q(S_T e^{-rT} \mathbb{1}_{S_T \geq a}) &= E_{\widehat{Q}}(S_0 \mathbb{1}_{S_T \geq a}) \\ &= S_0 \widehat{Q}(S_T \geq a)\,. \end{aligned}$$

Il reste à exprimer la dynamique de S sous $\widehat{Q}$.

Un changement de numéraire est également très efficace pour calculer le prix d'une **option d'échange**, qui est

$$E((S_T^1 - S_T^2)^+)$$

6.2 Probabilité forward-neutre

La valeur à la date t d'un flux déterministe F reçu à la date T est

$$FP(t,T) = F\,E_Q[\exp - \int_t^T r(u)\,du\,|\mathcal{F}_t].$$

Si ce flux est aléatoire, la valeur à la date t de ce flux est

$$E_Q[F\ \exp - \int_t^T r(u)\,du\,|\mathcal{F}_t].$$

Par hypothèse A.O.A, le processus $R(t)P(t,T)$ est une Q-martingale, son espérance est constante, égale à $P(0,T)$. Pour tout T, le processus

$$\zeta_t^T := \frac{R(t)P(t,T)}{P(0,T)}$$

est une Q-martingale positive d'espérance 1.

Soit Q_T la mesure de probabilité définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ par

$$Q_T(A) = E_Q(\zeta_t^T 1_A)$$

pour tout $A \in \mathcal{F}_t$. Lorsque T est fixé, on notera $\zeta_t = \zeta_t^T$.

Définition 6.4 *La probabilité Q_T définie sur $\mathcal{F}_T$, par $\dfrac{dQ_T}{dQ} = \zeta_t^T$ est appelée* ***probabilité forward-neutre*** *de maturité T.*

Avec cette notation

$$E_{Q_T}(F \,|\mathcal{F}_t) = E_Q(F \,\frac{\zeta_T}{\zeta_t} |\mathcal{F}_t)\,.$$

Lorsque r est déterministe, $Q_T = Q$.

La mesure Q_T est la martingale mesure associée au choix du zéro-coupon de maturité T comme numéraire.