ÉCOLE POLYTECHNIQUE

THÈSE

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Discipline : Mathématiques Appliquées
Spécialité : Algorithmique
présentée et soutenue publiquement le 5 janvier 2001

par

Stéphane CRÉPEY

Titre :

CONTRIBUTION À DES MÉTHODES NUMÉRIQUES APPLIQUÉES À LA FINANCE ET AUX JEUX DIFFÉRENTIELS

Jury :

M. Martino BARDI	Rapporteur
M. Guy BARLES	Examinateur
M. Henri BERESTYCKI	Examinateur
M. Pierre BERNHARD	Directeur de thèse
Mme Nicole EL KAROUI	Présidente
M. Bernard LAPEYRE	Rapporteur
Mme Odile POURTALLIER	Examinateur
M. Denis TALAY	Examinateur

À mon père

Remerciements

Cette thèse de l'École Polytechnique a été préparée en deux parties : d'abord de novembre 1995 à juillet 1997 au sein du projet MIAOU de l'INRIA Sophia Antipolis (Partie II de cette thèse, *Jeux Différentiels*) ; puis (Parties III et IV, *Mathématiques financières*) dans l'équipe Recherche-Développement de la CAR, sur la base d'un "Stage industriel pour doctorant INRIA" dans cet organisme. On ne présente plus l'INRIA dans les thèses de mathématiques appliquées. La CAR (Caisse Autonome de Refinancement, groupe Caisse Des Dépôts, Paris) est un organisme financier constitué d'une trentaine de personnes dont environ un tiers est chargé de recherches en économie quantitative ou mathématiques financières. La recherche, subordonnée aux activités de marché du groupe CDD, est assistée par des consultants du monde académique. Cette double préparation à l'INRIA et à la CAR a été particulièrement enrichissante. Le sens de l'expression "Mathématiques Appliquées" s'est illustré pour moi de manière concrète.

Je remercie de tout cœur ceux qui ont accompagné la préparation de cette thèse, et tout d'abord : Pierre Bernhard, Odile Pourtallier et Henri Berestycki.

Pierre Bernhard est le directeur de cette thèse. Avoir été, par lui, initié à la théorie des jeux dynamiques d'Isaacs, qu'il a lui-même pour une large part formalisée, a constitué, dans le démarrage de ma recherche, un atout essentiel et une grande chance; comme l'a été le fait de pouvoir bénéficier, tout au long de mon travail, de ses conseils ô combien précieux pour éclairer le choix, aux moments décisifs, des objectifs à atteindre, des voies à prospecter, des alternatives à envisager. Les conseils prodigués et le climat de confiance et de liberté qui m'ont toujours paru s'y associer, ont été pour moi un guide et un stimulant constants. Je veux lui en exprimer ici ma gratitude.

Celle-ci s'adresse également à Odile Pourtallier, qui a co-encadré la recherche avec Pierre Bernhard. Je tiens à lui dire combien j'ai été sensible à la constance, au réalisme et à la fidélité de son appui dans le développement du projet. Au plan scientifique, ce dernier, assurément, a beaucoup gagné à l'examen critique auquel elle n'a jamais manqué de procéder, et dont elle m'a toujours fait part avec une grande franchise. Le projet a fortement bénéficié de l'attention si concrète qu'avec Pierre Bernhard elle a bien voulu apporter à la bonne coordination des procédures et des échanges entre les différentes institutions impliquées.

Henri Berestycki a fédéré l'encadrement des travaux à la CAR. Je lui sais particulièrement gré de l'attention personnelle qu'il a bien voulu porter à leur orientation, comme il le fit à partir d'emprunts originaux à un article de Lebesgue, en énonçant les principes de la résolution du problème de la calibration sur domaine borné.

S'il me semble avoir pu progresser de la sorte dans la compréhension des disciplines auxquelles j'avais à faire appel, je le dois en outre aux personnalités éminentes, consultants de la CAR, dont le conseil et l'enseignement rapprochés furent, de même, un grand privilège.

Ma reconnaissance est vive envers Pierre-Louis Lions pour le temps qu'il a bien voulu consacrer, et pour ses multiples apports, au sein desquels je me plais à souligner, de manière particulière, la complémentarité fructueuse entre les points de vue de l'analyse et des probabilités, qu'il m'a permis de mettre en valeur dans ma recherche. À ces remerciements, je veux associer ceux que je dois à Éric Fournié, dont je n'ai pas oublié la manière avec laquelle il m'a accueilli et formé à la CAR, et qui, auprès de Pierre-Louis Lions et Henri Berestycki, a si fortement contribué à m'initier à ces problèmes.

Un grand merci aussi à Nicole El Karoui pour ces moments de discussions et d'échanges, toujours si bénéfiques, en particulier pour stimuler dans mon travail le souci de réalisme vis-à-vis des applications.

Je remercie chaleureusement Jérôme Busca, de l'Université de Tours, et Alain Rapaport, de l'INRA de Montpellier, pour leurs collaborations amicales, leur aide constamment soutenue et leur action généreuse, qui ont été déterminantes pour me permettre de mener à bien ce travail. Qu'ils sachent combien est vive ma gratitude.

Je tiens également à exprimer mes remerciements à toutes les personnes de l'INRIA et de la CAR qui m'ont soutenu dans cette recherche: François Baccelli, Bruno Gaujal, Jean Mairesse et les membres du projet Mistral, Laurent Baratchart, France Limouzis et les membres du projet Miaou, à l'INRIA, et Laurent Jullien, alors directeur Recherche-Développement, à la CAR.

Tous ceux qui ont collaboré si généreusement et efficacement à la saisie informatique de cette thèse et à sa mise en forme finale, savent combien leur soutien m'est allé droit au cœur, et je veux ici leur redire toute me reconnaissance. Je mesure ainsi tout le poids de la charge qu'Alain Jean-Marie a accepté d'assumer, mon remerciement s'adresse à lui tout spécialement. Celui-ci est aussi destiné à Alain Rapaport et Jérôme Busca, précédemment nommés et que je dois à nouveau évoquer à ce titre, ainsi qu'à Claude Miquel, Martin Guespereau, Ann-Charlotte de Chezelles, Patrice Roussel, Patrici Molinas, Denis Perset et Guillaume Bouriez, — et à d'autres encore, dont le soutien m'a été précieux, au premier rang desquels : Ma famille.

Table des matières

Liste des principales notations

Notations générales

$\equiv$ "notation pour", ou "égalité entre fonctions"
$=:$ **ou** $:=$ "égale par définition"
$a \wedge b$, $a \vee b$ minimum, maximum des réels étendus a et b
a^+, a^- $a \vee 0$, $-(a \wedge 0)$
$\mathbf{sgn}(x)$ -1, 0, $+1$, selon $x <, =, > 0$
M^T transposée d'une matrice M
$\| p \|$, $\| p \|_{\mathcal{E}}$ norme de p, dans l'espace normé ambient $\mathcal{E}$
$\langle p,q \rangle$, $\langle p,q \rangle_{\mathcal{E}}$ produit scalaire de p et q dans l'espace ambiant Euclidien ou Hilbertien $\mathcal{E}$
λ_f constante de Lipschitz d'une fonction (uniformément) Lipschitzienne f
ω, ω_f module de continuité, d'une fonction uniformément continue f
$\mathcal{C}(\Omega) \equiv \mathcal{C}^0(\Omega)$, $\mathcal{C}^m(\Omega)$ fonctions à dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre m inclus ($m \in \overline{\mathbb{N}}$), sur l'ouvert Euclidien Ω
∇u, $\mathcal{H}u$ gradient et matrice Hessienne en espace, d'une fonction $u(t,x)$
scs*, *sci semi-continue supérieurement, inférieurement
edp équation aux dérivées partielles
edo équation différentielle ordinaire
eds équation différentielle stochastique
$\mathrm{O}(x)$ fonction continue de x, nulle en $x = 0$
$\mathrm{o}(x)$ fonction de la forme $x\mathrm{O}(x)$
$B_\varepsilon(x)$, B_ε, $B(x)$ boule ouverte de rayon ε autour de x, en $x \equiv 0$, où $\varepsilon \equiv 1$
$\overline{\mathbf{co}}$ enveloppe convexe fermée
$x_{(n)}$ x (x_n, respectivement)
$\square$ fin de démonstration

Notations relatives aux jeux

$\widetilde{\mathbb{R}}$ $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
pe poursuite évasion
cm coût minimum
ϕ transformation de Kruzkov
$\mathcal{G}$ jeu différentiel à instant final variable, de poursuite évasion ou en coût minimum, ou jeu en distance minimum (éventuellement transformés)
f,l,L ($S \equiv \phi \circ L$) dynamique, Lagrangien, composante terminale du coût (transformée) du jeu $\mathcal{G}$

Ω, $\mathcal{T}$ domaine, cible, du jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$

$\delta_{\mathcal{T}}$, $\delta^R_{\mathcal{T}} \equiv (-R) \vee \delta_{\mathcal{T}}$ distance orientée à la cible $\mathcal{T}$, écrétée inférieurement au niveau $-R$ (R fixé > 0)

U, $\mathcal{U}$, $\{\mu\}$; V, $\mathcal{V}$, $\{\nu\}$ ensemble des contrôles instantanés, mesurables, relaxés, du minimiseur; maximiseur

$\Phi \times \Psi$ produit admissible de classes de stratégies en *feedback* discriminants inférieurs du minimiseur et du maximiseur

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ensemble des stratégies non anticipatives VREK du minimiseur, maximiseur

$\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, $\mathcal{E}^h$ espace d'état, discrétisé au pas h, du jeu $\mathcal{G}$

$\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ ensemble des fonctions réelles bornées sur $\mathcal{E}^h$

V,G,$\mathcal{I}$; V^h, G^h, $\mathcal{I}^h$ valeur VREK, Hamiltonien, équations d'Isaacs inférieures du jeu $\mathcal{G}$ (transformé); discrétisées au pas h

$\underline{V}$, $\overline{V}$ enveloppe inférieure, supérieure, d'une fonction localement bornée V, ou, suivant le contexte, d'une famille localement équibornée de fonctions $(V^h)_{h>0} \in (\ell_\infty(\mathcal{E}^h))_{h>0}$

$\mathcal{G}_\varepsilon$ jeu de poursuite évasion à cible dilatée de ε, respectivement en distance minimum à pénalité Lagrangienne ε

V_ε, $\mathcal{I}_\varepsilon$ valeur VREK et équation d'Isaacs inférieures du jeu $\mathcal{G}_\varepsilon$

Notations relatives à la finance

$\mathcal{N}$ distribution normale

S; $y = \ln(S)$ diffusion lognormale sous-jacente; en variable logarithmique

r, q taux court de l'économie, dividende éventuel attaché à S (constantes ≥ 0)

σ; $\sigma(t,s)/\sigma(t,y)$ volatilité constante; locale en variable financière/logarithmique

W Brownien standard

φ condition terminale et/ou obstacle

I processus intégrale de S

Π, π solution d'*edp* et approximation discrétisée

$\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$; $\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0)$ $\big(y_0 = \ln(S_0),\ k = \ln(K)\big)$ prix d'un *call* européen d'échéance T et prix d'exercice K, à la phase courante (t_0,S_0); en variables logarithmiques

H Barrière

$\mathcal{T}_{[a,b]}$ ensemble des temps d'arrêts à valeurs dans $[a,b]$

$L_{p(,loc)}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^1_p(\Omega)$, $W^{1,2}_{p(,loc)}(\Omega)$; m/p entier/réel Espaces de Sobolev habituels sur un ouvert Euclidien Ω; voir Partie IV, §3.1

$\partial_p\Omega$ bord parabolique de l'ouvert Euclidien Ω

$\mathcal{M}(\Omega)$ fonctions monotones sur la bande Ω, voir Annexe G

$dJ(\sigma).h$, $\nabla J(\sigma)$ dérivée dans la direction h, de Gâteaux, du critère J

C, C', ...; $C \equiv C_\mu$ $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ constantes C, C' dépendant éventuellement de paramètres μ,μ_1, ..., μ_n (et pouvant varier avec le contexte)

N.B.: Par défaut, les inégalités, inclusions ou indications de monotonie ou de signe, sont à prendre au sens strict.

Première partie

Présentation des travaux

Chapitre 1

Introduction générale

La présente recherche s'attache à la résolution, essentiellement numérique, de divers problèmes de Mathématiques Financières et de Jeux Différentiels, en faisant appel, souvent de manière combinée, à des techniques d'équations aux dérivées partielles (particulièrement solutions de viscosité, mais aussi solutions fortes) et à des techniques probabilistes (notamment convergence faible des processus stochastiques).

On formule ci-après quelques commentaires liminaires, qui soulignent à la fois la diversité des problèmes traités (§1.1), et les éléments communs qui les relient, se rapportant aux domaines d'application concernés (§1.2) ou aux techniques mathématiques employées (§1.3).

1.1 Problèmes physiques et modèles mathématiques

Des applications diverses constituent la matière de cette thèse. Ainsi :
— un problème de commande optimale d'un servomécanisme (Partie II) ;
— divers problèmes d'évaluation et de couverture de produits dérivés en finance (Partie III) ;
— un problème de calibration de la dynamique d'un actif financier à l'aide des prix des produits dérivés observés sur les marchés d'options (Partie IV).

Les problèmes mathématiques issus de la modélisation retenue pour ces problèmes physiques sont eux-mêmes variés :
— le problème de calibration débouche sur un problème d'optimisation, voire un problème inverse de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles (*edp*) [105] ;
— les problèmes d'évaluation et de couverture des options relèvent de l'analyse numérique des équations paraboliques [112] ;
— enfin, le problème de commande se modélise en termes de jeux différentiels (déterministes) [87].

1.2 Finance et Jeux Différentiels

À partir de leurs applications respectives, les deux domaines ont connu des développements analogues, sans aucun formalisme au départ. Ainsi, pendant la deuxième guerre mondiale, Rufus Isaacs (d'où l'équation qui porte son nom) pose les fondements de la théorie des jeux différentiels [87], à travers l'étude d'une large gamme de jeux concrets, issus de problèmes militaires de poursuite évasion, entre un missile et un avion par exemple.

S'il ne synthétise pas lui-même cette étude de cas en une théorie achevée (ce sera l'œuvre de ses successeurs, théorie des jeux dynamiques d'Isaacs-Breakwell-Bernhard), il

identifie cependant l'essentiel, introduisant notamment :
— la distinction entre variables d'état et variables de commande, et le concept de commande en *feedback* d'état;
— son *tenet of transition*, forme de principe de programmation dynamique pour les jeux différentiels, avant la lettre du principe général devant être énoncé et rendu célèbre par Bellman [22] quelques années plus tard ;
— la distinction entre *Game of Kind* et *Game of Degree*, à savoir le problème de la possibilité de la capture ou de l'évasion, et du temps de capture (infini si celle-ci n'a jamais lieu), respectivement ;
— l'étude analytique des jeux à travers une taxinomie de leurs singularités ;
— la notion de jeu discret, pouvant être résolu à la main par le calcul, et conçu comme l'approximation d'un jeu différentiel limite.

De même, en 1900, Louis Bachelier (récemment célébré lors du congrès mondial de la Société Bachelier Finance, à Paris au Collège de France, en juin 2000) calcule dans sa thèse [4] des prix d'options (à barrière notamment, voir Partie III, §4.2), à l'aide d'un "principe de composition des probabilités", qui n'est autre que l'équation de Fokker-Planck associée à ces problèmes de finance. Près d'un siècle plus tard, en 1997, Scholes[1] reçoit le prix Nobel d'économie (avec Merton), pour avoir retrouvé de tels prix dans le modèle aujourd'hui dit *de Black-Scholes* [36, 1973], à partir de la notion de portefeuille répliquant, dans la lignée des travaux de recherche en gestion de portefeuille de Markowitz. De fait, cet apport est fondamental, fournissant non seulement les prix, faits par les marchés, mais aussi et surtout la couverture — donnée par $\mathcal{N}(d_1)$ dans le cas d'une option européenne, où d_1 se calcule à l'aide de la volatilité implicite lue sur le prix de marché, débouchant sur une stratégie de couverture efficace en pratique.

1.3 Solutions de viscosité et représentations probabilistes

Un dénominateur commun à tous ces problèmes de mathématiques appliquées est la nécessité de résoudre numériquement des équations elliptiques, éventuellement dégénérées — *elliptiques* et *dégénérées* au sens de la théorie des solutions de viscosité, voir Annexe A. Cette théorie, originellement due à Crandall-Lions [62], fut d'abord motivée par le Contrôle Optimal et les Jeux Différentiels, déterministes ou stochastiques — domaines auxquels se rattachent la plupart des problèmes évoqués ci-dessus. Elle avait pour but initial la caractérisation de la fonction valeur d'un problème de Contrôle Optimal ou de Jeu Différentiel à l'aide de (la notion de solution faible adéquate pour) l'équation (aux dérivées partielles, *edp*) de (Hamilton-Jacobi-)Bellman(-Isaacs) correspondante. Aujourd'hui classique, elle couvre un vaste champ d'applications [59, 14].

Les équations résultant de la modélisation de nos problèmes sont souvent singulières :
• soit qu'il s'agisse d'(in-)équations paraboliques (au sens classique), à conditions aux limites singulières. C'est le plus souvent le cas en finance. On a alors typiquement affaire à des conditions limites en X^+ (partie positive de X), $\mathbf{1}_{\{X>0\}}$ (fonction indicatrice de $X > 0$) ou $\delta_{X=0}$ (masse de Dirac en $X = 0$) ;
• soit qu'il s'agisse d'équations fortement non linéaires. C'est généralement le cas en jeux différentiels, où on traite avec des Hamiltoniens non convexes ; ce peut être également le cas en finance — problèmes américains.

Les singularités de la condition limite dans le premier cas, les non linéarités de l'opérateur dans le deuxième, peuvent être source de singularités dans les solutions : comme on dit en mécanique des fluides, "des chocs se forment". La présence de ces singularités, outre

1. Black, décédé, n'est pas récipiendaire, mais il est cité dans la décision.

qu'elle peut rendre la théorie des équations correspondantes plus compliquée (recours à la théorie des solutions de viscosité discontinues), entraîne des difficultés sur le plan numérique et rend nécessaire la mise en œuvre de techniques de calculs spécifiques, de "capture des chocs". Ces difficultés apparaissent de manière récurrente au fil des travaux présentés dans cette thèse, qu'ils aient trait à la finance (Parties III et IV) ou aux jeux différentiels (Partie II).

Une particularité de nos équations — c'est pour une large part ce qui fonde leur spécificité — est de se prêter souvent à une interprétation probabiliste des solutions, à l'aide de formules de type Feynman-Kac.

La dualité, analytique et probabiliste, des points de vue, peut être, dans certains cas, exploitée, pour combiner les arguments et aboutir, comme dans les Théorèmes 3.8 et 3.10 ou 3.11, Partie IV, à la solution.

Dans d'autres cas, la dualité des points de vue offre un enrichissement possible des résultats, se traduisant en deux énoncés voisins mais dont aucun n'est inclus dans l'autre, comme par exemple à la Proposition 7.7 et au Théorème 8.15, Partie II, pour établir la convergence d'un schéma numérique. Pour ce faire, en effet, deux approches orthogonales se présentent.

La première approche, de type *edp*, utilise des notions de consistance et de stabilité [112], ainsi que de monotonie [17] dans le cas fortement non linéaire des jeux différentiels. On prouve ainsi la convergence des schémas d'approximation vers la solution de l'équation parabolique ou de l'équation d'Isaacs associée au problème de finance ou de jeu — solution éventuellement faible dans un sens à préciser, par exemple solution de viscosité.

La deuxième approche s'inspire de la méthode des caractéristiques pour l'étude des équations hyperboliques [112, 107]. Interprétant les schémas discrets au pas h en termes de chaînes de Markov — (bi-)contrôlées dans le cas des jeux, — on prouve la convergence (faible [34]) de celles-ci vers les trajectoires du jeu différentiel, ou vers le processus sous-jacent en finance. On en déduit la convergence de la solution des problèmes discrets vers la solution du problème de finance ou de jeu, lorsque le pas h tend vers 0.

Chapitre 2

Travaux relatifs aux Jeux Différentiels

L'objet de ce chapitre est triple : présenter brièvement la théorie des jeux ; situer la théorie des jeux différentiels ; évoquer les contributions à cette théorie de notre travail *Jeux Différentiels à instant final variable*, — Partie II de cette thèse, réalisée sous la direction de Pierre Bernhard et Odile Pourtallier (Université de Nice/I3S CNRS et INRIA Sophia-Antipolis), en collaboration avec Alain Rapaport (INRA Montpellier). Une version préliminaire a fait l'objet d'une communication orale [32], et a été acceptée à paraître dans un ouvrage en collaboration [33].

2.1 Jeux statiques et jeux dynamiques

La théorie des jeux [1] a pour objet l'étude mathématique des situations conflictuelles. L'interdépendance entre joueurs est ce qui fait l'essence même de cette théorie. Les domaines initiaux d'application en sont principalement les sciences économiques et les problèmes liés à la défense. Ces deux domaines ont donné lieu à des théories voisines, qui se sont développées dans une large mesure en parallèle. Plus récemment, les applications des jeux dynamiques à la commande robuste ont eu un grand développement.

Tout d'abord, la théorie des jeux a été la théorie des jeux statiques [113]. Cette théorie s'applique à décrire des situations où N agents interfèrent et poursuivent des objectifs conflictuels. Plus précisément, considérons N agents interférant dans l'économie. Chaque agent prend une décision $v_i \in \mathsf{V}_i$, $i = 1 \ldots N$, où V_i est l'ensemble des décisions possibles pour l'agent i. La fonction d'évaluation J_i de l'agent i (par exemple son bénéfice) va dépendre, non seulement de sa décision v_i, mais aussi de la décision des autres agents $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_N$. Ainsi le bénéfice d'une entreprise mettant un bien sur le marché dépend-il de la quantité de ce bien qu'elle met sur le marché, mais aussi des quantités de biens mises sur le marché par les entreprises concurrentes. Dans cet exemple les agents sont les entreprises, et les décisions sont les quantités de biens mises sur le marché. Chaque agent cherchant à maximiser sa propre fonction d'évaluation, on peut chercher les *équilibres de Nash*, à savoir les décisions $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_N$ telles que

$$\left\{\begin{array}{rcl} J_1(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_N) & = & \max\limits_{v_1 \in \mathsf{V}_1} J_1(v_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_N) \\ J_2(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_N) & = & \max\limits_{v_2 \in \mathsf{V}_2} J_2(\overline{v}_1,v_2,\ldots,\overline{v}_N) \\ & \vdots & \\ J_N(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,\overline{v}_N) & = & \max\limits_{v_N \in \mathsf{V}_N} J_N(\overline{v}_1,\overline{v}_2,\ldots,v_N) \end{array}\right.$$

1. On se limite aux jeux non coopératifs.

Les jeux statiques ont trouvé leurs premières applications en économie et sciences sociales [83], si bien que l'on peut trouver, dans l'annonce de la conférence internationale "Game Theory and Applications" (Jérusalem, 1995) la définition de la théorie des jeux comme "une approche rationnelle des sciences sociales" (A. Neymann). Aujourd'hui, l'utilisation de la théorie des jeux dans l'économie reste un domaine de recherche très actif — en 1994 leurs travaux dans ce domaine ont valu à Harsanyi, Nash et Selten le prix Nobel d'économie.

L'intérêt des automaticiens pour les jeux remonte à la fin des années 1950. Les jeux dynamiques, par rapport aux jeux statiques, se caractérisent par l'introduction de variables d'état évoluant au cours du temps suivant une dynamique discrète :

$$x_{n+1} = x_n \ + \ \Delta t_n \ f(x_n,v_1^n,\ldots,v_N^n) \ , \quad x_0 = x \ ;$$

ou continue :

$$\dot{y}^x(t) = f[y^x(t),v_1(t),\ldots,v_N(t)] \ , \quad y^x(0) = x \ .$$

Les N agents prennent alors des décisions à chaque instant du jeu. On voit dans ces formulations que l'évolution de l'état (qui décrit le phénomène étudié) dépend des décisions des agents. De même, on prendra typiquement pour chaque joueur une fonction d'évaluation du type :

$$J_i(x;v_1^{\cdot},\ldots,v_N^{\cdot}) \ = \ \sum_{n=0}^{\nu-1} \Delta t_n l(x_n;v_1^n,\ldots,v_N^n) \ + \ L(x_\nu)$$

ou

$$J_i[x;v_1(.),\ldots,v_N(.)] = \int_0^\tau l_i[y^x(t),v_1(t),\ldots,v_N(t)]dt + L_i[y^x(\tau)] \ ,$$

où l_i correspond à un coût instantané, ν/τ à l'instant final du jeu, premier temps d'atteinte d'une cible $\mathcal{T}$, et L_i à l'évaluation de l'état final. Dans le cas discret, les deux traditions des jeux statiques et dynamiques se retrouvent, la dynamique correspondant aux intertemporalités des économistes (à ne pas confondre avec les jeux répétés classiques). Dans le cas continu, cette modélisation par jeux dynamiques conduit à des difficultés mathématiques importantes. On parle de jeux différentiels. Les motivations initiales des jeux dynamiques étaient militaires. Dans ces applications, l'ensemble des joueurs se limite le plus souvent à deux agents (par exemple un missile et un avion), de contrôle $v_1 \in \mathsf{V}_1$ et $v_2 \in \mathsf{V}_2$, — qu'on renotera dans la suite $u \in \mathsf{U}$ et $v \in \mathsf{V}$, pour alléger les écritures, — ayant des objectifs opposés — jeux à somme nulle, $J_1 = -J_2$. Ainsi $J \equiv J_2$ peut représenter un temps de capture : le premier joueur cherche à minimiser ce temps tandis que le second joueur cherche à le maximiser. C'est précisément le cas lorsque $l \equiv -l_1 = l_2 \equiv 1$ et $L \equiv L_1 = L_2 \equiv 0$. Plus généralement, lorsque L et l sont respectivement inférieurement et inférieurement positivement bornés, on parle de jeu dynamique de poursuite évasion.

2.2 Jeux différentiels à instant final variable

Depuis Isaacs [87], résoudre un jeu différentiel de poursuite évasion consiste à déterminer depuis quelles positions initiales x, en combien de temps τ (ou plus généralement pour quelle valeur du critère J) et à l'aide de quelles stratégies est possible la victoire du poursuivant (τ fini) ou du fugitif (τ infini).

En utilisant la programmation dynamique, la question des temps de victoire (ou plus généralement valeurs du critère J) — *Game of Degree* dans la terminologie d'Isaacs, — conduit formellement à une équation aux dérivées partielles d'Hamilton-Jacobi, appelée dans le cas des jeux équation d'Isaacs :

$$\max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}}\{\langle f(x,u,v),\nabla U(x)\rangle + l(x,u,v)\} = 0 \ , \tag{2.1}$$

vérifiée sous certaines conditions de régularité par la fonction valeur U. La résolution analytique de tels jeux présente d'importantes difficultés. Les méthodes employées ne sont pas systématiques, et sont étroitement liées aux caractéristiques des jeux étudiés. On parle de théorie des jeux dynamiques d'Isaacs-Breakwell-Bernhard. C'est ainsi qu'à ce jour un nombre restreint de jeux ont été résolus. Même des jeux de poursuite évasion d'apparence très simple ne trouvent pas encore de solution satisfaisante. Citons par exemple le jeu des deux voitures, déjà présent dans le livre d'Isaacs [87], et qui n'a à ce jour que des solutions partielles.

Récemment (Rapaport, [116, 117]), et toujours en poursuivant des idées d'Isaacs, la question des domaines de victoire, ou *Game of Kind*, a reçu un traitement dual menant à une inéquation d'Hamilton-Jacobi, dite inéquation d'Isaacs du jeu de poursuite évasion :

$$(\delta^R_{\mathcal{T}}(x) - U(x)) \ \wedge \ \max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}}\langle f(x,u,v),\nabla U(x)\rangle \ = \ 0 \ ,$$

où $\delta^R_{\mathcal{T}}(x)$ est la distance (orientée) à la cible $\mathcal{T}$ (écrétée inférieurement au niveau $-R$, R fixé positif), et U correspond cette fois à la valeur du jeu dit *en distance minimum* (écrétée), de critère :

$$J[x,u(\cdot),v(\cdot)] := \inf_{t\geq 0}\delta^R_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \ .$$

À partir de la surface de niveau 0 de ce nouveau jeu, on peut déduire la barrière du jeu de poursuite évasion précédent, c'est-à-dire la surface séparant les domaines de victoire du poursuivant de celui du fugutif.

Une première contribution de la Partie II de cette thèse *Jeux Différentiels à instant final variable* est de montrer sur un exemple de jeu concret (déjà résolu par Bernhard [29] et Masle [110] dans sa version “poursuite évasion”) comment l'étude “à la main” des jeux de poursuite évasion, selon la méthode d'Isaacs-Breakwell-Bernhard, peut être adaptée aux jeux en distance (et plus généralement en coût) minimum. On obtient alors analytiquement l'existence ou non d'une barrière d'un jeu de poursuite évasion, et sa description éventuelle, comme surface de niveau 0 (si elle existe) du jeu en distance minimum. Mais de même que pour les valeurs des jeux de poursuite évasion, peu de barrières peuvent ainsi être déterminées analytiquement.

2.3 Méthodes numériques pour l'(in-)équation d'Isaacs

Devant ces difficultés analytiques, il est apparu nécessaire de développer des méthodes de résolution numérique. Pour un historique de ces méthodes, on renvoie au livre de Bardi-Capuzzo Dolcetta [9], en particulier les notes bibliographiques des Chapitres VI, VIII, et de l'Appendice A (dû à M. Falcone).

2.3.1 Méthodes numériques dans le cadre des solutions de viscosité

Dans le cadre des solutions de viscosité, les premières publications relatives à des problèmes de jeux différentiels à conditions aux bords de Dirichlet (pour des fonctions valeurs continues) sont Alziary de Roquefort [1] et Bardi-Soravia [12] — ce dernier utilisant les notions de limite faible et conditions aux bords au sens des solutions de viscosité introduites par Barles-Perthame. Ces mêmes notions étaient parallèlement mises en œuvre dans un cadre abstrait général par Barles-Souganidis [17] — cadre couvrant notamment l'adaptation aux jeux par Pourtallier-Tidball [115] de schémas à la Kushner pour le contrôle stochastique [95, 97].

La particularité de cette dernière méthode, par différences finies dans le sens du vent (et qui est celle sur laquelle on se base dans le présent travail), est d'obtenir une approximation de (2.1) qui s'interprète tout naturellement comme l'équation de programmation dynamique d'un jeu stochastique discret [2]. Cela revient donc à l'approximation d'un jeu différentiel (à temps continu) par un jeu stochastique à temps discret. Cette interprétation probabiliste était d'ailleurs le seul outil dont on disposait pour obtenir des résultats de convergence des schémas, avant d'avoir exhibé le "bon" concept de solution de viscosité d'*edp*.

Enfin, le cas des fonctions valeurs des jeux discontinues a été étudié par Bardi *et al.* [8, 7, 11].

2.3.2 Autres méthodes

Depuis les années 1970, on doit également de nombreuses et importantes contributions à ces méthodes numériques (en particulier, et aux jeux différentiels en général) à l'ecole d'Ekaterinburg (voir par exemple Krasovskii, Subbotin et Tarasyev [93, 128, 130, 129]), obtenant indépendamment de nombreux résultats équivalents à ceux de la théorie des solutions de viscosité. Enfin, dans le milieu des années 90, l'approche aux problèmes de contrôle optimal par la théorie de la viabilité débouchait elle aussi sur des méthodes numériques pour les jeux différentiels (voir par exemple Cardaliaguet, Quincampoix et Saint-Pierre [47, 48, 49]).

2.3.3 Contribution à ces méthodes numériques

Le présent travail étudie un schéma à la Kushner pour les jeux différentiels de poursuite évasion, tant du point de vue du *Game of Degree* que de celui du *Game of Kind*. En effet, la dualité entre l'équation et l'inéquation d'Isaacs d'un jeu de poursuite évasion s'illustre de manière particulièrement flagrante dans les algorithmes de résolution numérique, qui fonctionnent de manière analogue dans les deux cas (la raison en étant que l'équation et l'inéquation possèdent des propriétés de structure analogues en termes de solutions de viscosité, voir Annexe A).

Plus précisément, on distingue traditionnellement deux approches dans l'étude des problèmes de (contrôle optimal ou de) jeux différentiels par *edp*: continue et discontinue, voir Barles [14].

Dans l'approche continue, on suppose a priori la continuité de la solution $\mathcal{S}$ (dans un sens à préciser) du jeu différentiel. $\mathcal{S}$ est alors l'unique solution de viscosité de l'(in-)équation d'Isaacs $\mathcal{I}$ du jeu. La faiblesse de cette approche est que l'hypothèse de continuité globale de la solution $\mathcal{S}$ est rarement réalisée en pratique, comme le remarquait déjà Carathéodory [46] à propos d'un problème de navigation en temps minimal, dit problème de Zermélo.

Dans l'approche discontinue, plus réaliste, aucune hypothèse de régularité n'est faite sur $\mathcal{S}$, en dehors du caractère localement borné. En l'absence de théorème d'unicité dans la classe des solutions de viscosité discontinues de l'équation $\mathcal{I}$, on ne peut pas caractériser $\mathcal{S}$ à l'aide de cette classe de solutions. Suivant les travaux de l'école italienne [8, 7],

2. Les jeux dynamiques *stochastiques* à temps discret généralisent leurs homologues déterministes en introduisant des probabilités de transitions $p^{x_{n+1}}(x_n,v_1;\dots,v_N)$ de passer de l'état x_n à l'état x_{n+1} à l'étape n, sachant que les décisions des joueurs à cette étape sont $v_1,\dots,v_N$, voir Partie II, Chapitre 8.

on caractérise alors $\mathcal{S}$ comme solution *enveloppe* (minimum des sur-solutions de viscosité fortes ou maximum des sous-solutions de viscosité de $\mathcal{I}$, suivant qu'on se place en poursuite évasion ou en distance minimum, voir Partie II, Chapitre 5).

Se situant principalement dans l'approche discontinue, on présente dans notre travail des moyens de calcul de ces solutions enveloppes (correspondant aux travaux précités de Bardi *et al.*, dans le cas des jeux de poursuite évasion). Une deuxième contribution de ce travail *Jeux différentiels à instant final variable* (Partie II de cette thèse) consiste alors en une approche numérique pour l'inéquation variationnelle d'Isaacs, c'est-à-dire une approche quantitative pour l'étude du *Game of Kind*, faisant suite aux travaux de Rapaport [116, 117], Pourtallier-Tidball [115], et Bardi *et al.* [7, 8, 9].

Enfin une troisième contribution de ce travail est de présenter nos schémas numériques par jeux à différences finies sur maillages déstructurés, en présentant des conditions géométriques sur ces maillages pour que les schémas convergent. On éclaire ainsi le rôle joué par la géométrie des maillages sur la convergence, en même temps qu'on ouvre la porte à une utilisation élargie de ces schémas, par exemple dans le cadre de problèmes inverses, susceptibles de comporter des données en des points de l'espace arbitrairement distribués.

Chapitre 3

Travaux relatifs à la Finance

Les travaux correspondant aux Parties III et IV de cette thèse s'inscrivent dans une tendance actuelle voyant l'émergence de méthodes numériques par *edp* en finances. C'est ainsi que la Journée du 29 septembre 2000 de l'Association *Frontières en Finance* avait pour thème “Équations aux Dérivées Partielles en Finance” (Organisateurs Rama Cont et Stephane Denise [54]).

En effet, à l'origine, les mathématiques financières se sont davantage tournées du côté du calcul des Probabilités, suivant en cela le chemin tracé par leur fondateur, Louis Bachelier [4]. La première formulation en termes modernes d'*edp* d'un problème d'évaluation/couverture d'options remonte à 1973 (équations de Black-Scholes [36]); et si l'on excepte quelques travaux (par exemple à la CAR dans les années 1980, *e.g.* Barles *et al.* [15], ou encore Jaillet-Lamberton-Lapeyre [91]), l'intérêt des numériciens pour ces problèmes est encore beaucoup plus récent. En effet, d'une part les opérationnels de marché se sont longtemps contentés de modèles discrets arborescents, plus proches de leur intuition; d'autre part, les numériciens ont longtemps considéré les problèmes d'*edp* correspondants comme résolus (problèmes paraboliques), n'ayant pas, faute d'avoir eu l'occasion de les regarder d'assez près, intégré les spécificités financieres de ces problèmes (singularités des fonctions de gain, gestion simulatanée d'un grand nombre d'options et nécessité d'adopter des traitements collectifs).

Finalement, il a fallu attendre les travaux sur la calibration dans la lignée de l'approche de Dupire [68], pour voir émerger réellement des méthodes d'analyse numérique par *edp* en finance. Le raffinement des modèles survenu parallèlement (quoique le modèle de Black-Scholes standard reste en pratique la référence incontournable sur les marchés d'option), et la nécessité de calculs en plusieurs dimensions d'espace, dans des domaines non rectangulaires, a par ailleurs entraîné le recours à des méthodes d'éléments finis.

La recherche correspondant aux Parties III et IV de cette thèse a été développée à partir des travaux réalisés dans le cadre du contrat No 197E685 entre l'INRIA et la CAR (Caisse Autonome de Refinancement, Groupe CDC-Caisse des Dépôts, Paris). Les premières conclusions auxquelles la réalisation du contrat a permis d'aboutir ont fait l'objet d'une présentation orale aux opérationnels de CDC Marchés (le 6 novembre 1997, au Salon Blanc du 98, rue de l'Université à Paris), puis d'un rapport final à la CAR (Crépey [64, Juin 1999]).

Les travaux ici présentés se décomposent en deux parties distinctes, un travail sur un *benchmark* de schémas numériques pour l'évaluation et la couverture de produits dérivés, et un travail sur un algorithme de calibration de la volatilité locale. Ce dernier a été présenté au Séminaire “Modèles Stochastiques en Finance” (R. Cont et N. El Karoui, org.), à l'école Polytechnique, le 30 octobre 2000.

3.1 Enjeux et risques des produits dérivés

On a assisté ces dernières années à une explosion des transactions financières, notamment sur les produits dérivés, rendue possible (suivant une analyse de J.M. Lasry, lors du colloque Risque et Enjeux des Marchés Dérivés, Paris, mars 1995) par les "progrès de l'informatique, une ingéniosité croissante en matière financière, juridique et fiscale, et le développement de modèles mathématiques pour ces problèmes".

L'intérêt des produits dérivés, ou "produits sur produits", est de permettre une meilleure allocation des ressources (échange d'avantages comparatifs) et des risques (transférés vers des spécialistes). Les produits dérivés permettent en effet d'abaisser les coûts de transaction. Ainsi, un *swap* sur taux coûte moins cher que les transactions correspondantes. De même, un *call* coûte moins cher que sa stratégie de réplication, consistant à ajuster à chaque instant, moyennant un coût de transaction, les parts d'actif risqué et de *cash* contenues dans le portefeuille de couverture. Les dérivés permettent aussi une meilleure gestion des risques, plus ciblée, moins coûteuse que le traditionnel recours à un coussin de couverture à l'aide de fonds propres. Enfin, les produits dérivés complètent le marché en externalisant la gestion de certains risques, confiés à des spécialistes de ces produits ; d'où la possibilité d'investir avec moins de fonds propres, et un effet réel sur l'économie.

Des incidents croissants en fréquence et en gravité ces dernières années (par exemple l'affaire Barings en 1987) ont conduit à s'interroger sur la possibilité d'un problème de fond qui serait lié à l'usage de produits dérivés. Les produits dérivés souffrent d'abord d'une complexité non encore maîtrisée et d'une certaine opacité, surtout au niveau des contrôleurs. Ainsi, la plupart des affaires récentes, comme Barings, comportent un aspect de manipulation de comptes et auraient pu être évitées à l'aide d'examens comptables minutieux. On évoque aussi un effet de levier des produits dérivés, qui permettent d'obtenir, en échange d'une prime initiale, un flux terminal aléatoire. En outre, la couverture des dérivés, pouvant conduire à l'acquisition de sous-jacent en cas de hausse des cours et vente en cas de baisse, contribuerait à augmenter la volatilité et donc le risque du marché. Un discours opposé soutient que l'augmentation du nombre de participants due aux dérivés aurait un effet stabilisant sur le marché ; mais en cas de crise, un effet de mimétisme des agents peut inverser cet effet de moyenne. Enfin, les dérivés crééraient du risque systémique (de faillite en chaîne), en donnant une large part à des produits faiblement compensés. Mais les procédés de compensation tendent à se généraliser, tant sur les marchés organisés que dans les transactions de gré à gré.

En conclusion, les accidents mettant en cause des produits dérivés semblent plutôt relever de "maladies infantiles", dues à un manque d'expérience de ces produits, auxquelles la maturité et une mutation perceptible des institutions financières (développement des activités de Contrôle des Risques) devraient finir par remédier. Du reste, d'autres secteurs, comme l'immobilier, ont fait perdre aux banques ces dernières années bien davantage que les produits dérivés.

3.2 Modélisation financière

Sur le plan épistémologique, les mathématiques financières se trouvent a priori dans une position délicate. En effet, le rapport du monde physique aux mathématiques censées les modéliser est particulièrement faible en finance. Ainsi la modélisation des cours de la bourse par des diffusions, même à sauts, est-elle grossièrement simpliste. De même, chacun s'accorde à reconnaître qu'une volatilité, "ça n'existe pas", et que la vraie loi à identifier est celle utilisée par les opérateurs de marché. Cependant, l'utilisation massive par ceux-ci de modèles mathématiques font a posteriori de ces modèles une vraie composante de la réalité financière. Enfin, le prix Nobel d'économie attribué en 1997 à Merton et Scholes (Black, décédé, étant cité dans la décision) pour leurs travaux en mathématiques financières est venu valider, s'il en était encore besoin, le caractère scientifique de cette discipline.

À propos des produits dérivés, les développements mathématiques qui nous intéressent le plus dans cette thèse se rapportent aux *options*, ou droits d'exercer certaines transactions (achats, options *call*, ou ventes, options *put*) lors de diverses échéances, moyennant le paiement d'une prime initiale.

Ainsi, le *call* européen d'échéance T et prix d'exercice K, sur un sous-jacent S, consiste en un contrat, ouvrant droit à acheter une action de sous-jacent à la date T, à la valeur K, quel que soit le cours S_T. À la date T, le détenteur du *call* exerce son option si $S_T > K$, réalisant alors un gain instantanné de $S_T - K$ (en l'absence supposée de coûts de transaction). Si $S_T \leq K$ il n'exerce pas (car ce serait à son détriment), ce qui est loisible. Ce contrat est donc équivalent à un flux terminal de valeur $(S_T - K)^+$ (dépendant de la valeur S_T de l'actif sous-jacent à la date T, d'où la dénomination de produit dérivé, ou produit sur produit). L'intérêt peut être par exemple, pour l'acquéreur d'une telle option, de se prémunir contre des hausses de cours au-delà de K, tout en se réservant la possibilité de bénéficier d'évolutions favorables en deçà.

Au delà de cet exemple élémentaire, il existe une très grande variété d'options. Les plus classiques, dites *vanilla*, sont échangées sur des marchés organisés et servent en outre à en construire de plus complexes, dites exotiques, échangées de gré à gré.

Les problèmes qui se posent sont alors :

— pour l'acheteur d'une telle option, de savoir combien il consent à acquérir le droit qu'elle ouvre (problème de l'évaluation) ;

— pour le vendeur, d'être en mesure d'honorer les transactions exigibles de lui lors des échéances (problème de la couverture).

C'est pour résoudre ces problèmes qu'on recourt à la modélisation mathématique.

Tandis que les opérations de marché se déroulent par définition en temps discret, la modélisation mathématique utilise surtout le temps continu. C'est en effet ainsi qu'on obtient les développements les plus substantiels, quitte ensuite à discrétiser pour résoudre numériquement et retrouver le séquencement des ordinateurs.

Dans toute la partie de thèse relative à la finance, on utilisera le plus souvent le modèle (lognormal) de Black-Scholes unidimensionnel, comme sous-jacent sur lequel porte l'option.

Ce modèle fut introduit en 1973 par les auteurs dont il porte le nom, et rendu rapidement célèbre par ses qualités pratiques en terme de couverture sur les marchés d'option [36]. En effet, autant en physique les lois naturelles imposent des contraintes très fortes sur les modèles, autant en finances, on n'a pas de telles lois[1]. De plus, les approches historiques sont peu opérantes en finances, l'identification de paramètres ou le test d'une hypothèse d'adéquation de modèle avec un seuil de confiance raisonnable requerrant banalement un jeu d'observations qui, pris au jour le jour sur les marchés financiers, serait étalé sur plusieurs (centaines d')années. Par conséquent, on s'en tient à des modèles simples, même irréalistes — tel le modèle lognormal unidimensionnel, qui a ainsi les vertus d'être explicite et d'offrir l'intuition d'un rendement moyen plus un bruit constant (la volatilité), mais représente tout de même un cas extrême, fréquemment enrichi : modèles à sauts, modèles à volatilité stochastique (dont, comme on le verra dans la Partie IV de cette thèse, modèle lognormal à volatilité variable), ...

1. Sauf peut-être la théorie générale de l'équilibre, mais comme le remarquait Denis Talay (Conférence de techniques avancées de gestion de portefeuille, Nice-Sophia-Antipolis, octobre 1997), on n'a jamais dérivé de dynamique de prix "équilibre-compatible".

Dans ce contexte, on comprend également que la précision recherchée pour les calculs puisse être moindre qu'en physique, eu égard à la moins bonne spécification des modèles. La nécessité de calcul en temps réel, plusieurs fois par jour, en salle des marchés, impose en revanche une contrainte de vitesse de calcul accrue par rapport aux problèmes de physique (EDF fait tourner plusieurs semaines son plus gros Cray pour évaluer par une méthode de Monte-Carlo un coefficient de fiabilité d'une centrale nucléaire).

On supposera les hypothèses habituelles (quoique grossièrement irréalistes) de marchés financiers liquides, sans arbitrages (absence d'écart entre l'offre et la demande, existence à chaque instant d'acheteurs et de vendeurs, absence d'opportunité de placement sans risque rapportant plus que le taux court de l'économie r), et parfaits (absence de restrictions juridiques, légales ou financières sur les ventes à terme, absence de coûts de transactions), voir El Karoui [69].

Sous ces hypothèses, et par exemple dans le modèle de Black-Scholes, on a par des considérations d'arbitrage une probabilité risque-neutre P (unique, dans un marché complet, par exemple le modèle de Black-Scholes sous les hypothèses précedentes), sous laquelle le cours du sous-jacent actualisé au taux r est une martingale, et le prix d'une option (européenne), ou prime initiale d'un portefeuille autofinançant qui duplique l'option, est une espérance actualisée au taux r du gain de l'option à l'échéance. Étant donnée l'inefficience de la probabilité historique dans ce contexte, et la prééminence de cette probabilité risque-neutre P, on se placera directement dans les travaux de cette thèse sous la probabilité P, en passant sous silence la probabilité historique, pour alléger les notations.

On constate au passage que le paramètre déterminant du modèle est la volatilité, c'est-à-dire la composante stochastique de la dynamique, — la composante déterministe sous la probabilité risque-neutre P se ramenant à une dérive au taux court de l'économie r, quelle que soit la tendance réelle du sous-jacent sous la probabilité historique. La situation est donc inversée par rapport aux modèles stochastiques de la physique, dans lesquels la dérive (déterministe) est en général l'élément essentiel, auquel vient parfois s'ajouter un bruit, pour traduire une information incomplète sur le système, ou l'existence d'une perturbation.

3.3 Méthodes directes et problèmes inverses

On peut distinguer deux grands champs d'application des méthodes numériques par *edp* en finances (voir [54, Vol. I et II]). Les méthodes directes visent à traiter les problèmes d'évaluation/couverture de produits dérivés, à partir de données exogènes relatives à leurs sous-jacents; les méthodes inverses, s'attachent au contraire à inférer des données relatives aux sous-jacents, à partir de prix observés sur les marchés d'options (en vue d'utiliser les données ainsi calibrées, à des fins d'évaluation/couverture d'autres produits).

On peut de fait voir les deux travaux présentés dans les Parties III et IV de cette thèse, comme un exposé de techniques et résultats numériques par *edp* relatifs à des problèmes d'évaluation/couverture d'options d'une part (Partie III), et d'autre part (Partie IV) l'étude mathématique d'un problème inverse de calibration.

3.3.1 *Benchmark* de schémas numériques

Ce premier travail, exposé dans la Partie III de cette thèse intitulée *Évaluation et couverture de produits dérivés* — Benchmark *de schémas numériques par différences ou éléments finis*, a été réalisé sous la direction de Pierre-Louis Lions[2], avec la collaboration

2. Alors consultant à la CAR, Professeur à l'Université Paris IX.

d'Éric Fournié[3]. Il présente des aspects de l'analyse numérique appliquée à la finance. L'objectif est l'évaluation des produits dérivés, et de leur sensibilité par rapport à divers paramètres d'intérêt. Ces sensibilités, ou *Grecs*, interviennent en effet dans les calculs de couverture. Ce *benchmark* numérique est pour nous l'occasion d'évoquer de nombreuses techniques mathématiques de résolution des *edp* pour aborder les problèmes d'estimation et de couverture. Certaines d'entre elles peuvent être soulignées comme présentant des éléments nouveaux — principalement dus à P.-L. Lions, — concernant en particulier:
— l'évaluation d'une option à bords courbes ;
— l'évaluation d'une option à *payoff* (fonction de gain) discontinue ;
— l'évaluation d'un *put* asiatique, européen ou américain ;
— le calcul de prix d'options à l'aide d'arbres à cinq branches, plutôt qu'à deux ou trois branches, selon l'usage en vigueur sur les marchés financiers.

Les méthodes d'éléments finis présentées à titre de comparaison pour les problèmes à bords courbes décrits dans cette Partie de thèse sont dues à Jerôme Busca.

3.3.2 Calibration d'une nappe de volatilité locale

Le second travail, *Sur un algorithme de calibration de la volatilité locale*, a été réalisé sous la direction de Henri Berestycki[4], avec la collaboration de Jérôme Busca[5]. Il concerne le calibrage de la volatilité d'un sous-jacent en fonction des prix des produits dérivés observés sur le marché, suivant une modélisation de S. Osher et R. Lagnado [99]. Mathématiquement, le problème obtenu a la structure standard d'un problème de contrôle optimal d'équations aux dérivées partielles. Ici le contrôle est la volatilité, fonction du temps et du cours du sous-jacent. Le critère est le résidu quadratique des valeurs calculées avec ce contrôle par rapport aux prix observés sur le marché. De plus, on ajoute un terme de régularisation afin d'obtenir une nappe de volatilité suffisamment régulière, compatible avec l'idée que s'en font les opérationnels. En dépit de cette structure standard, la manière dont le contrôle apparaît dans les équations rend difficile l'obtention de résultats mathématiques sur ce problème (ceci deviendrait encore plus vrai en dimension supérieure d'espace, lorsque le dérivé peut dépendre de plusieurs sous-jacents). Notre effort porte donc, d'une part, sur les aspects mathématiques de ce problème, tels que la recherche de résultats d'existence, unicité et stabilité du contrôle optimal (sous hypothèse de régularisation); d'autre part, il s'agit de déterminer numériquement une nappe de volatilité lisse qui reproduise aussi bien que possible les prix de marché (en calculant au passage une fonction de Green).

3. Alors ingénieur financier à la CAR, PAST à l'Université Paris VI.
4. Alors consultant à la CAR, Professeur à l'Université Paris VI.
5. Alors stagiaire à la CAR, Doctorant à l'Université Paris VI.

Chapitre 4

Conclusion générale

Si l'on excepte l'équation d'Euler (10.2), partie IV, tous les problèmes traités dans cette thèse tombent dans le champ de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante — T pouvant être infini, et/ou l'équation posée sur un sous-domaine en espace, moyennant l'introduction d'une condition au bord :

$$\begin{cases} \partial_t u - H(t,x,u,\nabla u) - \frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^t\mathcal{H}u) + \rho u \wedge (u-\psi) = \Gamma, \quad t < T \\ u|_T \equiv \varphi \end{cases} \tag{4.1}$$

— gradient (matrice Hessienne) en espace $\nabla(\mathcal{H})$.

Le cas des jeux différentiels correspond au cas limite d'un Hamiltonien H fortement non linéaire, et d'une volatilité σ entièrement dégénérée ($\sigma \equiv 0$; ce qui ne fait qu'accroître la difficulté du problème, car un terme de diffusion est doté de propriétés régularisantes). Les problèmes de finance représentent un autre cas extrême où H est linéaire, la difficulté provenant alors souvent de la présence d'obstacles ψ, ou de conditions terminales φ singulières.

Une particularité de l'équation (4.1) est de se prêter à une interprétation trajectorielle, en termes de l'équation suivante :

$$dx_s = \mu ds + \sigma dw_s$$

— éventuellement contrôlée, et assortie de temps de sortie ou d'arrêt τ. Dans le cas déterministe, on parle de *méthode des caractéristiques* ; obtenant dans le cas stochastique des formules de type Feynman-Kac.

L'équation (4.1) n'est pas nouvelle. Son analogue sous forme divergence a reçu un traitement systématique dans les années 1970 (synthétisé par exemple dans le livre de Bensoussan-Lions [24]), à l'aide de méthodes d'énergie (formulations variationnelles), dans un contexte de solutions fortes d'*edp*. L'équation (4.1), sous forme non-divergence, a ensuite pu être étudiée dans les contextes successifs de solutions de viscosité (années 1980) puis $W^{1,2}_{p,loc}$-solutions de viscosité (années 1990), à l'aide de principes du maximum.

Les divers travaux de cette thèse peuvent être vus comme des ramifications de ces recherches, dans un contexte de solutions discontinues (cas des jeux), ou (cas de la finance) pour des problèmes posés dans tout l'espace, (pour le problème de calibration) à coefficients principaux σ/mineurs, (seulement) continus/mesurables. Des méthodes de régularisation permettent d'aborder ces problèmes au plan numérique.

Deuxième partie

Jeux Différentiels à instant final variable

Ce travail est d'abord un état de l'art de l'approximation numérique par *edp* pour la résolution des jeux différentiels de poursuite évasion. On adopte un point de vue unifié permettant de traiter à la fois le *Game of Degree* : calcul de la valeur du jeu de capture évasion, ou résolution de l'équation d'Isaacs associée à ce jeu ; et le *Game of Kind* : détermination de la barrière du jeu de poursuite évasion, *via* la résolution d'une inéquation d'Hamilton-Jacobi, appelée inéquation d'Isaacs, associée à un nouveau jeu différentiel, en coût (distance) minimum.

On présente un schéma numérique par jeux à différences finies sur maillage déstructuré, afin de faire ressortir les propriétés géométriques des maillages essentielles à la convergence du dit schéma, et d'étendre l'utilisation possible de ce schéma, par exemple à des problèmes inverses.

La résolution analytique complète d'un jeu concret, dans ses deux versions *Kind* et *Degree*, vient par ailleurs montrer comment adapter au *Game of Kind* les techniques à la Isaacs-Breakwell-Bernhard de calcul des valeurs des jeux.

Ce travail a été réalisé sous la direction conjointe de Pierre Bernhard (Université Nice /I3S CNRS) et Odile Pourtallier (INRIA Sophia Antipolis), en collaboration avec Alain Rapaport (INRA Montpellier). Une version préliminaire a fait l'objet d'une communication orale [32] et a été acceptée à paraître dans un ouvrage en collaboration [33].

Chapitre 1

Introduction

On poursuit dans cette Partie l'étude initiée par Alain Rapaport [116, 117] des jeux différentiels à instant final variable: jeux de poursuite évasion ou jeux en coût minimum. Ceux-ci permettent de développer une approche unifiée par équations aux dérivées partielles (*edp*) des aspects tant quantitatifs que qualitatifs des jeux différentiels de poursuite évasion. Le problème quantitatif, ou *Game of Degree* [87] conduit à l'étude de l'équation d'Isaacs du jeu de poursuite évasion. Le problème qualitatif, ou *Game of Kind* [87], concerne notamment la détermination d'une barrière éventuelle, séparant une zone de capture d'une zone d'évasion du jeu. Ce problème peut pour sa part être appréhendé à travers l'étude d'une inéquation variationnelle, qu'on appellera dans ce travail inéquation d'Isaacs du jeu de poursuite évasion. Il s'agit en fait de l'équation d'Isaacs d'un nouveau jeu différentiel, en distance minimum [20, 21].

Décrivons le plan de ce travail. Le Chapitre 3 présente les jeux différentiels à instant final variable, jeux de poursuite évasion ou en coût minimum, tels qu'ils furent introduits initialement par Isaacs [87], et étudiés par Alain Rapaport [116, 117]. Le Chapitre 4 illustre sur l'exemple d'un jeu concret les concepts généraux ainsi introduits. Cet exemple est issu de la modélisation d'un problème de servomécanisme. Le jeu de poursuite évasion correspondant avait été introduit et résolu analytiquement par Pierre Bernhard et J.-F. Masle [29, 110]. On présente ici une résolution analytique du jeu en distance minimum. Celle-ci débouche sur une détermination de la barrière du jeu de poursuite évasion, quelles que soient les valeurs des paramètres du jeu — tandis que l'étude de Bernhard-Masle avait laissé ouverte la question de l'existence ou non d'une barrière, pour certaines valeurs des paramètres. Le Chapitre 5 décrit les liens existant entre les fonctions valeurs de nos jeux et leurs équations d'Isaacs. Par valeur du jeu, on entend ici la valeur VREK inférieure, ou plus exactement sa transformée de Kruzkov [133, 121, 71]. Mais on pourrait obtenir des résultats analogues concernant la valeur VREK supérieure. Ainsi obtient-on également des résultats d'existence de (valeurs de) points-selles pour nos jeux.

On étudie ensuite un schéma d'approximation par jeux à différences finies pour les fonctions valeurs de nos jeux. Le Chapitre 6 introduit le dit schéma, dont une particularité est de pouvoir également s'interpréter comme l'approximation de nos jeux différentiels par des jeux discrets stochastiques. Initialement introduits par Kushner pour résoudre numériquement des problèmes de contrôle optimal [95], de tels schémas furent adaptés aux jeux par Pourtallier et Tidball [115] ; ils relèvent par ailleurs du cadre abstrait général défini par Barles et Souganidis [17] et également considéré dans Bardi *et al.* [8, 11] ; ils sont en outre voisins de schémas obtenus par approximation d'Euler de la dynamique (Bardi, Bottacin, Capuzzo-Dolcetta, Falcone, Soravia [12, 10, 8, 7, 125, 11]). On obtient en effet dans ce cas comme dans l'autre des schémas d'approximation par différences finies de la solution de viscosité [59, 14] de l'équation d'Isaacs [87] du jeu. On présente ici un schéma sur maillage déstructuré, afin d'éclaircir le rôle de la géométrie du maillage sur la convergence, et d'étendre l'utilisation possible d'un tel schéma à des classes de problèmes plus générales — on pense en particulier aux problèmes inverses. Au Chapitre 7, on présente les résultats de convergence double (voir Bardi *et al.* [8, 7]) du schéma vers les solutions enveloppes de viscosité de nos jeux (par application des résultats généraux de Barles et Souganidis [17]). A cause des discontinuités de ces dernières, on est en effet obligé d'introduire une famille de jeux différentiels approximants, caractérisés par une dilatation de la cible dans le cas des jeux de poursuite évasion, ou une pénalité en temps dans le cas des jeux en distance minimum. L'application du schéma par jeux à différences finies aux termes successifs de cette famille fournit la convergence annoncée. Chapitre 8, on exploite l'interprétation "jeux discrets stochastiques" de ce schéma, pour obtenir — dans le cas des jeux de poursuite évasion — des résultats de convergence simple. Ces résultats sont obtenus sous des hypothèses de régularité locale (mais néanmoins restrictives), qui n'excluent pas, a priori, la présence de discontinuités dans les fonctions valeurs de nos jeux. Chapitre 9, on présente des résultats d'expériences numériques sur le problème du servomécanisme résolu analytiquement Chapitre 4. La Conclusion évoque des approches alternatives.

Mais d'abord, le Chapitre 2 rassemble une série de Lemmes élémentaires, auxquels le lecteur sera invité à se référer au fil de l'exposé. Avant tout,

Définition 1.1 *Posant* $e^{-\infty} \equiv 0$*, on appelle* transformation de Kruzkov*, notée* ϕ*, l'application :*

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \; =: \; \widetilde{\mathbb{R}} \; \ni \; t \xrightarrow{\phi} \phi(t) = 1 - \exp(-t) \in \mathbb{R} \; , \tag{1.1}$$

ou de manière équivalente :

$$1 - \phi(-t) \; = \; e^t \; .$$

Chapitre 2

Lemmes élémentaires

Lemme 2.1 *ϕ désignant la transformation de Kruzkov (1.1),*

a. *ϕ est (strictement) croissante et concave sur $\widetilde{\mathbb{R}}$, Lipschitzienne sur toute partie inférieurement bornée de $\widetilde{\mathbb{R}}$;*

b. *pour toute séquence finie de réels x,y,$z\cdots$,s,t, on a :*

$$\begin{aligned}&\phi(x+y+z+\cdots+s+t)\\&=\phi(x)+\exp(-x)\phi(y)+\exp(-x-y)\phi(z)+\cdots+\exp(-x-y-z\cdots-s)\phi(t)\\&=\phi(x)+[1-\phi(x)]\phi(y)+[1-\phi(x+y)]\phi(z)+\cdots+[1-\phi(x+y+z+\cdots+s)]\phi(t)\ .\end{aligned}$$

c. *Pour toutes fonctions réelles l et L sur $\mathbb{R}_+$, l positive ou nulle localement sommable :*

$$\phi\left(\int_{s=0}^{t} l(s)ds \ + \ L(t)\right) \ = \ \int_{s=0}^{t}\lambda(s)l(s)ds \ + \ \lambda(t)S(t)$$

$(t\geq 0)$, $\lambda(s)\equiv\exp(-\int_0^s l)$, $S\equiv\phi\circ L$.

Preuve

a. En effet, $\phi'(t)\equiv e^{-t}$ est positive sur $\mathbb{R}$, bornée sur toute partie inférieurement bornée de $\mathbb{R}$. $\phi''(t)\equiv -e^{-t}$ est négative sur $\mathbb{R}$.

b. Par récurrence sur le nombre d'arguments de ϕ, en utilisant la propriété de morphisme de l'exponentielle.

c. Par b,

$$\phi\left(\int_{s=0}^{t} l(s)ds \ + \ L(t)\right) \ = \ \phi\left(\int_0^t l\right) \ + \ \lambda(t)S(t)\ ,$$

où, $\phi(\int_0^t l)$ étant l'intégrale de sa dérivée (dérivée t-presque partout, voir par exemple Rudin [123, Théorèmes 8.17 et 8.18]),

$$\phi(\int_0^t l) \ = \ \int_0^t \lambda l\ , \quad t\geq 0\ .$$

□

Lemme 2.2 *Pour tous réels a,b,c,d,e,f, on a les relations suivantes :*

i.

$$a\wedge b\leq c\wedge d \quad si \quad \left\{\begin{array}{l} a\leq c\\ b\leq d\ .\end{array}\right.$$

ii.

$$0\leq c\wedge b-c\wedge a\leq b-a \quad si \quad a\leq b \quad ; \quad |c\wedge b-c\wedge a|\leq|b-a|\ .$$

iii.

$$a \wedge b - c \wedge d \geq e \wedge f \quad si \quad \left\{ \begin{array}{l} a - c \geq e \\ b - d \geq f. \end{array} \right.$$

iv.

$$|a \wedge b - c \wedge d| \leq e \vee f \quad si \quad \left\{ \begin{array}{l} |a - c| \leq e \\ |b - d| \leq f. \end{array} \right.$$

Preuve Dans toutes ces preuves, on peut supposer $a \leq b$, par hypothèse ou symétrie. Alors :

i.

$$a \wedge b = a \leq c \wedge d\,;$$

ii.

$$c \wedge b - c \wedge a = \left\{ \begin{array}{l} 0 \ \text{ si } \ c \leq a \\ c - a \ \text{ si } \ a \leq c \leq b \\ b - a \ \text{ si } \ b \leq c\ ; \end{array} \right.$$

iii.

$$a \wedge b - c \wedge d = \left\{ \begin{array}{l} a - c \geq e \geq e \wedge f \ \text{ si } \ c \leq d \\ a - d \geq a - c \geq e \ \text{ sinon } \ ; \end{array} \right.$$

iv. si $c \leq d$,

$$|a \wedge b - c \wedge d| = |a - c| \leq e\ ;$$

sinon,

$$|a \wedge b - c \wedge d| = |a - d| = (d - a) \vee (a - d) \leq (c - a) \vee (b - d) \leq (e \vee f)\ .$$

$\square$

Lemme 2.3 *Étant donnée une fonction à valeurs réelles étendues f, définie sur un ensemble non vide X; alors, pour tout réel s,*

$$\sup_X (s \wedge f) \ = \ s \wedge \sup_X f\ .$$

Preuve Si $\sup_X f \leq s$, soit encore $f \leq s$, $s \wedge f \equiv f$, alors

$$\sup_X (s \wedge f) \ = \ \sup_X f \ = \ s \wedge \sup_X f\ ;$$

sinon, il existe une suite f_n de valeurs de f, tendant (dans $\overline{\mathbb{R}}$) vers une limite $l \geq s$, quand $n \to +\infty$, mais alors

$$s \ \geq \ \sup_X (s \wedge f) \ \geq \ \limsup_{n \to +\infty} (s \wedge f_n) \ = \ s \wedge l \ = \ s \ = \ s \wedge \sup_X f\ .$$

$\square$

Lemme 2.4 *Notons $\mathcal{C}$ la classe des fonctions réelles (uniformément) continues, sur le produit (compact) des ensembles non vides, alors supposés compacts, U et V. Pour toutes fonctions réelles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$, on a :*

a. dans $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \leq \inf_{\mathsf{U}} \sup_{\mathsf{V}} \mathcal{F}\ ;$$

on appellera en conséquence valeur inférieure (respectivement supérieure) de $\mathcal{F}$, le membre de gauche (respectivement droite) de l'inégalité ci-dessus ;

b. si de plus $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, alors $\mathcal{F}$ atteint ses extrema, extrema partiels, et valeurs inférieures ou supérieures, c'est-à-dire pour $(u,v) \in \mathsf{U} \times \mathsf{V}$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} \mathcal{F} &= \max_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} \mathcal{F} \\
\inf_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} \mathcal{F} &= \min_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} \mathcal{F} \\
\inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v) &= \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v) \\
\sup_{\mathsf{V}} \mathcal{F}(u,\cdot) &= \max_{\mathsf{V}} \mathcal{F}(u,\cdot) \\
\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} &= \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \\
\inf_{\mathsf{U}} \sup_{\mathsf{V}} \mathcal{F} &= \min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} \mathcal{F} \ ;
\end{aligned}$$

c. si $\mathcal{F} \le \mathcal{G}$,

$$\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \le \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{G} \ ;$$

soit, pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ (voir b) :

$$\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \le \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{G} \ ;$$

on dira que l'opérateur de maxi-minimisation est monotone sur $\mathcal{C}$;

d. si $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{G} > 0$, alors $\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}\mathcal{G}$ et $\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}$ ont le même signe (simultanément ≤ 0 ou ≥ 0) ;

e.

$$\begin{aligned}
\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} - \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{G} &\le \sup_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} (\mathcal{F} - \mathcal{G}) \\
|\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} - \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{G}| &\le \sup_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} |\mathcal{F} - \mathcal{G}| \ ;
\end{aligned}$$

f. quand $n \to +\infty$,

$$\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}_n \to \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}$$

dans $\mathbb{R}$, si $\mathcal{F}_n$ tend vers $\mathcal{F}$ uniformément dans $\mathcal{C}$;

g. ϕ désignant la transformation de Kruzkov (1.1),

$$\phi(\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}) = \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} (\phi \circ \mathcal{F})$$

si $\mathcal{F}$ inférieurement bornée, où les valeurs inférieures sont atteintes si de plus $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$;

h. Pour tout réel s,

$$\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} (s \wedge \mathcal{F}) = s \wedge \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \ , \qquad \inf_{\mathsf{U}} \sup_{\mathsf{V}} (s \wedge \mathcal{F}) = s \wedge \inf_{\mathsf{U}} \sup_{\mathsf{V}} \mathcal{F} \ ,$$

soit si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$,

$$\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} (s \wedge \mathcal{F}) = s \wedge \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \ , \qquad \min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} (s \wedge \mathcal{F}) = s \wedge \min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} \mathcal{F} \ .$$

Preuve

a. En effet, pour tout $(u,v) \in \mathsf{U} \times \mathsf{V}$:

$$\inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v) \le \mathcal{F}(u,v) \le \sup_{\mathsf{V}} \mathcal{F}(u,\cdot) \ .$$

b. Les quatre premières identités résultent de la continuité totale puis partielle de $\mathcal{F}$ par rapport à ses arguments u et v, sur le produit des compacts U et V. On a alors, pour $\varepsilon > 0$, et v suffisamment proche de v' :

$$\begin{aligned} -\varepsilon \leq \mathcal{F}(u,v) - \mathcal{F}(u,v') &\leq \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v) - \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v') \\ &\leq \mathcal{F}(u',v) - \mathcal{F}(u',v') \leq \varepsilon \ , \end{aligned}$$

où u et u' sont tels que :

$$\mathcal{F}(u,v) = \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v) \ , \qquad \mathcal{F}(u',v') = \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v') \ .$$

La fonction $v \to \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(\cdot,v)$ est donc (uniformément) continue, sur le compact V. Elle y atteint donc son maximum, ce qu'exprime, vues les précédentes, l'avant-dernière identité, dont la dernière se déduit par application à $-\mathcal{F}$.

c. Si $\mathcal{F} \leq \mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}(\cdot,v) \leq \mathcal{G}(\cdot,v)$ pour tout v, donc $\inf_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{F}(u,v) \leq \inf_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{G}(u,v)$. Puis $\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(u,v) \leq \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{G}(u,v)$.

d. On a, par positivité de $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F}\mathcal{G} \geq 0 &\Leftrightarrow \exists v \ ; \ \forall u, \ \mathcal{F}(u,v)\mathcal{G}(u,v) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \exists v \ ; \ \forall u, \ \mathcal{F}(u,v) \geq 0 \ \Leftrightarrow \ \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{F} \geq 0 \ . \end{aligned}$$

Le cas ≤ 0 se prête à un calcul analogue.

e. Car $\mathcal{F} \leq \mathcal{G} + \sup_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}}(\mathcal{F}-\mathcal{G})$, d'où d'après c la première inégalité dans e. La deuxième s'en déduit en considérant conjointement l'inégalité obtenue en échangeant le rôle de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$.

f. Corollaire immédiat de e.

g. Par croissance de ϕ, vue au Lemme 2.1.a,

$$\phi(\sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}) = \sup_{v\in\mathsf{V}} \phi(\inf_{\mathsf{U}} \mathcal{F}(.,v)) = \sup_{\mathsf{V}} \inf_{\mathsf{U}} \ \phi \circ \mathcal{F} \ .$$

Si $\mathcal{F}$, et donc, toujours d'après le Lemme 2.1.a, $\phi \circ \mathcal{F}$, appartiennent à $\mathcal{C}$, on applique de plus le b.

h. Appliquer le Lemme 2.3 (et remarquer que $s \wedge \mathcal{F} \in \mathcal{C}$ si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$, par exemple en vertu du Lemme 2.2.ii).

$\square$

Lemme 2.5 *Soit Ω un ouvert, $\mathcal{T}$ son complémentaire dans $\mathcal{E} := \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$.*

a. Ω et $\mathcal{T}$ ont le même bord, qu'on notera Γ.

b. Γ est vide si et seulement si $\mathcal{T}$ ou Ω est vide, ce que l'on exclut dans les point suivants de ce lemme.

c. Notons alors $\delta_{\mathcal{T}}(x)$ la distance orientée du point x à $\mathcal{T}$, c'est-à-dire, par définition, plus ou moins la distance Euclidienne $d_\Gamma(x)$ de x à Γ selon que $x \in \Omega$ ou $x \in \mathcal{T}$. On introduit également $\delta_{\mathcal{T}}^R \equiv (-R) \vee \delta_{\mathcal{T}}$ (R fixé > 0), cette distance orientée écrétée inférieurement au niveau $-R$. Notons enfin, pour $\varepsilon > 0$,

$$\mathcal{T}_\varepsilon \ \equiv \ \{x \in \mathcal{E} \,|\, d_{\mathcal{T}}(x) \leq \varepsilon\} \ ,$$

de bord Γ_ε. Alors les fonctions $\delta_{\mathcal{T}}$ ou $\delta_{\mathcal{T}}^R$ sont Lipschitziennes, et les ensembles $\mathcal{T}_\varepsilon$ sont fermés, comme $\mathcal{T}$.

d. *Sous l'hypothèse que $\mathcal{T}$ est convexe (plus généralement, proximalement lisse [53]), alors Γ_ε est une variété régulière de classe $\mathcal{C}^1$, pour ε assez petit > 0.*

Preuve

a. Par définition, le bord $\partial\Omega$ ne rencontre pas $\overset{\circ}{\Omega}$, qui coïncide avec Ω puisque celui-ci est ouvert. Donc $\partial\Omega \subseteq \mathcal{T}$. De plus, quel que soit $x \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}$, l'ouvert $\overset{\circ}{\mathcal{T}}$ contient une boule centrée en x d'intérieur non vide, qui ne rencontre donc pas Ω. Donc x ne peut appartenir à $\partial\Omega$, qui ne rencontre donc pas $\overset{\circ}{\mathcal{T}}$. Ceci joint à $\partial\Omega \subseteq \mathcal{T}$ prouve $\partial\Omega \subseteq \partial\mathcal{T}$. Réciproquement, tout point $x \in \partial\mathcal{T}$ est limite de points de Ω (sinon $x \in \overset{\circ}{\mathcal{T}}$). Donc $\partial\mathcal{T} \subseteq \overline{\Omega}$. De plus, $\mathcal{T}$ étant fermé, on a $\partial\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ ne rencontre pas Ω, alias $\overset{\circ}{\Omega}$. Joint à $\partial\mathcal{T} \subseteq \overline{\Omega}$, ceci prouve $\partial\mathcal{T} \subseteq \partial\Omega$. Finalement, $\partial\Omega = \partial\mathcal{T} = \Gamma$.

b. Γ vide équivaut à $\Omega = \overline{\Omega}$, fermé. Ω est alors simultanément ouvert et fermé dans le connexe $\mathcal{E} = \mathbb{R}^r$, donc l'un des ensembles Ω ou $\mathcal{T}$ est vide.

c. La distance orientée à un ensemble $\mathcal{T}$ non vide est Lipschitzienne (voir par exemple Delfour [65]). Cette même distance écrétée est alors à son tour Lipschitzienne, en vertu du Lemme 2.2.ii. $\mathcal{T}_\varepsilon$ est enfin fermé, comme ensemble de niveau inférieur ou égal à ε d'une fonction continue sur $\mathcal{E}$.

d. Car alors d_Γ est de classe $\mathcal{C}^1$, $\nabla d_\Gamma \neq 0$, sur $\{d_\Gamma < \overline{\varepsilon}\}$ ($\overline{\varepsilon}$ assez petit positif), voir Clarke *et al.* [53, p. 133 et 135].

□

Chapitre 3

Généralités

3.1 Définitions et hypothèses

On note toujours $\mathcal{E}$ l'espace d'état $\mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, muni de sa norme Euclidienne $\|\cdot\|$.

Définition 3.1 *Nous considérons dans ce travail des jeux différentiels (à deux joueurs, somme nulle) à instant final variable, formellement définis par :*
• *une dynamique,*

$$\begin{cases} \dot{y}^x(t) = f(y^x(t),u(t),v(t)),\ t \geq 0 \\ y^x(0) = x\ , \end{cases} \tag{3.1}$$

où $u(t) \in \mathsf{U}$ compact Euclidien non vide (respectivement $v(t) \in \mathsf{V}$ compact Euclidien non vide) est le contrôle du minimiseur "u" (respectivement maximiseur "v") ;
• *un critère, $J^x \equiv J^x(\tau)$ (*jeu de poursuite évasion *pe), ou $J^x = \inf_{t\in\mathbb{R}_+} J^x(t)$ (*jeu en coût minimum *cm), où pour $t \in \mathbb{R}_+$:*

$$\begin{aligned} & J^x(t) \equiv J^x_{u(.),v(.)}(t) := \int_0^t l[y^x(s),u(s),v(s)]ds\ +\ L[y^x(t)]\ \in \mathbb{R} \\ & et\ J^x(+\infty) := +\infty\ . \end{aligned} \tag{3.2}$$

En poursuite évasion, $\tau \equiv \tau^x_{u(\cdot),v(\cdot)} \in \overline{\mathbb{R}}_+$ désigne le temps de sortie d'un domaine ouvert $\emptyset \subset \Omega \subseteq \mathcal{E}$, c'est-à-dire de capture par la cible $\mathcal{T} \equiv \mathcal{E} \setminus \Omega$, ou encore d'atteinte du bord (Lemme 2.5) Γ, dans le flot contrôlé (3.1).

Enfin, si le critère est $I := \phi \circ J \in \mathbb{R}$ au lieu de $J \in \widetilde{\mathbb{R}}$, où ϕ désigne la transformation de Kruzkov (1.1), on parlera de transformée de Kruzkov du jeu, ou jeu transformé.

Hypothèse 3.2 *Dans toute la suite, par jeu (différentiel à instant final variable) $\mathcal{G}$, de poursuite évasion ou en coût minimum, on entendra par défaut un tel jeu vérifiant les hypothèses suivantes :*
• *continuité de la paire constituée par la dynamique et le Lagrangien*

$$(x,u,v) \in (\mathcal{E},\mathsf{U},\mathsf{V}) \xrightarrow{(f,l)} (f,l)(x,u,v) \in \mathcal{E} \times \mathbb{R}\ ,$$

et Lipschitz continuité de la dynamique f (et continuité uniforme du Lagrangien l, en coût minimum) par rapport à x, uniforme en (u,v) ;
• *continuité (uniforme en coût minimum) de la composante terminale L du coût :*

$$x \in \mathcal{E} \xrightarrow{L} L(x) \in \mathbb{R}\ ;$$

- *existence de réels* $\underline{f},\overline{f},\underline{l},\overline{l},\underline{L}$, *tels que pour tout* $(x,u,v) \in \mathcal{E} \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}$:

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 < \underline{f} < \| f(x,u,v) \| < \overline{f} \\ 0 < \underline{l} < l(x,u,v) < \overline{l} \\ \underline{L} < L(x) \ . \end{array} \right. \tag{3.3}$$

Commentaire 3.3

a. *Ces hypothèses justifient a posteriori les Définitions formelles 3.1, comme elles donneront sens aux différentes notions de stratégies et valeurs (cf §3.2). Ainsi (voir par exemple Elliott-Kalton [71]) l'*edo *3.1 admet une unique* solution au sens de Carathéodory[1], *et le critère* J *est bien défini, pour toute condition initiale* x *et paire de* stratégies en boucles ouvertes $u(.) \in \mathcal{U}$ *et* $v(.) \in \mathcal{V}$[2], *en poursuite évasion comme en coût minimum. De plus, la fonction* $J^x(t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}_+$, *supérieure à sa valeur en 0 pour* $t > \underline{l}^{-1}[L(x) - \underline{L}]$.

b. *Les bornes (3.3) constituent une hypothèse forte sur le jeu, rarement vérifiée dans les exemples classiques (voir Isaacs [87]). Cependant, on s'intéresse dans ce travail aux jeux différentiels à instant final variable, notamment en ce qui concerne les méthodes numériques par différences finies. Ces dernières seront finalement appliquées à des versions localisées de nos jeux se disputant sur des compacts, moyennant l'introduction de conditions aux bords appropriées. Or, si la paire* (f,l) *est rarement bornée sur l'espace* $\mathcal{E}$ *tout entier, elle l'est en revanche toujours sur les compacts, par continuité. On dispose alors également des bornes (3.3), sous réserve de positivité (stricte) de* $\| f \|$ *et* l *(voir également le point d ci-dessous concernant l'hypothèse de positivité de* $\| f \|$*). On s'autorise donc ces hypothèses, qui devraient d'ailleurs pouvoir être affaiblies sans porter atteinte à l'essentiel des résultats et méthodes présentés dans ce travail.*

c. *Les résultats et méthodes présentés ici se généralisent aux jeux non stationnaires, dans lesquels la paire* (f,l), *voire la composante terminale du coût* L, *ou même la cible* $\mathcal{T}$, *et par conséquent le critère de coût* J, *peuvent dépendre explicitement du temps :*

$$\left\{ \begin{array}{ccc} f \equiv f(t,x,u,v) & , & l \equiv l(t,x,u,v) \\ L \equiv L(t,x) & , & \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}_t \ . \end{array} \right. \tag{3.4}$$

En effet, après extension de l'état du système à l'aide d'une variable temporelle translatée $s^t(s) := t + s$, *la dynamique et le critère du jeu non stationnaire se réécrivent respectivement, pour* $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ *mesurables sur* $\mathbb{R}$ *:*

$$\left\{ \begin{array}{ccl} \dfrac{d}{ds}(s^t,y^{t,x} \circ s^t)(s) & = & (1,f[(s^t,y^{t,x} \circ s^t)(s),u \circ s^t(s),v \circ s^t(s)]) \\ (s^t,y^{t,x} \circ s^t)(0) & = & (t,x) \\ J^{t,x}_{u(\cdot),v(\cdot)} & = & \displaystyle\int_{s=0}^{\tau - t} l[(s^t,y^{t,x} \circ s^t)(s),u \circ s^t(s),v \circ s^t(s)]ds \\ & & +L[(s^t,y^{t,x} \circ s^t(s))(\tau - t)] \in \widetilde{\mathbb{R}} \ , \end{array} \right. \tag{3.5}$$

où il faut lire conventionnellement $J = +\infty$ *si* $\tau \equiv \tau^{t,x}$ *est infini. On pourra alors appliquer les résultats et méthodes étudiés dans ce travail au jeu d'état et dynamique étendus* (t,x) *et* $(1,f)$, *de composantes intégrales et terminales du coût* l *et* L, *de cible* $\mathcal{T}$, *pouvant présenter des dépendances temporelles explicites — du moins si le jeu étendu vérifie les Hypothèses 3.2 (les hypothèses de régularité en temps qui en résultent pouvant être affaiblies).*

---

1. Solution presque partout, absolument continue.
2. Applications mesurables sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs respectives dans U et V, voir §3.2.

d. L'hypothèse concernant la positivité de $\underline{f}$ n'est qu'apparente (elle est en elle-même restrictive et inhabituelle). En effet, d'une part, elle intervient seulement au niveau de la bonne définition des schémas numériques, c'est-à-dire pas avant le Chapitre 6 ; d'autre part, si un jeu vérifie toutes les Hypothèses 3.2, sauf peut être celle concernant la positivité de $\underline{f}$, alors on étend l'état du système, comme dans le cas non stationnaire (équation 3.5, où la dépendance explicite de f, l, L et $\mathcal{T}$ en s^t est cette fois purement formelle, par stationnarité).

Toutes choses égales par ailleurs, le jeu étendu entre bien dans le champ des Hypothèses 3.2, et ses sections suivant les différentes valeurs de t sont des copies du jeu initial, par stationnarité. On peut donc notamment appliquer les méthodes numériques présentées dans ce travail au jeu étendu, pour calculer à l'aide de jeux à différences finies la valeur (au sens défini §3.2) du jeu initial. Contrairement aux apparences, on verra le moment venu (§9.2) qu'il n'en résulte pas d'augmentation de la dimension sur le plan de la résolution numérique. En effet, les sections du jeu étendu suivant les différentes valeurs t sont des copies les unes des autres, et on peut se contenter de calculer l'une d'entre elles.

e. À un jeu de poursuite évasion, $\mathcal{G}$, associons le jeu en distance minimum de même dynamique f, et critère $\inf_{t\geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)]$ ($\delta_{\mathcal{T}}$ distance orientée à la cible $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$, voir Lemme élémentaire 2.5.c). Ce jeu en distance minimum n'est pas un jeu en coût minimum au sens strict des Définition 3.1 et Hypothèse 3.2. En effet, il correspond dans la Définition 3.1 au cas $l \equiv 0$, $L \equiv \delta_{\mathcal{T}}$ non nécessairement borné inférieurement, alors que les Hypothèses 3.2 (constitutives de la définition même de nos jeux) prévoient notamment $l > \underline{l} > 0$, et $L > \underline{L}$. Ce jeu en distance minimum constitue néanmoins le cas limite, lorsque $\varepsilon \to 0^+$ et $R \to +\infty$, des jeux en coût minimum — au sens strict des Définitions 3.1 et Hypothèse 3.2 — où $l \equiv \varepsilon$ (pénalité Lagrangienne), et $L \equiv (-R) \vee \delta_{\mathcal{T}}$ (distance écrêtée à la cible $\mathcal{T}$). De plus, sous ces seules entorses à nos hypothèses, on vérifiera la bonne définition de ce type de jeu en distance minimum à la relecture de ce qui précède, et en lisant la section suivante §3.2, on constatera que les diverses notions de stratégies et valeurs qui y sont définies pour nos jeux différentiels à instant final variable fonctionnent sans modification pour ces jeux limites. En ce sens, on pourra parler de valeur de ces jeux.

Dans la suite de ce Chapitre, on suppose donc donné un jeu $\mathcal{G}$, de poursuite évasion ou en coût minimum (et vérifiant comme tel toutes les Hypothèses 3.2), ou en distance minimum (voir Commentaire 3.3.e ci-dessus).

3.2 Stratégies et valeurs

3.2.1 Valeur sur l'ensemble des boucles ouvertes

Fixons $x \in \mathcal{E}$. Nous avons donc à disposition une trajectoire y^x et un coût J^x , pour toute paire de contrôleurs mesurables, dits “en boucles ouvertes”, $(u(.),v(.)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Le joueur “u” veut minimiser J , tandis que son adversaire “v” veut maximiser J (ou minimiser $-J$).

Le problème qui se pose d'emblée est alors la détermination d'un équilibre de Cournot-Nash, ou point-selle, du jeu en boucles ouvertes, c'est-à-dire d'une paire de contrôleurs mesurables $(\underline{u}(.),\overline{v}(.))$, telle que :

$$\sup_{v(.)\in\mathcal{V}} J^x_{\underline{u}(.),v(.)} = \inf_{u(.)\in\mathcal{U}} J^x_{u(.),\overline{v}(.)} =: U(x) \ .$$

$U(x)$ est alors appelée valeur en boucles ouvertes du jeu sur l'ensemble des boucles ouvertes.

Mais très peu de jeux admettent une valeur en ce sens. Une intuition en est que les processus de décision associés aux stratégies en boucles ouvertes sont purement statiques: les suites d'actions sont décidées et fixées au début du jeu; les informations sur l'état arrivant au cours du jeu, ne sont pas prises en compte dans les boucles ouvertes. Dans un jeu dynamique donné, il n'y a en général "pas assez" de contrôleurs en boucles ouvertes pour assurer l'existence d'une telle valeur.

3.2.2 Valeurs en *feedback* d'état (discriminants inférieurs)

L'intuition suggère que l'utilisation de contrôles plus généraux, en *feedback* d'état $\varphi(y)$ et $\psi(y)$, voire en *feedback discriminants* $\varphi(y,v)$ et $\psi(y,u)$, débouche sur une structure d'information plus réaliste, susceptible d'assurer l'existence d'une valeur à davantage de jeux. Mais cette approche conduit à des difficultés sur le plan mathématique. En effet, les *feedback* intéressants dans la plupart des jeux sont discontinus — on parle de contrôles *bang bang*. Or, la confrontation d'un tel *feedback*, mettons $\varphi(y)$, à un contrôle en boucles ouvertes, $v(t)$, conduit à une équation d'état à second membre (potentiellement) discontinu :

$$\dot{y}^x(t) = f\left\{y^x(t),\varphi[y^x(t)],v(t)\right\} \ .$$

Le recours aux solutions au sens de Filippov [76] de telles équations n'est pas non plus satisfaisant, car on a alors trop de solutions. La difficulté de définir convenablement les ensembles de stratégies admissibles, et donc le problème posé, a occupé une très large place dans la littérature. Des auteurs comme Fleming, Friedman, Varaiya, Roxin, Elliott et Kalton, Krasovski et Subbotin, y ont fait des contributions importantes.

Le génie surprenant d'Isaacs dans sa théorie initiale [87], suivi en cela par Breakwell, est d'avoir ignoré cette difficulté et progressé néanmoins vers la détermination de ce qui devrait être considéré comme une solution. La "bonne" théorie dans cette direction est celle dite d'Isaacs-Breakwell-Bernhard [31, 30] (voir aussi Lewin [104]), dont nous posons ici le cadre, avant de revenir sur cette théorie au §3.4.

Définition 3.4 *Dans le jeu $\mathcal{G}$, soient Φ et Ψ des classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs $\varphi(y,v)$ et $\psi(y)$ pour "u" et "v", admissibles, au sens où :*
— elles comprennent les contrôleurs mesurables :

$$\mathcal{U} \subseteq \Phi,\mathcal{V} \subseteq \Psi \ ; \tag{3.6}$$

— toute paire $(\varphi,\psi) \in \Phi \times \Psi$ génère une unique trajectoire du jeu[3] *pour toute condition initiale x ;*
— Φ et Ψ sont stables par concaténation*, i.e. passage d'une stratégie à une autre à un instant intermédiaire du jeu.*

Proposition 3.5 *On a alors la séquence suivante d'(in-)égalités :*

$$\sup_{\Psi}\inf_{\mathcal{U}} J^x = \sup_{\Psi}\inf_{\Phi} J^x \leq \inf_{\Phi}\sup_{\Psi} J^x = \inf_{\Phi}\sup_{\mathcal{V}} J^x \ . \tag{3.7}$$

Par conséquent,

Définition 3.6 *On appelle valeur* feedback inférieure *(respectivement* supérieure*) du jeu $\mathcal{G}$, pour le produit admissible de classes de stratégies $\Phi \times \Psi$, les termes à gauche (respectivement droite) de l'inégalité dans (3.7). De plus, $U(x)$ valeur de* point-selle *du jeu en*

3. Trajectoire y^x au sens de Carathéodory.

x pour ces classes de stratégies signifie par définition qu'on a une égalité centrale dans (3.7), à la valeur $U(x)$.

Preuve de la Proposition 3.5

L'inégalité centrale résulte du Lemme 2.4.a. De plus, à cause des inclusions (3.6), il est clair que l'on a :

$$\sup_\Psi \inf_{\mathcal{U}} J^x \geq \sup_\Psi \inf_\Phi J^x \quad , \quad \inf_\Psi \sup_\Phi J^x \geq \inf_\Phi \sup_{\mathcal{V}} J^x . \tag{3.8}$$

Il ne reste donc plus à montrer que les inégalités opposées à (3.8). Montrons par exemple :

$$\sup_\Psi \inf_{\mathcal{U}} J^x \quad \leq \quad \sup_\Psi \inf_\Phi J^x . \tag{3.9}$$

L'inégalité restante se prouverait de la même manière.

Soit donc ψ fixé dans Ψ et φ_n une suite minimisante pour $J^x_{\cdot,\psi}$ sur Φ. Alors pour ε fixé positif et n assez grand,

$$\begin{aligned}\sup_\Psi \inf_\Phi J^x \quad \geq \quad \inf_\Phi J^x_{\cdot,\psi} \geq J^x_{\varphi_n(.),\psi} - \varepsilon \quad &= \quad J^x_{u_n(.),\psi} - \varepsilon \\ &\geq \quad \inf_{\mathcal{U}} J^x_{\cdot,\psi} - \varepsilon \ ,\end{aligned}$$

où $u_n(.) \in \mathcal{U}$ désigne la synthèse en boucle ouverte pour le minimiseur de la paire (φ_n,ψ), c'est-à-dire :

$$u_n(t) := \varphi_n \left\{ y^x_{\varphi_n,\psi}(t),\psi[y^x_{\varphi_n,\psi}(t)] \right\} \ .$$

Soit :

$$\sup_\Psi \inf_\Phi J^x \geq \inf_{\mathcal{U}} J^x_{\cdot,\psi} - \varepsilon \ ,$$

pour tout $\psi \in \Psi$ et ε fixé positif. D'où (3.9), par passage à la limite quand ε tend vers 0^+, puis au sup en $\psi \in \Psi$.

□

Proposition 3.7 (Bernhard [30, p. 1007]) *Dans le jeu $\mathcal{G}$, étant donnée une paire de* feedback *discriminants inférieurs $\underline{\varphi}(y,v)$ et $\overline{\psi}(y)$ telle que pour tout $(x,u(.),v(.)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$:*

$$J^x_{\underline{\varphi},v(.)} \leq J^x_{\underline{\varphi},\overline{\psi}} \leq J^x_{u(.),\overline{\psi}} \ ,$$

— $(x,\underline{\varphi},\overline{\psi})$ générant une unique trajectoire, ainsi que $(x,\underline{\varphi},v(.))$ et $(x,u(.),\overline{\psi})$, — alors $J_{\underline{\varphi},\overline{\psi}}$ est valeur de point-selle de $\mathcal{G}$, pour tout produit admissible de classes de stratégies en feedback *discriminants inférieurs $\Phi \times \Psi$ contenant $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$. De plus, il existe toujours un tel produit, à savoir la fermeture par concaténation de $\mathcal{U} \cup \{\underline{\varphi}\}$ pour Φ et $\mathcal{V} \cup \{\overline{\psi}\}$ pour Ψ.*

Preuve Alors,

$$\begin{aligned}\inf_\Psi \sup_{\mathcal{V}} J^x \quad &\leq \quad \sup_{\mathcal{V}} J^x_{\underline{\varphi},\cdot} \leq J_{\underline{\varphi},\overline{\psi}} \\ &\leq \quad \inf_{\mathcal{U}} J^x_{\cdot,\overline{\psi}} \leq \sup_\Psi \inf_{\mathcal{U}} J^x .\end{aligned}$$

On a donc bien l'égalité centrale dans (3.5), à la valeur $J^x_{\underline{\varphi},\overline{\psi}}$.

□

Remarque 3.8 On pourrait considérer de manière analogue des *feedback* discriminants supérieurs, $\varphi(y)$ et $\psi(y,u)$.

Comme on le verra plus en détail au §3.4, il existe dans le contexte des stratégies et valeurs *feedback* un certain nombre de *principes de vérification* (théorie de Hamilton-Jacobi), ou conditions suffisantes pour qu'une fonction donnée soit la valeur *feedback* — inférieure, supérieure, de point-selle, — d'un jeu différentiel à instant final variable : principe de vérification $\mathcal{C}^1$ (cf. par exemple Rapaport, [116, Proposition I.16 I.17]), voire, du moins en poursuite évasion, principe de vérification (semi-)continu (Bernhard, [30, 28]).

L'approche en stratégies *feedback* souffre cependant d'une absence de conditions nécessaires que devrait satisfaire la valeur du jeu — conditions nécessaires propres à faire émerger pour la fonction valeur un candidat a priori, dont on vérifie a posteriori qu'il est le bon à l'aide des principes de vérification précités. Ainsi, par exemple, le principe du maximum de Pontriaguine [114] ne s'étend pas du Contrôle Optimal aux Jeux Différentiels, à cause des discontinuités de la dynamique évoquées plus haut.

En outre, les classes de stratégies Φ et Ψ sont toujours définies de manière implicite.

3.2.3 Stratégies non anticipatives

Finalement, si l'on exclut les approches ensemblistes par inclusions différentielles de ces problèmes — théorie de la viabilité, école russe [48, 93] — qu'on considère ici extérieures à notre champ, la tentative la plus achevée par équations différentielles pour définir une notion de solution qui assure l'existence d'une valeur raisonnable à la plupart des jeux classiques, voire à des jeux quelconques sous des hypothèses assez générales, semble être celle des stratégies non anticipatives, encore dites VREK [133, 121, 71]. C'est en tous cas le concept de stratégies le plus approprié pour l'usage en jeux différentiels de la théorie des solutions de viscosité d'*edp* [59, 14], dont on veut faire dans ce travail notre outil principal. C'est donc la notion de stratégies que nous adopterons.

Notons d'ailleurs que toutes les approches ayant conduit à des développements substantiels, notamment celles d'analyses ensemblistes évoquées ci-dessus, débouchent sur des notions de valeurs pour nos jeux très voisines de celle que l'on expose maintenant.

Définition 3.9 (Stratégies non anticipatives VREK) *Dans le jeu $\mathcal{G}$,*

a. on appelle stratégie non anticipative du minimiseur, et on note $\alpha \in \mathcal{A}$, toute application α de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{U}$, telle que pour toutes $v(\cdot)$, $v'(\cdot) \in \mathcal{V}$, $\alpha[v(\cdot)] = \alpha[v'(\cdot)]$ coïncident sur tout segment $[0,t]$ où $v(\cdot)$ et $v'(\cdot)$ coïncident. On définit de manière symétrique une stratégie non anticipative du maximiseur, notée $\beta \in \mathcal{B}$;

b. on appelle valeur VREK inférieure, respectivement supérieure, la quantité

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} J^x \ ,$$

respectivement

$$\sup_{\mathcal{B}} \inf_{\mathcal{U}} J^x \ .$$

Si les deux quantités coïncident, on les qualifiera de valeur VREK.

En stratégies VREK, il est plus difficile d'établir si la valeur dite inférieure est de fait inférieure ou égale à la valeur dite supérieure (l'intuition étant que le joueur qui exerce une stratégie VREK est avantagé par la connaissance du contrôle instantané de son adversaire). On n'approfondira pas ce point, n'ayant pas besoin d'une telle propriété dans le présent travail. On renvoie à Varaiya et Lin [134] pour une preuve à instant final fixé.

Proposition 3.10 *Pour toute paire admissible de classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs* (Φ,Ψ) *sur le jeu* $\mathcal{G}$ *:*

a. $\Phi \subseteq \mathcal{A}, \quad \Psi \subseteq \mathcal{B}$ *;*

b. si les valeurs feedback *sur* $\Phi \times \Psi$ *et VREK existent, alors elles coïncident.*

Preuve

a. $\varphi \in \Phi$ et $\psi \in \Psi$ s'identifient respectivement à $\alpha \in \mathcal{A}$ et $\beta \in \mathcal{B}$, telles que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \alpha[v(\cdot)](t) &:= \varphi[y^x_{\varphi,v(\cdot)}(t),v(t)] \\ \beta[u(\cdot)](t) &:= \psi[y^x_{u(\cdot),\psi}(t)] \ . \end{aligned}$$

b. En effet, si on a des valeurs VREK $U(x)$ et *feedback* $U^\dagger(x)$, alors :

$$\begin{aligned} U(x) &= \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} J^x \le \inf_{\Phi} \sup_{\mathcal{V}} J^x = U^\dagger(x) \\ &= \sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} J^x \le \sup_{\mathcal{B}} \inf_{\mathcal{U}} J^x = U(x) \ , \end{aligned}$$

par la Définition 3.6 et les inclusions du a.

□

3.3 Barrières

Dans des contextes de stratégie et valeur donné, on conviendra[4] de nommer *barrière* d'un jeu de poursuite évasion, toute hypersurface séparant, — au sens strict, sans préjuger de ce qui se passe sur cette barrière, — les conditions initiales $x \in \mathcal{E}$ débouchant sur l'évasion du fugitif (voir la Définition 3.11 ci-dessous), des conditions initiales débouchant sur sa capture. Il existe alors des liens étroits entre les barrières éventuelles d'un jeu de poursuite évasion d'une part, et d'autre part les hypersurfaces de niveau 0 de la fonction valeur U (dans le même contexte de stratégie) du jeu en distance minimum associé — d'où l'intérêt d'introduire ce dernier type de jeux. Ainsi,

Définition 3.11 *Dans le jeu de poursuite évasion* $\mathcal{G}$*, étant donné un produit admissible de classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs* $\Phi \times \Psi$*; alors, en valeur inférieure sur* $\Phi \times \Psi$*, un point* $x \in \mathcal{E}$ *est appelé* point de capture *du jeu si et seulement si*

$$\forall \psi \in \Psi \ , \quad \exists \underline{\varphi} \in \Phi \ ; \quad \tau^x_{\underline{\varphi},\psi} < +\infty$$

— *x étant dit* point d'évasion *sinon.*

De même, en valeur feedback *supérieure sur* $\Phi \times \Psi$*, un point* $x \in \mathcal{E}$ *est appelé point de capture de jeu si et seulement si*

$$\exists \underline{\varphi} \in \Phi \ ; \quad \forall \psi \in \Psi \ , \quad \tau^x_{\underline{\varphi},\psi} < +\infty$$

— *x étant dit point d'évasion sinon.*

Remarque 3.12 En vertu de nos Hypothèses 3.2, on a $J(\tau) \ge \underline{l}\tau + \underline{L}$, trajectoire par trajectoire. La valeur *feedback* inférieure (supérieure) du jeu de poursuite évasion est alors infinie dans la zone d'évasion en valeurs *feedback* inférieures (supérieures), par application du Lemme 2.4.c.

4. S'écartant d'un autre usage consistant à nommer *barrière* toute hypersurface de discontinuité de la valeur du jeu.

Théorème 3.13 *Dans le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$, étant donné un produit admissible de classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs $\Phi \times \Psi$; alors, en valeur inférieure sur $\Phi \times \Psi$,*

a. la valeur U du jeu en distance minimum associé à $\mathcal{G}$ est ≤ 0, respectivement ≥ 0, aux points de capture, respectivement évasion, du jeu. Donc une barrière sépare des points où $U \leq 0$ de points où $U \geq 0$;

b. réciproquement, x est un point de capture, respectivement évasion, du jeu, si $U(x) < 0$, respectivement $U(x) > 0$. Donc une hypersurface séparant des points où U est < 0 de points où U est > 0 est une barrière.

De plus, on a les mêmes énoncés en valeur supérieure sur $\Phi \times \Psi$.

Preuve On prouve seulement les premières parties, locales, des énoncés a et b (en valeurs inférieure puis supérieure), les conséquences globales qu'on en tire s'en suivant par définition même des barrières. De plus, on se limite aux énoncés concernant la capture. Ceux concernant l'évasion s'obtiennent par contraposition.

La capture en valeur *feedback* inférieure depuis $x \in \mathcal{E}$ signifie par définition que pour tout ψ, il existe $\underline{\varphi}$ tel que $\tau^x_{\underline{\varphi},\psi}$ est fini. Alors :

$$\sup_{\Psi} \inf_{\Phi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \quad \leq \quad \sup_{\Psi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)]\ ),$$

où pour tout ψ :

$$\inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)] \quad \leq \quad \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(\tau^x_{\underline{\varphi},\psi})] = 0\ ,$$

d'où

$$\sup_{\Psi} \inf_{\Phi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \leq 0\ .$$

Réciproquement, si l'inégalité précédente est stricte, alors, pour tout ψ, il existe $\underline{\varphi}$ et t tels que :

$$\delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)] < 0\ ,$$

donc $\tau^x_{\underline{\varphi},\psi}$ est fini et x est un point de capture en valeur *feedback* inférieure.

De même, la capture en valeur *feedback* supérieure depuis $x \in \mathcal{E}$ signifie par définition l'existence de $\underline{\varphi} \in \Phi$, tel que

$$\inf_{\Phi} \sup_{\Psi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \ \leq \ \sup_{\Psi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)]\ ),$$

où pour tout ψ :

$$\inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)] \ \leq \ \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(\tau^x_{\underline{\varphi},\psi})] = 0\ ,$$

d'où

$$\inf_{\Phi} \sup_{\Psi} \inf_{t \geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \leq 0\ .$$

Réciproquement, si l'inégalité précédente est stricte, alors il existe $\underline{\varphi}$, tel que pour tout ψ :

$$\inf_{t \geq 0} \ \delta_{\mathcal{T}}[y^x_{\underline{\varphi},\psi}(t)] \ < \ 0\ ;$$

donc $\tau^x_{\underline{\varphi},\psi}$ est fini et x est un point de capture en valeur *feedback* supérieure.

□

3.4 Théorie classique des jeux dynamiques de Isaacs-Breakwell-Bernhard

Pour un exposé général de la théorie d'Isaacs-Breakwell-Bernhard, on renvoie aux références §3.2.2 plus haut, ou encore au livre de Pierre Bernhard [28, Chapitre VI].

Rappelons formellement la méthodologie, dans le cas d'un jeu différentiel de poursuite évasion en temps de capture (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$; dynamique f, domaine Ω, cible $\mathcal{T}$, bord Γ; critère $J \equiv \tau$, temps d'atteinte de la cible $\mathcal{T}$).

On se limite dans ce rappel aux jeux vérifiant la condition d'Isaacs du jeu qualitatif :

$$\min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} < \nu,f >= \max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} < \nu,f >=: F(x,\nu),\ (x,\nu) \in \mathcal{E}^2.$$

On note alors $(\underline{u}(x,\nu),\overline{v}(x,\nu))$ une paire de commandes réalisant le point-selle en $(x,\nu) \in \mathcal{E}^2$. La condition d'Isaacs est notamment vérifiée lorsque le jeu est séparé : $f(x,u,v) \equiv g(x,u) - h(x,v)$.

Remarque 3.14 Le problème de servomécanisme étudié au Chapitre 4, vu comme un jeu de poursuite évasion (§4.2), satisfait toutes ces conditions.

Soit μ la normale extérieure à la cible $\mathcal{T}$, l'ouvert Ω étant supposé régulier, "localement d'un seul côté" de son bord Γ, variété différentiable de dimension $(r-1)$. Par continuité de f, le jeu ne peut se terminer que sur la partie utile (PU) de la cible, définie par $\{x \in \Gamma;\ F(x,\mu) \leq 0\}$, avec égalité en tout point x de la limite de cette partie utile (LPU). Cette dernière étant supposée constituer une variété régulière non vide de dimension $(r-2)$, intégrons de manière rétrograde, au départ de $\{(x,\mu(x));\ x \in (LPU)\}$, le système Hamiltonien d'équations d'Euler-Lagrange suivant, composé de l'équation de la dynamique optimale en x, et de l'équation, dite adjointe, en ν :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & f(x,\underline{u}(x,\nu),\overline{v}(x,\nu)) \\ \dot{\nu} & = & -(Jf)^T(x,\underline{u}(x,\nu),\overline{v}(x,\nu))\nu \end{array} \right. \tag{3.10}$$

(matrice Jacobienne J). On construit ainsi dans $\mathcal{E}$ une hyper-surface orientée $\mathcal{B}$, vérifiant formellement l'équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs du jeu qualitatif attaché à $\mathcal{G}$:

$$F(x,\nu) = 0, \quad x \in \mathcal{B} \tag{3.11}$$

(ν, normale à $\mathcal{B}$ en x, qualifiée de *semi-perméable*, pour des raisons qui apparaîtront plus bas).

Ce procédé d'obtention d'une solution (formelle, dans la présentation qui vient d'en être faite) d'une équation d'Hamilton-Jacobi, par intégration rétrograde du système Hamiltonien associé, porte le nom de *méthode des caractéristiques*. Dans le cas d'un problème de Calcul des Variations, ou (on parle alors de principe du maximum de Pontriaguine) de Contrôle Optimal, toute solution s'obtient nécessairement par le procédé ci-dessus. Celui-ci est en revanche en partie formel en Jeux Différentiels, la normale ν pouvant subir des discontinuités (a fortiori il n'existe pas $\dot{\nu}$) le long des trajectoires optimales. La construction précédente se heurte à des singularités du champ d'extrémales. Certaines se rencontrent dans la théorie de la synthèse en commande optimale. D'autres sont radicalement nouvelles, entrainant des discontinuités de l'"adjoint" ν le long d'une trajectoire optimale, une situation que le théorème d'Erdman Weierstrass interdit en Contrôle Optimal. C'est pour cette raison que le théorème de Pontriaguine ne peut être utilement étendu à notre problème. Isaacs et Breakwell ont découvert les principales singularités de ce type, et Isaacs expliquait déja que ce phénomène ne pouvait pas se produire avec un seul joueur. Bernhard [29, 31] a proposé une analyse complète du problème, et, sous le nom de *condition d'indifférence*, une condition qui remplace celle d'Erdman Weierstrass.

Toute une partie de la théorie a consisté à faire l'inventaire des types de singularités possibles, à trouver des équations constructives pour les calculer numériquement — généralement en intégrant les équations différentielles satisfaites par des trajectoires qui les parcourent, — et à obtenir un *théorème de vérification* (classique en l'absence de singularités) qui s'applique à la surface ainsi synthétisée. On peut penser qu'à ce jour, on a une description complète des singularités de co-dimension un.

Ainsi, l'analyse de ces singularités permet souvent d'établir que la surface $\mathcal{B}$ ainsi obtenue, où une surface construite de manière *ad hoc* à partir de $\mathcal{B}$, encore notée $\mathcal{B}$, est *semi-perméable*, au sens où chaque joueur peut exercer un *feedback* (éventuellement discriminant pour l'un des joueurs) empêchant son adversaire de franchir cette surface dans le sens qui lui est défavorable ; $\mathcal{B}$ constitue une barrière (de point-selle) dite naturelle, du jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$, séparant des conditions initiales depuis lesquelles le minimiseur peut forcer la capture (zone de capture) des conditions initiales depuis lesquelles le maximiseur peut l'empêcher (zone d'évasion).

L'étude des barrières précédente est appelée étude du *jeu qualitatif*, par opposition au *jeu quantitatif*, ou détermination de la valeur dans le reste de l'espace. (Isaacs disait *Game of Kind* et *Game of Degree*. Les expressions utilisées ici ont été introduites par Blaquière, Gérard et Leitman.)

Remarque 3.15 L'analyse de singularités évoquée ci-dessus, revient pour beaucoup à interpréter en termes de solutions de viscosité, la solution formelle $\mathcal{B}$ obtenue par la méthode des caractéristiques pour l'équation d'Hamilton-Jacobi-Isaacs (3.11) du jeu qualitatif attaché à $\mathcal{G}$ (voir Rapaport [116, 117]).

Remarque 3.16 Une façon alternative, déjà envisagée par Isaacs [87], et systématisée par Rapaport [116, 117], d'appréhender le jeu qualitatif, est, comme on l'a déjà laissé entrevoir au §3.3 précédent, d'introduire un jeu quantitatif auxiliaire, en distance minimum. Pour un exemple d'une telle approche, voir le problème du servomécanisme, Chapitre 4, §4.3.

Toujours par la méthode des caractéristiques, on peut ensuite, comme on l'a fait pour l'équation (3.11), exhiber un candidat solution (toujours sans garantie) à l'équation d'Isaacs du jeu quantitatif suivante, posée sur le domaine de capture $\mathcal{C}$ préalablement mise en évidence :

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x,\nabla U(x)) + 1 = 0, \quad x \in \mathcal{C} \\ U|_{\Gamma\cap\mathcal{C}} = 0. \end{array} \right. \tag{3.12}$$

Puis, comme dans l'étude du jeu qualitatif plus haut, une analyse des singularités de U permet le cas échéant d'établir que U, ou une fonction construite de manière *ad hoc* à partir de U, est bien la valeur (de point-selle) du jeu dans la zone de capture (la valeur dans la zone d'évasion étant infinie). Cette analyse de singularités revient essentiellement (au moins pour les singularités d'ordre un : discontinuités de ∇U) à vérifier que U est solution de viscosité de l'équation d'Isaacs (3.12).

En résumé, le jeu qualitatif consiste à essayer de construire une surface globalement semiperméable, (y compris le long de singularités et de "raccordements") séparant une région de l'espace de jeu contenant la partie utile de la cible d'une ne la contenant pas.

Si cette construction échoue, tout ou partie de la surface ainsi construite peut porter une discontinuité de la valeur. Seule une solution complète peut confirmer ou infirmer ce point. Un processus très problématique dès que la dimension du jeu dépasse deux ou trois.

Ceci explique l'intérêt des méthodes numériques attaquant directement l'équation d'Isaacs par discrétisation, pourvu qu'on ait un cadre dans lequel on sait que la solution ainsi approchée a un rapport avec le problème posé. C'est ce que font les concepts de solutions de viscosité, dans leurs différentes formes.

Chapitre 4

Un problème de commande d'un servomécanisme

Nous reprenons dans ce Chapitre l'étude analytique d'un problème de servomécanisme, introduit initialement par P. Bernhard [29] et Masle [110]. Cependant, nous étudions ici le jeu en distance minimum, après un rappel concernant le jeu de poursuite évasion. L'intérêt de cette nouvelle approche est de fournir, pour toutes les valeurs possibles des paramètres du jeu, une description complète de la barrière du jeu de poursuite évasion, plus simplement qu'en résolvant ce dernier directement.

En effet, la résolution analytique du jeu en distance minimum est dans le cas d'espèce plus simple que celle du jeu de poursuite évasion, au moins pour certaines valeurs des paramètres. Après résolution du jeu en distance minimum, la barrière du jeu de poursuite évasion est déterminée comme hypersurface de niveau zéro (s'il en est) de la fonction valeur du jeu en distance minimum — une détermination intrinsèquement robuste, vu que le gradient de cette fonction ne s'annule a priori d'aucun côté de cette surface, contrairement au gradient de la valeur du jeu de poursuite évasion (transformé) qui s'annule dans la zone de capture. De plus, ce gradient fournit également une mesure de la sensibilité de la barrière par rapport à la cible, l'hypersurface de niveau ε de la valeur du jeu en distance minimum fournissant la barrière du jeu de poursuite évasion pour la cible dilatée de ε.

4.1 Présentation du jeu

On considère le système monovariable du deuxième ordre suivant :

$$\ddot{Y} = \beta\, v, \qquad |v| \leq 1\,,$$

où l'objectif est de garder Y aussi proche que possible d'un point Z sujet à une dérive inconnue :

$$\dot{Z} = \alpha\, u, \qquad |u| \leq 1\,.$$

Plus précisément, pour $\gamma > 0$ préalablement fixé, on cherche un contrôle (en *feedback* d'état) $\overline{\psi}$, qui garantisse $|Y(t) - Z(t)| \leq \gamma$ pour tout $t \geq 0$, quelle que soit la perturbation $u(\cdot)$.

Introduisant le vecteur d'état :

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y - Z \\ \dot{Y} \end{pmatrix},$$

ce problème peut être formulé comme un jeu de poursuite évasion, de dynamique :

$$f(x,u,v) \equiv \begin{pmatrix} x_2 - \alpha u \\ \beta v \end{pmatrix}\,,$$

cible :

$$\mathcal{T} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \geq \gamma\},$$

et critère de coût J égal à τ, le temps de capture par la cible $\mathcal{T}$.

Ce jeu a été étudié en détail par Masle [110] et Bernhard [29]. Une attention particulière a été portée à l'existence et à la caractérisation de la barrière (voir §3.3).

On introduit ici le jeu en distance minimum, de critère J égal à la distance orientée $\delta_{\mathcal{T}}$ minimum à la cible sur une trajectoire (voir commentaire 3.3.e). Ici, $\delta_{\mathcal{T}}(x) = \gamma - |x_1|$, et le lieu des x tels qu'il existe $\overline{\psi}$ vérifiant $\inf_{\mathcal{U},t\geq 0} |y_1^x(t)| < \gamma$, n'est autre que le lieu où la valeur inférieure de ce jeu en distance minimum est > 0. Nous proposons une résolution analytique pour ce jeu en distance minimum, dont l'hypersurface de niveau zéro (s'il en est) n'est autre que la barrière du jeu de poursuite évasion (Théorème 3.13.b). De plus, si ce nouveau critère ne renseigne pas sur le temps de capture, il caractérise la sensibilité de la barrière par rapport à la cible.

4.2 Résolution analytique du jeu de poursuite évasion, cas $p > 1$

Nous résumons ici l'analyse de Masle [110] et Bernhard [29], utilisant la théorie classique de Isaacs-Breakwell-Bernhard (voir §3.4). Par analyse dimensionnelle, il est facile de voir que le seul paramètre significatif dans ce jeu est le rapport

$$p = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}.$$

Dans la suite, α et β sont fixés dans $\mathbb{R}_+^*$, tandis que γ joue le rôle de paramètre.

On cherche d'abord la partie utile de la cible. Elle comporte ici deux parties symétriques : $\{x_1 = \gamma,\, x_2 > -\alpha\}$ et $\{x_1 = -\gamma,\, x_2 < \alpha\}$. La limite de la partie utile (LPU) se compose donc des deux points $(x_1 = \mu\gamma,\, x_2 = -\mu\alpha)$ pour $\mu = \pm 1$. À partir de la (LPU), on essaye de construire une barrière naturelle. La normale semi-perméable sur la (LPU) est $(\nu_1 = -\mu, \nu_2 = 0)$. Étant donné le Hamiltonien du jeu qualitatif,

$$\mathcal{F} = \nu_1(x_2 - \alpha u) + \nu_2 \beta v,$$

nous voyons d'une part que les contrôles semi-perméables sont $u = \mathrm{sgn}(\nu_1)$ et $v = \mathrm{sgn}(\nu_2)$, et d'autre part que les équations adjointes donnent

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\nu}_1 &=& 0\,, \\ \dot{\nu}_2 &=& -\nu_1\,. \end{array}\right.$$

Après initialisation avec les normales semi-perméables ν sur la (LPU), ceci fournit deux arcs de paraboles avec les contrôles $u = v = -\mu$:

$$y^x(t) \;=\; \mu \left(\begin{array}{c} \gamma - \dfrac{\beta}{2}(\tau - t)^2 \\ -\alpha + \beta(\tau - t) \end{array} \right), \quad t < \tau\,.$$

Ces arcs de parabole intersectent l'autre bord de la cible, i.e. la droite $x_1 = -\mu\gamma$, en $x_2 = \mu(-\alpha + 2\sqrt{\beta\gamma})$. Nous devons maintenant distinguer deux cas selon que ces points appartiennent ou non à la partie utile.

Le cas simple est quand cette intersection a lieu en dehors de la partie utile, ce qui est le cas si $p > 1$. Dans ce cas les deux paraboles ainsi que les deux segments de partie non utile de la cible qui les relient (en gras Figure 4.2), forment de fait une barrière $\mathcal{B}_\gamma$, séparant une zone d'évasion à l'intérieur, de la zone de capture à l'extérieur. Il s'agit d'une barrière composite. En tous ses points réguliers, la condition de semi-perméabilité est vérifiée (ou au bord de la cible, une inégalité plus forte pour le fugitif). Aux deux points d'intersection des paraboles avec la cible, le fugitif peut jouer suivant la règle en vigueur sur la parabole, i.e. $v = -\mu$. Ceci garantit que l'état reste à l'intérieur de la zone d'évasion, dès lors que $\dot{y}_1^x$ a le signe voulu, quels que soient les contrôles.

Lorsque $p = 1$, les deux arcs de parabole se raccordent exactement en $(x_1 = \mu\gamma, x_2 = -\mu\alpha)$ $(\mu = \pm 1)$, délimitant une lentille fermée $\mathcal{L}$.

Définition 4.1 *α et β étant fixés, tandis que γ joue momentanément le rôle de paramètre, l'ensemble des $\mathcal{B}_\gamma$ lorsque $p \equiv \beta\gamma/\alpha^2$ varie dans $[1, +\infty[$ partitionne l'extérieur de Int($\mathcal{L}$). Introduisons alors des* feedback *(d'état purs) $\underline{\varphi}$ et $\overline{\psi}$, valant* plus *et* moins un *sur les arcs de paraboles (ouverts) inférieurs et supérieurs des $\mathcal{B}_\gamma$, et arbitraires (non nécessairement égaux) ailleurs.*

Proposition 4.2 (Bernhard-Masle [110, 29]) *Soit $p > 1$. Alors la paire $(\underline{\varphi}, \overline{\psi})$ ainsi définie constitue un point-selle[1] du jeu de servomécanisme en poursuite évasion de ratio p. La valeur du jeu est*

$$U(x) = \frac{1}{\beta}\left[\alpha + \mu x_2 - \sqrt{(\alpha + \mu x_2)^2 - 2\beta(\gamma - \mu x_1)}\right] ,$$

avec $\mu = 1$ dans la partie (et son bord) au-dessus de la barrière de point-selle $\mathcal{B}_\gamma$ décrite plus haut, et $\mu = -1$ dans la partie au-dessous (et son bord). A l'intérieur de la zone d'évasion délimitée par $\mathcal{B}_\gamma$, on a bien sûr $U \equiv +\infty$.

Remarque 4.3 Lorsque $p = 1$, aucune trajectoire du jeu correspondant au contrôle $\underline{\varphi}$ du poursuivant (respectivement $\overline{\psi}$ du fugitif) ne saurait pénétrer (respectivement quitter) $\mathcal{L}$, par semi-perméabilité.

Preuve de la Proposition 4.2

Si x appartient à l'intérieur de la zone délimitée par $\mathcal{B}_\gamma$, alors, d'après la discussion précédente, la courbe $\mathcal{B}_{\gamma_x}$ $(\gamma_x < \gamma)$ passant par x, ou $\partial\mathcal{L}$ si $x \in \mathcal{L}$, est semi-perméable, et le contrôle $\overline{\psi}$ garantit que la trajectoire $y^x_{u(.),\overline{\psi}}$ reste dans la zone délimitée par cette courbe, n'atteignant donc jamais la cible, quel que soit $u(.) \in \mathcal{U}$. $\mathcal{B}_\gamma$ délimite donc une zone d'évasion en valeurs inférieures, et a fortiori supérieures, correspondant à une zone où la valeur de point-selle du jeu de poursuite évasion est infinie (voir Remarque 3.12).

À l'extérieur de cette région, le contrôle $\underline{\varphi}$ garantit de même la capture, quel que soit $v(\cdot)$, et nos arcs de parabole constituent un champ complet de trajectoires définissant la fonction U, qui est bien la valeur de point-selle recherchée, par application du principe de vérification semi-continu de Bernhard [29, 28].

□

Fort de ces résultats concernant le jeu de poursuite évasion où $p \geq 1$, on aborde à présent l'étude du jeu en distance minimum. Nous allons voir qu'on obtient ainsi tous les résultats sur la barrière, quel que soit le rapport $p > 0$, moyennant une étude indépendante de ce dernier.

4.3 Résolution analytique du jeu en distance minimum

L'étude précédente du jeu de poursuite évasion dans le cas $\beta\gamma > \alpha^2$ $(p > 1)$ met en effet en évidence l'existence d'une barrière $\mathcal{B}_\gamma$ composée de deux arcs de parabole raccordés

1. Sur tout produit admissible contenant $(\underline{\varphi}, \overline{\psi})$ de classes de stratégies en *feedback* discriminants inférieurs.

par deux segments d'axes $\{|x_1| = \gamma\}$ — barrière en valeur inférieure comme supérieure, ce jeu admettant le point-selle $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$ (Définition 4.1).

On a notamment par application de la Proposition 3.13.a :

$$\sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} \inf_{t\geq 0} (\gamma - |y_1^x(t)|) \leq 0 \qquad (\text{respectivement } \geq 0) ,$$

si x est à l'extérieur (respectivement l'intérieur) de la zone délimitée par cette barrière. Appliquant ce résultat pour la valeur $\gamma - \delta$ du paramètre (cible dilatée de $\delta \in \mathbb{R}$), il vient tant que $\gamma - \delta > \alpha^2/\beta$, soit $\delta < \gamma - \alpha^2/\beta$:

$$\sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} \inf_{t\geq 0} [(\gamma - \delta) - |y_1^x(t)|] \leq 0 \ (\text{respectivement } \geq 0) ,$$

soit :

$$\sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} \inf_{t\geq 0} (\gamma - |y_1^x(t)|) \leq \delta \quad (\text{respectivement } \geq \delta) ,$$

si x est (strictement) hors (respectivement dans) la zone délimitée par $\mathcal{B}_{\gamma-\delta}$. De plus, on obtient également pour $\delta = \gamma - \alpha^2/\beta$ (Remarque 4.3) :

$$\gamma - \alpha^2/\beta \leq \sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} \inf_{t\geq 0} (\gamma - |y_1^x(t)|) \ , \tag{4.1}$$

si x appartient à la zone fermée $\mathcal{L}$ délimitée par $\mathcal{B}_{\alpha^2/\beta}$.

Ceci suggère que $\mathcal{B}_{\gamma-\delta}$ est l'hypersurface de niveau δ de la valeur inférieure du jeu en distance minimum, si $\delta < \gamma - \alpha^2/\beta$. On peut raisonner à l'identique au sujet de la valeur supérieure. Le jeu en distance minimum admettrait alors une valeur de point-selle (*feedback*) $U^\dagger$ à l'extérieur de $\mathcal{L}$, où par définition $\mathcal{B}_{\gamma-\delta}$ est la surface de niveau δ de $U^\dagger$ si $\delta < \gamma - \alpha^2/\beta$.

Complétons cette définition de $U^\dagger$ et prouvons que la fonction $U^\dagger$ ainsi définie est bien la valeur de point-selle $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$ du jeu en distance minimum — moyennant une condition supplémentaire sur $\underline{\varphi}$.

Théorème 4.4 *On impose de plus $\underline{\varphi} \equiv -1$ sur Int($\mathcal{L}$) dans la Définition 4.1 de $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$ précédente. Alors, pour tout $p > 0$, $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$ constitue un point-selle[2] du jeu de servomécanisme en distance minimum de ratio p, de valeur*

$$U(x) = \begin{cases} (\gamma + x_1) \wedge P^+(x) & \text{si } x_2 \geq \alpha \\ (\gamma - x_1) \wedge P^-(x) & \text{si } x_2 \leq -\alpha \\ (\gamma - \alpha^2/\beta) \wedge P^+(x) \wedge P^-(x) & \text{si } |x_2| \leq \alpha \ , \end{cases} \tag{4.2}$$

où par définition :

$$\begin{cases} P^+(x) &= \gamma - x_1 - \dfrac{(x_2+\alpha)^2}{2\beta} \\ P^-(x) &= \gamma + x_1 - \dfrac{(x_2-\alpha)^2}{2\beta} \end{cases} .$$

Remarque 4.5

a. Cette valeur est donc la seule possible en stratégies VREK, d'après la Proposition 3.10.b.

2. Sur tout produit admissible contenant $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$ de classes de stratégies en *feedback* discriminants inférieurs.

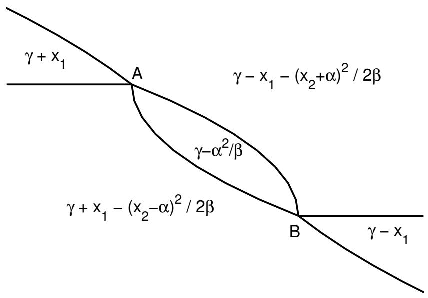


FIG. 4.1 – Différentes aires définissant la fonction valeur du jeu en distance minimum

b. Elle est maximale et constante, égale à $\gamma - \alpha^2/\beta$, dans la lentille délimitée par les deux branches de parabole :

$$\mathcal{L} = \{x \mid P^-(x), P^+(x) \geq \gamma - \alpha^2/\beta\} \ .$$

La valeur constante dans la lentille $\mathcal{L}$ est égale à la valeur commune atteinte par les trois fonctions $\gamma - |x_1|$, $P^-(x)$ et $P^+(x)$ aux points $A = (-\alpha^2/\beta,\alpha)$ et $B = (\alpha^2/\beta,-\alpha)$ (voir Figure 4.1).

c. L'ensemble des points où U s'annule est :
— vide si $\gamma - \alpha^2/\beta < 0$;
— sinon égal à

$$\{P^+(x) = 0, x_1 \geq -\gamma, x_2 \geq -\alpha\} \ \cup \ \{P^-(x) = 0, x_1 \leq \gamma, x_2 \leq \alpha\}$$
$$\cup \ \{-\gamma\} \times [\alpha, 2\sqrt{\beta\gamma} - \alpha] \ \cup \ \{\gamma\} \times [-\alpha, \alpha - 2\sqrt{\beta\gamma}]$$

(voir Figure 4.2).

On reconnaît exactement dans cette dernière expression la barrière trouvée par Bernhard [29] et Masle [110] pour le jeu de poursuite évasion dans le cas $p > 1$ (voir §4.2).

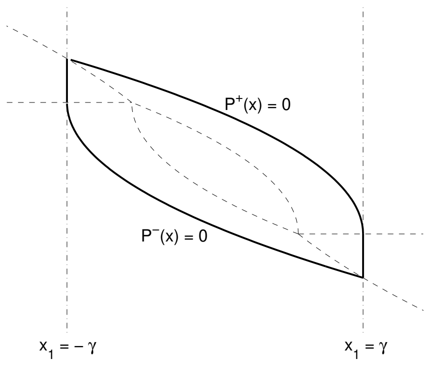


FIG. 4.2 – L'ensemble des points d'annulation de la valeur du jeu en distance minimum ($p > 1$)

Lemme 4.6 *Si f et g désignent des fonctions réelles sur $\mathbb{R}_+^\star$ telles que :*

$$(f(x) - g(y))(x - y) \leq 0 \tag{4.3}$$

pour tous $x,y \in \mathbb{R}_+^\star$ et si g est continue, alors f et g coincident sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Preuve Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$, en faisant tendre y vers x^+, respectivement x^-, dans 4.3, on déduit $f(x) \geq g(x)$, respectivement $f(x) \leq g(x)$, par continuité de g.

□

Preuve du Théorème 4.4

Soit I la partie d'un demi-axe issu de l'origine extérieure à $\mathcal{L}$, identifiée à $\mathbb{R}_+^\star$. Notons momentanément $U^\dagger$ le membre de droite de (4.2), U désignant indifféremment la valeur *feedback* inférieure ou supérieure du jeu de servomécanisme en distance minimum. La restriction de $U^\dagger$ à I est continue, comme $U^\dagger$. U et $U^\dagger$ restreintes à I vérifient alors les hypothèses du Lemme. En effet, notant pour $\delta < \gamma - \alpha^2/\beta$:

$$y := I \cap \mathcal{B}_{\gamma-\delta} \ ,$$

il vient alors :

$$U(x) \leq \delta = U^\dagger(y) \quad \text{ou} \quad U(x) \geq \delta = U^\dagger(y) \ ,$$

selon que x est au-delà ou en-deçà de y sur I, d'après la discussion précédant l'énoncé du Théorème. D'où $U \equiv U^\dagger$ sur I. Faisant varier I, on déduit $U \equiv U^\dagger$ à l'extérieur de $\mathcal{L}$.

Il reste à examiner ce qui se passe sur $\mathcal{L}$. Étant donné un point $x \in \mathcal{L}$, considérons un contrôle en boucle ouverte $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Notons y^x la trajectoire associée à $(x,\underline{\varphi},v(\cdot))$. D'après l'étude du jeu de poursuite évasion dans le cas $p \geq 1$, y^x ne saurait rentrer dans $\mathrm{Int}(\mathcal{L})$, pour cette paire de contrôles $(\underline{\varphi},v(\cdot))$ (Proposition 4.2 et Remarque 4.3). Donc :

• soit y^x reste indéfiniment à l'intérieur de la lentille, auquel cas

$$\inf_{t\geq 0} \dot{y}_1^x(t) \leq 0,$$

où $\dot{y}_1^x = y_2^x + \alpha$, et y^x rejoint B en temps infini. D'où :

$$\inf_{t\geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \leq \gamma - \alpha^2/\beta \quad ;$$

• sinon, y^x quitte une fois pour toutes $\mathrm{Int}(\mathcal{L})$ en un point ξ, à une date σ, et la conclusion précédente demeure vraie. En effet, tant que y^x est dans une bande $|y_1^x| \leq \alpha^2/\beta - \varepsilon$ (ε fixé > 0), on a pour $t \geq \sigma$ — si ξ appartient au bord supérieur de $\mathcal{L}$, ce qu'on peut supposer par symétrie :

$$\dot{y}_1^x = y_2^x + \alpha,$$

inférieurement positivement borné. Donc y^x quitte cette bande en temps fini, pour tout $\varepsilon > 0$, d'où la conclusion annoncée.

Par conséquent,

$$\inf_{\Phi} \sup_{\mathcal{V}} \inf_{t\geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \leq \gamma - \alpha^2/\beta$$

sur $\mathcal{L}$. Utilisant aussi (4.1) et l'inégalité entre les extrêmes dans (3.7), il vient sur $\mathcal{L}$:

$$\begin{aligned} \gamma - \alpha^2/\beta \quad &\leq \quad \sup_{\Psi} \inf_{\mathcal{U}} \inf_{t\geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \\ &\leq \quad \inf_{\Phi} \sup_{\mathcal{V}} \inf_{t\geq 0} \delta_{\mathcal{T}}[y^x(t)] \leq \gamma - \alpha^2/\beta \ , \end{aligned}$$

et les inégalités précédentes sont en fait des égalités, à la valeur de point-selle $\gamma - \alpha^2/\beta = U^\dagger(x)$.

□

Remarque 4.7 Cette analyse est bien indépendante du *ratio* $p > 0$.

4.4 Détermination de la barrière du jeu de poursuite évasion

Revenons à l'étude du jeu de poursuite évasion dans le cas $p < 1$. La valeur de point-selle en distance minimum précédente étant négative, il ne peut exister de barrière, d'après la Proposition 3.13.a — en valeur inférieure comme supérieure. Quant à l'étude directe et complète du jeu de poursuite évasion, elle est dans le cas $p < 1$ extrêmement compliquée. En effet, les deux paraboles s'intersectent alors à l'intérieur du domaine de jeu, délimitant une lentille qui n'est cependant pas une zone d'évasion : les coins "fuient". Suivant l'analyse classique de l'intersection des barrières, nous obtenons une intersection avec des trajectoires incidentes qui la traversent. Par conséquent cette surface composite n'est pas une barrière.

En fait, la lentille est l'intersection des zones de sûreté définies par chaque parabole. Donc, pour y rester, l'état ne doit traverser aucune des paraboles; une situation que le fugitif ne peut pas forcer car les contrôles nécessaires sont $+1$ pour une des paraboles, -1 pour l'autre. En atteignant un tel coin, le poursuivant peut garder le contrôle optimal en fonction de la parabole incidente de telle sorte que l'état quitte nécessairement la lentille.

Dans ce cas la lentille n'est pas une zone d'évasion. Mais la solution complète en terme de singularités de l'équation d'Isaacs est très compliquée. John Breakwell, lors d'une communication privée à Pierre Bernhard, a même suggéré que le nombre de commutations des contrôles optimaux de $+1$ à -1 et réciproquement peut être arbitrairement élevé, en fonction de l'état initial et de la valeur de p.

Cette complexité du champ des trajectoires optimales du jeu de poursuite évasion pour $p < 1$ a pour conséquence qu'il n'avait pas été possible de calculer la fonction valeur du jeu de poursuite évasion dans ce cas, et donc, stricto sensu, l'absence d'une zone d'évasion n'était pas complètement établie.

Ainsi, le passage par le jeu en distance minimum (qui profite lui même de l'étude du jeu de poursuite évasion dans le cas $p \geq 1$) est utile pour conclure à la capture partout si $p < 1$, en valeurs *feedback* inférieure ou supérieure.

Toute approche numérique pour les jeux différentiels comporte des limites intrinsèques : hypothèses restrictives pour que la méthode converge, absence d'éclairage sur la nature profonde des singularités, sans oublier bien sûr *the curse of dimensionnality* (le volume de calculs nécessaires limite l'utilisation des programmes à des jeux dont l'espace d'état est de dimension modeste). Cependant, sauf dans des cas de jeux particulièrement simples, des solutions analytiques comme celles présentées dans ce Chapitre sont hors de portée. D'où la nécessité de développer des méthodes numériques, qui ont l'avantage d'être systématiques — à défaut d'éclairer sur la nature profonde des solutions. Les méthodes numériques étudiées dans ce travail sont basées sur les liens existants entre la valeur du jeu et les solutions de viscosité de l'équation d'(Hamilton-Jacobi-Bellman-)Isaacs associée. En vue d'en venir à ces méthodes numériques, le Chapitre suivant introduit cette équation et précise les liens qui l'unissent à la valeur de nos jeux.

Chapitre 5

(In-)équations d'Isaacs

On s'intéresse dans ce Chapitre à la caractérisation de la fonction valeur d'un jeu différentiel à instant final variable de poursuite évasion ou en coût minimum, $\mathcal{G}$ (dynamique f, Lagrangien l, composante terminale du coût L, cible éventuelle $\mathcal{T}$), en termes de solutions de viscosité de l'(in-)équation d'Isaacs associée.

Une telle caractérisation est en effet un prérequis aux preuves de convergence de schémas numériques utilisant des arguments d'*edp* (Chapitre 7). Pour l'essentiel, le présent Chapitre 5 est une synthèse de travaux de Bardi *et al.* [13, 8, 7, 9] (jeux de poursuite évasion) ou Rapaport [116, 117] (jeux en coût minimum). En poursuite évasion, le Théorème (principe d'optimalité) 5.10 et le Théorème 5.12 qui en découle (*via* le Lemme 5.11 adapté de Evans-Souganidis [72]), sont standards (voir par exemple Barles [14, Théorèmes 5.1 et 5.2] pour des déroulements analogues en contrôle optimal, ou le livre de Bardi et Capuzzo-Dolcetta [9] pour les jeux).

5.1 Jeux transformés

On rappelle (Définition 3.1) que la transformée (de Kruzkov) de $\mathcal{G}$, ou jeu transformé, désigne la version du jeu ayant pour critère $I = \phi \circ J \in \mathbb{R}$, au lieu de $J \in \widetilde{R} \equiv \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($\phi(t) \equiv 1 - e^{-t}$, $e^{-\infty} = 0$). On notera $S := \phi \circ L$.

Pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, $(x,u(.),v(.)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $t \geq 0$, on notera :

$$(f^x,l^x)(t) \;\equiv\; (f,l)[y^x(t),u(t),v(t)] \;, \qquad \lambda^x(t) \;\equiv\; \exp\left(-\int_{s=0}^{t} l^x(s)\; ds\right)$$

$$\mathcal{H}^x_\varphi(t) \;\equiv\; \langle \nabla\varphi[y^x(t)],f^x(t)\rangle \;+\; (1-\varphi[y^x(t)])\; l^x(t)\;.$$

Proposition 5.1 *Dans le jeu $\mathcal{G}$ (vérifiant par défaut les Hypothèses 3.2) :*

a. S est continue (uniformément, en coût minimum), bornée, telle que pour $x \in \mathcal{E}$:

$$-\infty < \underline{S} := \phi(\underline{L}) \leq S(x) < 1\;; \tag{5.1}$$

b. la valeur VREK inférieure du jeu transformé, V, n'est autre que la transformée de Kruzkov de la valeur inférieure VREK du jeu, $\phi \circ U$; $\underline{S} \leq V \leq 1$.

c. pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, $(x,u(.),v(.)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$, $t \geq 0$:

$$I^x_{u(.),v(.)}(t) = \int_0^t \lambda^x(s) l^x(s) ds \;+\; \lambda^x(t) S[y^x(t)]\;; \tag{5.2}$$

$$\int_0^t \lambda^x(s) l^x(s) ds + \lambda^x(t)\varphi(y^x(t)) - \varphi(x) = \int_0^t \lambda^x(s) \mathcal{H}^x_\varphi(s) ds\;. \tag{5.3}$$

Preuve

a. Par application du Lemme élémentaire 2.1.a. En coût minimum, L uniformément continue, $-\infty \le \underline{L} \le L$, donc

$$\begin{aligned} |S(x) - S(y)| &\le \big(\sup_{[\underline{L},+\infty[} |\phi'|\big)\ |L(x) - L(y)| \\ &\le e^{-\underline{L}}\ \omega_L(\| x - y \|) \ = \ \omega_S(\| x - y \|) \end{aligned}$$

— ω désignant un module de continuité.

b. Par application du Lemme élémentaire 2.4.g. L'encadrement pour V provient alors du même encadrement pour les valeurs du critère I, et du Lemme élémentaire 2.4.c.

c. (5.2) provient du Lemme élémentaire 2.1.c. Pour (5.3), on écrit que $\lambda^x(t)\varphi(y^x(t))$ est l'intégrale de sa dérivée (dérivée t-presque partout, voir par exemple Rudin [123, Théorèmes 8.17 et 8.18]), soit

$$\begin{aligned} \lambda^x(t)\varphi(y^x(t)) - x &= \int_{s=0}^{t} [\langle \nabla\varphi(y^x(s)), f^x(s)\rangle - l^x(s)\varphi(y^x(s))]\, \lambda^x(s)\ ds \\ &= \int_{s=0}^{t} \lambda^x(s) \left[\mathcal{H}^x_\varphi(s) - l^x(s)\right]\ ds\ , \end{aligned}$$

par définition de $\mathcal{H}^x_\varphi$.

□

5.2 Hamiltoniens

Définition 5.2 *Au jeu $\mathcal{G}$ (transformé), on associe sur $\mathcal{E}$ son Hamiltonien :*

$$\mathcal{H}(x,s,p,u,v) \ = \ \langle p, f(x,u,v)\rangle + (1-s)l(x,u,v)\ ,$$

ainsi que son Hamiltonien inférieur :

$$H(x,s,p) \ = \ \max_{v\in V} \min_{u\in U} \mathcal{H}(x,s,p,u,v)\ , \tag{5.4}$$

où $\langle p, f(x,u,v)\rangle$ signifie le produit scalaire des vecteurs p et $f(x,u,v)$ dans $\mathcal{E}$, tandis que s désigne un scalaire réel.

*On définit également, pour un jeu de poursuite évasion (*pe*)*

$$G(x,s,p) \ = \ \begin{cases} H(x,s,p)\ , & x \in \Omega \\ S(x) - s\ , & x \in \Gamma\ ; \end{cases}$$

*et pour un jeu en coût minimum (*cm*)*

$$G(x,s,p) \ = \ H(x,s,p) \ \wedge \ (S(x) - s)\ ,\ x \in \mathcal{E}\ .$$

L'équation aux dérivées partielles non linéaire du premier ordre

$$G(x, V(x), \nabla V(x)) \ = \ 0 \tag{$\mathcal{I}$}$$

*sur $\overline{\Omega}$ (*pe*) ou $\mathcal{E}$ (*cm*), renotée le cas échéant $GV = 0$, s'appelle équation d'(Hamilton-Jacobi-Bellman-)Isaacs inférieure du jeu. De même, l'équation $H(x,V(x),\nabla V(x)) = 0$ sur $\mathcal{E}$ sera parfois notée $HV = 0$.*

Lemme 5.3 *Étant donné un jeu transformé $\mathcal{G}$, et $(u,v) \in \mathsf{U} \times \mathsf{V}$, on a :*

$$\begin{aligned} &|\mathcal{H}(x,s,p,u,v) - \mathcal{H}(y,t,q,u,v)| \ ,|H(x,s,p) - H(y,t,q)| \\ &\quad \leq \ \| p \| \lambda_f \| x-y \| \ + \ (1+|s|)\omega_l^R(\| x-y \|) \ + \ \overline{l}|s-t| \ + \ \overline{f} \| p-q \| \ , \end{aligned}$$

pour tous (x,s,p), $(y,t,q) \in \overline{B}_R \times \mathbb{R} \times \mathcal{E}$, ω_l^R désignant un module de continuité uniforme par rapport à $x \in \overline{B}_R$ de l, uniforme sur $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$.

Remarque 5.4 Par Hypothèses 3.2, ω_l^R, qu'on renotera alors ω_l', peut être choisi indépendamment de R en coût minimum.

Preuve du Lemme 5.3.

On développe

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x,s,p,u,v) - \mathcal{H}(y,t,q,u,v) \ &= \ \langle p, f(x,u,v) - f(y,u,v) \rangle \ + \ (1-s)\,(l(x,u,v) - l(y,u,v)) \\ &\quad + \ (t-s) l(y,u,v) \ + \ \langle p-q, f(y,u,v) \rangle \ , \end{aligned}$$

et on exploite les Hypothèses 3.2 sur $\mathcal{G}$. On applique ensuite le Lemme élémentaire 2.4.e.

□

On a alors la

Proposition 5.5 *Étant donné le jeu (de poursuite évasion ou en coût minimum) $\mathcal{G}$, H est continu sur $\mathcal{E}$, ainsi que, en coût minimum, G.*

Preuve (en coût minimum) Contenue dans celle de la Proposition 5.17.

□

S étant de plus continue (Proposition 5.1.a), on peut alors se référer aux concepts devenus classiques de solutions de viscosité (éventuellement fortes, dans le cas d'un jeu de poursuite évasion) des équations du premier ordre $-HV = 0$ ou $-GV = 0$, tels qu'ils sont présentés dans Barles [14] et rappelés dans l'Annexe A.

Le signe moins devant les Hamiltoniens H ou G sert à se placer dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi, généralement décrite pour des Hamiltoniens non décroissants en la variable réelle s — tandis que les Hamiltoniens H ou G de nos jeux sont décroissants en s (G étant le minimum de deux fonctions décroissantes, en coût minimum).

Dans la suite de ce travail, on écrira parfois $HV = 0$ ou $GV = 0$, au lieu de $-HV = 0$ ou $-GV = 0$. Ceci pourrait prêter à confusion dans un contexte où les deux écritures auraient un sens — alors potentiellement différent [14] — dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité, c'est-à-dire si H ou G étaient indépendants de la variable s.

Mais dans le contexte qui est le nôtre, H et G décroissent en s et seules les équations $-HV = 0$ et $-GV = 0$ ont un sens dans le cadre de la théorie des solutions de viscosité. On les notera alors parfois abusivement sans leur signe moins, sans risque d'ambigüité, afin d'alléger les écritures. Alors, d'après la Proposition 5.5 et l'Annexe A :

Définition 5.6 *Notons, pour toute fonction réelle F sur $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$) bornée au voisinage de $x \in \mathcal{R}$:*

$$\underline{F}(x) := \liminf_{\mathcal{R} \ni y \to x} F(y) \ , \qquad \overline{F}(x) := \limsup_{\mathcal{R} \ni y \to x} F(y) \ .$$

On se place dans le jeu différentiel à instant final variable (transformé) $\mathcal{G}$.

a. Par sous-solution *(respectivement sur-solution) de viscosité de $HV = 0$, on entendra dans toute la suite de cette Partie une sous-solution (respectivement sur-solution) de* *viscosité (au sens habituel) de $-HV = 0$, c'est-à-dire une fonction localement bornée, semi-continue supérieurement (respectivement inférieurement) V sur $\mathcal{E}$, telle que pour tout $x \in \mathcal{E}$, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, vérifiant $\varphi \geq V$ (respectivement $\varphi \leq V$) sur $\mathcal{E}$ avec égalité en x:*

$$-H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0 \quad (\textit{respectivement} \quad -H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0)$$

soit

$$H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0 \quad (\textit{respectivement} \quad H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0) \ .$$

b. *Par* sous-solution *(respectivement sur-solution) de viscosité de $GV = 0$, on entendra une sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité (au sens habituel) de $-GV = 0$, c'est-à-dire une fonction localement bornée, semi-continue supérieurement (respectivement inférieurement) V sur $\overline{\Omega}$* (pe) *ou $\mathcal{E}$* (cm)*, telle que pour tout $x \in \overline{\Omega}$* (pe) *ou $\mathcal{E}$* (cm)*, pour toute fonction-test $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, vérifiant $\varphi \geq V$ (respectivement $\varphi \leq V$) sur $\overline{\Omega}$ avec égalité en x:*

$$\underline{-G}(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0 \quad (\textit{respectivement} \quad \overline{-G}(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0) \ ,$$

soit

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0, & x \in \Omega \\ H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0 \ \textit{si} \ V(x) > S(x), & x \in \Gamma \quad (\text{pe}) \end{array} \right. \\ H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0 \ \textit{et} \ V(x) \leq S(x), \quad x \in \mathcal{E} \quad (\text{cm}) \ , \end{array}$$

respectivement,

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{ll} H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0, & x \in \Omega \\ H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0 \ \textit{si} \ V(x) < S(x), & x \in \Gamma \quad (\text{pe}) \end{array} \right. \\ H(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0 \ \textit{si} \ V(x) < S(x), \quad x \in \mathcal{E} \quad (\text{cm}) \ . \end{array}$$

c. *En poursuite évasion, on entendra dans ce travail par sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité* forte *de $GV = 0$ sur $\overline{\Omega}$, une sous-solution (respectivement sur-solution) V de $GV = 0$ sur $\overline{\Omega}$, vérifiant l'inégalité $V \leq S$ (respectivement $V \geq S$) en tout point de Γ.*

Remarque 5.7 On a les mêmes Définitions 5.2 et 5.6 que dans le cas (cm) pour un jeu en distance minimum, $\mathcal{G}$, mais on perd alors la Proposition (principe de comparaison) 5.17 et ses conséquences.

Remarque 5.8 On connaît toujours des sous-(respectivement sur-)solutions de viscosité V, au demeurant constantes, et fortes en poursuite évasion, à nos équations $HV = 0$ et $GV = 0$, à savoir :

$$V \equiv \underline{S} \quad (\text{respectivement } V \equiv 1) \ ,$$

où $\underline{S}$ est défini par (5.1). En effet :

$$H(x,\underline{S},0) = (1 - \underline{S}) \max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \ l(x,u,v) \geq 0, \quad x \in \mathcal{E} \ ;$$

$$G(x,\underline{S},0) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} H(x,\underline{S},0) \geq 0, & x \in \Omega \\ S(x) - \underline{S} \geq 0, & x \in \Gamma \end{array} \right. & (pe) \\ (S(x) - \underline{S}) \bigwedge H(x,\underline{S},0) \geq 0 \ ,x \in \mathcal{E} & (cm) \end{array} \right.$$

et

$$H(x,1,0) = 0, \quad x \in \mathcal{E} \ ; \quad G(x,1,0) = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{array}{ll} H(x,1,0) = 0, & x \in \Omega \\ (S(x) - 1) \leq 0, & x \in \Gamma \end{array} \right. & (pe) \\ (S(x) - 1) \bigwedge H(x,1,0) \leq 0 \ ,x \in \mathcal{E} & (cm) \end{array} \right.$$

De plus, en coût minimum, S est sur-solution (continue, bornée, forte) de l'équation d'Isaacs $\mathcal{I}$ du jeu. De même, en poursuite évasion, on sera parfois amené à poser l'Hypothèse suivante (toujours vérifiée si $S \equiv \phi \circ L \equiv 0$, par exemple $J \equiv \tau$, jeu en temps de capture).

Hypothèse 5.9 *S est une sous-solution (continue, bornée, forte) de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$ du jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$.*

Le cadre théorique des solutions de viscosité permet alors d'énoncer des conditions nécessaires (à l'aide de principes d'optimalité issus de la programmation dynamique), et parfois suffisantes (principes de comparaison), pour être la fonction valeur — VREK inférieure — d'un jeu (transformé) de poursuite évasion ou en coût minimum. Les deux sections suivantes explicitent ces conditions nécessaires et principes de comparaison.

5.3 Conditions nécessaires

Théorème 5.10 (Principe d'optimalité) *V désignant la valeur VREK inférieure transformée du jeu $\mathcal{G}$, on a pour $t \geq 0$:*

$$V(x) = \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t\wedge\tau} \lambda^x(s) l^x(s) ds + \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \lambda^x(t) V[y^x(t)] + \mathbf{1}_{\{t\geq\tau\}} \lambda^x(\tau) S[y^x(\tau)] \qquad (5.5)$$

si x est extérieur à la cible en poursuite évasion, ou si $V(x) < S(x)$ en coût minimum, τ désignant alors le temps d'atteinte du lieu $\{V = S\}$.

Preuve Considérons d'abord un jeu en coût minimum $\mathcal{G}$. En prenant $\sigma \equiv t \wedge \tau$ dans Rapaport [116, Proposition I.13], on a le principe d'optimalité suivant, valable pour la valeur VREK inférieure (non transformée) U du jeu :

$$U(x) = \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t\wedge\tau} l^x(s) ds + U[y^x(t \wedge \tau)] \ .$$

D'où par application du Lemme élémentaire 2.4.g:

$$\begin{aligned} V(x) = \phi \circ U(x) &= \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \phi \left(\int_0^{t\wedge\tau} l^x(s) ds + U[y^x(t \wedge \tau)] \right) \\ &= \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t\wedge\tau} \lambda^x(s) l^x(s) ds + \lambda^x(t \wedge \tau) V[y^x(t \wedge \tau)] \, , \end{aligned}$$

par le Lemme élémentaire (2.1.c).

Considérons à présent un jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$. x étant fixé dans Ω, t et ε étant fixés positifs, notons $W(x)$ le membre de droite dans (5.5). On va montrer :

$$V(x) - 2\varepsilon \leq W(x) \leq V(x) + 3\varepsilon \ ,$$

d'où le résultat, par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$.

Il existe $\alpha^1 \in \mathcal{A}$, tel que :

$$\begin{aligned} W(x) &\geq \sup_{v(.)\in\mathcal{V}} \int_0^{t\wedge\tau^1} \lambda^x_{\alpha^1,v(.)} l^x_{\alpha^1,v(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v(.)}(t \wedge \tau^1) V(x^1) \ - \ \varepsilon \\ V(x^1) &\geq \sup_{w(.)\in\mathcal{V}} I^{x^1}_{\alpha_{x^1},w(.)} - \varepsilon \geq I^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} \ - \ \varepsilon \ , \end{aligned}$$

pour $\alpha_{x^1} \in \mathcal{A}$ bien choisi, fonction de $x^1 \equiv y^x_{\alpha^1,v(.)}(t \wedge \tau^1)$, où $\tau^1 \equiv \tau^x_{\alpha^1,v(.)}$. Posons également :

$$\alpha[v(.)](s) := \begin{cases} \alpha^1[v(.)](s), & 0 \leq s \leq t \wedge \tau^1 \\ \alpha_{x^1}[v(.+t)](s-t), & s > t \wedge \tau^1 \ . \end{cases}$$

En particulier, $\alpha^1[v(.)] = \alpha[v(.)]$ sur $[0, t \wedge \tau^1]$; $t \wedge \tau^1 = t \wedge \tau$ (car $\tau = \tau_1$ si $\tau_1 \leq t$; et $t \wedge \tau^1 \leq \tau$), où $\tau \equiv \tau^x_{\alpha,v(.)}$; $x^1 = y^x_{\alpha,v(.)}(t \wedge \tau)$. Alors, $v(.)$ étant fixé dans $\mathcal{V}$:

$$W(x) \geq \int_0^{t\wedge\tau} \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} + \lambda^x_{\alpha,v(.)}(t \wedge \tau) I^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} - 2\varepsilon.$$

Soit, si $\tau \leq t$, $x^1 = y^x_{\alpha,v(.)}(\tau)$:

$$W(x) \geq \int_0^{\tau} \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} + \lambda^x_{\alpha,v(.)}(\tau) S(x^1) - 2\varepsilon = I^x_{\alpha,v(.)} - 2\varepsilon \ ,$$

tandis que si $t < \tau$, $x^1 = y^x_{\alpha,v(.)}(t)$, $\tau^2 = \tau^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} = \tau - t \in \overline{R}_+$:

$$W(x) \ \geq \ \int_0^t \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} \ + \ \lambda^x_{\alpha,v(.)}(t) I^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} \ - \ 2\varepsilon \ ,$$

où

$$I^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} = \int_0^{\tau^2} \lambda^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} l^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} + \lambda^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(\tau^2) S(x^2)$$

si τ^2 est fini, $\tau = t + \tau^2 \in \mathbb{R}_+$, $x^2 \equiv y^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(\tau^2) = y^x_{\alpha,v(.)}(\tau)$. Alors, par changement de variables $s \to t + s$:

$$\begin{aligned} W(x) \ &\geq \ \int_0^t \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} \\ &\quad + \ \lambda^x_{\alpha,v(.)}(t) \left(\int_t^{\tau} \lambda^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(.-t) l^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(.-t) + \lambda^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(\tau - t) S(x^2) \right) \\ &= \ \int_0^{\tau} \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} + \lambda^x_{\alpha,v(.)}(\tau) S(x^2) - 2\varepsilon \ = \ I^x_{\alpha,v(.)} - 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

car pour $s \geq t$:

$$\begin{aligned} l^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(s-t) \ &= \ l^x_{\alpha,v(.)}(s) \ , \\ \lambda^x_{\alpha,v(.)}(t) \lambda^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(s-t) \ &= \ \exp\left(- \int_0^t l^x_{\alpha,v(.)} \right) \exp\left(- \int_0^{s-t} l^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} \right) \\ &= \ \exp\left(- \int_0^t l^x_{\alpha,v(.)} \right) \exp\left(- \int_t^{s} l^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)}(.-t) \right) \\ &= \ \exp\left(- \int_0^s l^x_{\alpha,v(.)} \right) \ = \ \lambda^x_{\alpha,v(.)}(s) \ . \end{aligned}$$

Si enfin $\tau = \tau^2 = +\infty$, $I^x_{\alpha,v(.)} = I^{x^1}_{\alpha_{x^1},v(.+t)} = 1$, par convention, alors :

$$\begin{aligned} W(x) \ &\geq \ \int_0^t \lambda^x_{\alpha,v(.)} l^x_{\alpha,v(.)} + \lambda_{\alpha,v(.)}(t) \ - \ 2\varepsilon \\ &= \ 1 \ - \ 2\varepsilon \ = \ I^x_{\alpha,v(.)} \ - \ 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

d'après le Lemme élémentaire 2.1.c appliqué avec une composante terminale du coût prise égale à 0. Ainsi, dans tous les cas :

$$W(x) \geq I^x_{\alpha,v(.)} - 2\varepsilon \ ,$$

pour tout $v(.)$. D'où :

$$W(x) \geq \sup_{v(.)\in\mathcal{V}} I^x_{\alpha,v(.)} - 2\varepsilon \geq V(x) - 2\varepsilon.$$

De même, il existe $\alpha^1 \in \mathcal{A}$, tel que :

$$V(x) \geq \sup_{v(.)\in\mathcal{V}} I^x_{\alpha^1,v(.)} \ - \ \varepsilon \ , \tag{5.6}$$

et $v^1(.)$ puis $v^2(.)$ dans $\mathcal{V}$, tels que :

$$\begin{aligned} W(x) &\leq \int_0^{t\wedge\tau^1} \lambda^x_{\alpha^1,v^1(.)} l^x_{\alpha^1,v^1(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^1(.)}(t\wedge\tau^1)V(x^1) + \varepsilon, \\ V(x^1) &\leq I^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} + \varepsilon \ , \end{aligned}$$

où τ^1 et x^1 sont des notations pour $\tau^x_{\alpha^1,v^1(.)}$ et $y^x_{\alpha^1,v^1(.)}(t\wedge\tau^1)$, respectivement, et pour $v(.) \in \mathcal{V}$:

$$\alpha[v(.)](s) := \alpha^1[v_{t\wedge\tau^1}(.)](s+t),$$

où

$$v_{t\wedge\tau^1}(s) := \begin{cases} v^1(s), & 0 \leq s \leq t\wedge\tau^1, \\ v(s-t\wedge\tau^1), & t\wedge\tau^1 < s, \end{cases}$$

et en particulier :

$$\begin{aligned} \alpha^1[v^2_{t\wedge\tau^1}(\cdot)] &= \alpha^1[v^1(.)] \text{ sur } [0,t\wedge\tau^1] \ , \\ t\wedge\tau^1 &= t\wedge\tau \ , \\ x^1 &= y^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau}(.)}(t\wedge\tau) \ , \end{aligned}$$

où $\tau \equiv \tau^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau^1}(.)} = \tau^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau}(.)}$.
D'où :

$$W(x) \leq \int_0^{t\wedge\tau} \lambda^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau}(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau}(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_{t\wedge\tau}(.)}(t\wedge\tau) I^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} + 2\varepsilon.$$

Soit, si $\tau \leq t$:

$$\begin{aligned} W(x) &\leq \int_0^{\tau} \lambda^x_{\alpha^1,v^2_\tau(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_\tau(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_\tau(.)}(\tau)S(x^1) \ + \ 2\varepsilon \\ &= I^x_{\alpha^1,v^2_\tau(.)} + 2\varepsilon \ . \end{aligned}$$

Et si au contraire $\tau > t$, $\tau^2 \equiv \tau^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} = \tau - t \in \widetilde{\mathbb{R}}_+$:

$$W(x) \leq \int_0^{t} \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(t) I^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} + 2\varepsilon.$$

où

$$I^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} = \int_0^{\tau^2} \lambda^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} l^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} + \lambda^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(\tau^2)S(x^2)$$

si $\tau^2 = \tau - t$ est fini, $x^2 \equiv y^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(\tau^2) = y^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(\tau)$, auquel cas :

$$\begin{aligned} W(x) &\leq \int_0^t \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(t) \left(\int_0^{\tau-t} \lambda^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} l^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} + \lambda^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(\tau - t) S(x^2) \right) \ + \ 2\varepsilon \\ &= \int_0^\tau \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(\tau) S(x^2) \ + \ 2\varepsilon \ = \ I^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} \ + \ 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

car pour $s > t$,

$$\begin{aligned} l^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(s-t) &= l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(s) \\ \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(t) \lambda^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(s-t) &= \exp\left(-\int_0^t l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} \right) \exp\left(-\int_0^{(s-t)} l^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} \right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} \right) \exp\left(-\int_t^s l^{x^1}_{\alpha,v^2(.)}(. - t) \right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} \right) \ = \ \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(s). \end{aligned}$$

Enfin, si τ^2 et τ infinis, $I^{x^1}_{\alpha,v^2(.)} = I^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} = 1$:

$$\begin{aligned} W(x) &\leq \int_0^t \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} l^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + \lambda^x_{\alpha^1,v^2_t(.)}(t) \ + 2\varepsilon \\ &= 1 + 2\varepsilon = I^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + 2\varepsilon \ , \end{aligned}$$

par le Lemme élémentaire 2.1.c. Bref, dans tous les cas :

$$W(x) \leq I^x_{\alpha^1,v^2_t(.)} + 2\varepsilon \leq V(x) + 3\varepsilon \ ,$$

par (5.6).

$\square$

Lemme 5.11 (adapté d'Evans-Souganidis [72, Lemma 4.3]) *Étant donné le jeu $\mathcal{G}$, si $x \in \mathcal{E}$ et si $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, alors*

$$H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) > 0 \quad (\textit{respectivement} < 0)$$

entraîne

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^x(s) \mathcal{H}^x_\varphi(s) ds > 0 \quad (\textit{respectivement} < 0) \ ,$$

pour $t > 0$ suffisamment faible.

Preuve Supposons d'abord

$$H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) > 0 \ , \tag{5.7}$$

ce qu'on réécrit

$$\max_{v \in \mathsf{V}} \mathsf{H}(x,v) =: \theta > 0 \ ,$$

avec

$$\mathsf{H}(x,v) := \min_{u \in \mathsf{U}} \mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u,v) \ .$$

Alors, il existe $\overline{v}$ tel que

$$\mathsf{H}(x,\overline{v}) = \theta > 0 \ .$$

H varie continûment par rapport à son premier argument x (appliquer la Proposition 5.5 avec $\mathsf{V} \equiv$ singleton). Or, pour $(u(.),v(.)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ et $s \geq 0$:

$$||y^x(s) - x|| \leq \overline{f}\ s.$$

Donc, $y^x(s) \to x$ quand $s \to 0$, uniformément en les contrôleurs $u(.)$ et $v(.)$.
On a alors :

$$\mathsf{H}(y^x(s),\overline{v}) > \theta/2$$

pour $0 \leq s < t$, où t a été choisi suffisamment petit et $y^x(.)$ est une trajectoire du jeu pour des contrôleurs mesurables arbitraires $u(.)$ et $v(.)$. On déduit pour $\alpha \in \mathcal{A}$, $v(.) \equiv \overline{v}$ et $s \in [0,t[$:

$$\mathcal{H}^x_\varphi(s) \geq \theta/2 > 0\ .$$

Comme par ailleurs

$$\lambda^x(s) \geq \exp(-\overline{l}t) =: \underline{\lambda} > 0,$$

il s'ensuit que

$$\lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s) \geq \frac{1}{2}\theta\underline{\lambda}\ ,$$

puis par intégration sur $s \in [0,t]$

$$\int_0^t \lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s)ds \geq \frac{1}{2}\theta\underline{\lambda}t > 0,$$

ceci pour $v(.) \equiv \overline{v}$, uniformément en $\alpha \in \mathcal{A}$. A fortiori :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s)ds > 0\ .$$

Ceci achève la preuve du Lemme dans le cas (5.7).

Supposons maintenant

$$H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) \ =: \ -\theta < 0\ ,$$

soit

$$\max_{v\in\mathsf{V}} \min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u,v) \ = \ -\theta < 0\ .$$

Donc pour tout $v \in \mathsf{V}$, il existe $u(v) \in \mathsf{U}$ (sans régularité a priori de $u(v)$ en v), tel que

$$\mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u(v),v) \leq -\theta.$$

$\mathcal{H}$ étant uniformément continue sur $\mathsf{U} \times \mathsf{V}$, il s'ensuit :

$$\mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u(v),.) \leq -\frac{3\theta}{4},$$

sur $B_r(v) \bigcap \mathsf{V}$, pour r assez petit positif. Par compacité de V, on en déduit l'existence d'un sous-recouvrement fini, $(B_{r_m}(v_m))_{1\leq m\leq n}$, de V, tel que :

$$\mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u(v_m),.) \leq -\frac{3\theta}{4}$$

sur $B_{r_m}(v_m)$, pour $1 \leq m \leq n$. Pour pallier l'absence de régularité a priori de $u(v)$ en v, définissons alors :

$$\mathsf{V} \xrightarrow{\psi} \mathsf{U},$$

telle que :

$$\psi(v) = u(v_m),$$

si

$$v \in B_{r_m}(v_m) \setminus \bigcup_{l=1}^{m-1} B_{r_l}(v_l) \quad (1 \leq m \leq n) \ .$$

Alors :

$$\mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),\psi(v),v) \leq -\frac{3\theta}{4}, \tag{5.8}$$

pour tout $v \in \mathsf{V}$. Or, d'après le Lemme 5.3 :

$$\mathcal{H}(y^x(s),\varphi(y^x(s)),\nabla\varphi(y^x(s)),\psi \circ v(s),v(s)) \ - \ \mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),\psi \circ v(s),v(s)) \ \to \ 0$$

quand s tend vers 0, uniformément en $v(\cdot) \in \mathcal{V}$. Ceci, joint à (5.8), entraîne :

$$\mathcal{H}(y^x(s),\varphi(y^x(s)),\nabla\varphi(y^x(s)),\alpha[v(s)],v(s)) \leq -\theta/2,$$

pour $0 \leq s \leq t$, où t a été choisi assez petit positif, $v(.)$ arbitraire dans $\mathcal{V}$ et $\alpha \in \mathcal{A}$ (ψ étant constante par morceaux) telle que :

$$\alpha[v(.)] := \psi \circ v(.).$$

Alors, pour $0 \leq s \leq t$:

$$\mathcal{H}^x_\varphi(s) \leq -\theta/2 < 0,$$

puis comme au point précédent :

$$\lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s) \ \leq \ -\frac{1}{2}\theta\underline{\lambda} \ < \ 0$$

($\underline{\lambda} = e^{-\bar{l}t}$), et par intégration sur $s \in [0,t]$:

$$\int_0^t \lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s)ds \ \leq \ -\frac{1}{2}\theta\underline{\lambda}t < 0,$$

ceci pour α comme précédemment, et $v(.)$ arbitraire dans $\mathcal{V}$. D'où :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^x(s)\mathcal{H}^x_\varphi(s)ds < 0 \ .$$

□

Théorème 5.12 *Étant donné le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$, la valeur VREK inférieure transformée V est solution de viscosité discontinue bornée de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$.*

Preuve Montrons d'abord que $\overline{V}$ est sous-solution de $\mathcal{I}$, en tout point $x \in \overline{\Omega}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que x maximise $\overline{V} - \varphi$ sur $\overline{\Omega}$ et $\overline{V}(x) = \varphi(x)$ (donc $\overline{V} \leq \varphi$).

Supposons d'abord $x \in \Omega$. Soit $x_k \to x$ telle que $V(x_k) \to \overline{V}(x)$. Pour k assez grand, disons $k > \underline{k}$, on a :

$$d_\Gamma(x_k) \geq \frac{1}{2}d_\Gamma(x) =: C > 0 \ .$$

Donc le temps de sortie τ_k de la trajectoire du jeu issu du point x_k vérifie :

$$\tau_k \geq \frac{C}{\overline{\overline{f}}} > 0 \ ,$$

quels que soient α, $v(.)$. Le Théorème (principe d'optimalité) 5.10 en $x_k(k > \underline{k})$ se réécrit donc pour $t < C/\overline{f}$:

$$V(x_k) = \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) \ ,$$

soit :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) - V(x_k) = 0 \ .$$

Or, en $y^{x_k}(t)$:

$$V(y^{x_k}(t)) \leq \overline{V}(y^{x_k}(t)) \leq \varphi(y^{x_k}(t)) \ .$$

Donc :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) \varphi(y^{x_k}(t)) - V(x_k) \geq 0 \ ;$$

ou encore :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) \varphi(y^{x_k}(t)) - \varphi(x_k) + \varphi(x_k) - V(x_k) \geq 0 \ ;$$

soit enfin, d'après (5.3) :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) \mathcal{H}_{\varphi}^{x_k}(s) ds + \varphi(x_k) - V(x_k) \geq 0 \ . \tag{5.9}$$

Lorsque $k \to \infty$, on a d'après les Lemmes de Gronwall et 5.3, uniformément en α, $v(.)$:

$$\int_0^t \lambda^{x_k}(s) \mathcal{H}_{\varphi}^{x_k}(s) ds + \varphi(x_k) - V(x_k) \to \int_0^t \lambda^{x}(s) \mathcal{H}_{\varphi}^{x}(s) ds \ ;$$

d'où, par passage à la valeur VREK inférieure (Lemme élémentaire 2.4.e) et d'après (5.9) :

$$\inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x}(s) \mathcal{H}_{\varphi}^{x}(s) ds \geq 0 \ ,$$

ceci pour $t > 0$ assez petit, ce qui entraîne d'après le Lemme 5.11 :

$$H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0 \ ,$$

et signifie donc, lorsque φ varie, que $\overline{V}$ est sous-solution de $H = 0$ en $x \in \Omega$.

Supposons maintenant $x \in \Gamma$. On suppose de plus :

$$\overline{V}(x) > S(x)$$

(sinon, c'est fini). Soit alors x_k une suite de points de Ω telle que lorsque $k \to \infty$,

$$x_k \to x, \quad V(x_k) \to \overline{V}(x) \ .$$

Le Théorème (principe d'optimalité) 5.10 en x_k entraîne cette fois, pour t fixé > 0 :

$$\begin{aligned} V(x_k) &= \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t\wedge\tau_k} \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \mathbf{1}_{\{t<\tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) \\ &\qquad + \mathbf{1}_{\{t\geq\tau_k\}} \lambda^{x_k}(\tau_k) S(y^{x_k}(\tau_k)) \\ &\leq \inf_{\mathcal{A}} \int_0^{t\wedge\tau_k} \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \mathbf{1}_{\{t<\tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k})(t) \\ &\qquad + \mathbf{1}_{\{t\geq\tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) S(y^{x_k}(\tau_k)) + \frac{1}{k} \ , \end{aligned} \tag{5.10}$$

pour une application $\alpha \to v_k^\alpha(.)$ bien choisie. Supposons par l'absurde l'existence d'une extraction en k' et d'une suite $\alpha_{k'}$, telles que quand $k' \to \infty$:

$$\tau_{k'} \equiv \tau^{x_{k'}}_{\alpha_{k'}, v^{\alpha_{k'}}_{k'}(.)} \to 0 \ .$$

Alors, pour k' assez grand, on a $\tau_{k'} \leq t$, donc d'après (5.10) :

$$V(x_{k'}) \leq \int_0^{\tau_{k'}} \lambda^{x_{k'}}(s) l^{x_{k'}}(s) ds + \lambda^{x_{k'}}(\tau_{k'}) S(y^{x_{k'}}(\tau_{k'})) + \frac{1}{k'} \ ,$$

puis par passage à la limite lorsque $k' \to \infty$:

$$\overline{V}(x) \leq S(x) \ ,$$

ce qui a été exclu par hypothèse. De l'impossibilité de former une telle extraction k' et suite associée $\alpha_{k'}$, il s'ensuit :

$$\liminf_{k \to +\infty} \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} \tau^{x_k}_{\alpha, v_k^\alpha(.)} \ > \ 0, \qquad \tau_k = \tau^{x_k}_{\alpha, v_k^\alpha(.)} \geq t \ ,$$

uniformément en α, à condition de choisir $t > 0$ assez petit et k assez grand. Alors, (5.10) entraîne :

$$V(x_k) \leq \inf_{\mathcal{A}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) + \frac{1}{k}$$

pour les contrôles $v_k^\alpha(.)$, puis :

$$V(x_k) \leq \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) + \frac{1}{k} \ .$$

On conclut alors comme dans le premier cas.

Montrons de manière analogue que $\underline{V}$ est sur-solution de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$ de $\mathcal{G}$. Soit $x \in \overline{\Omega}$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ telle que

$$\varphi \leq \underline{V} \quad , \quad \varphi(x) = \underline{V}(x) \ .$$

Le cas où $x \in \Omega$ se traite de manière exactement symétrique à son homologue pour $\overline{V}$. Supposons donc directement

$$x \in \Gamma, \qquad \underline{V}(x) < S(x).$$

Il existe alors une suite de points x_k de Ω, telle que lorsque $k \to \infty$:

$$x_k \to x, \qquad V(x_k) \to \underline{V}(x) \ .$$

Le Théorème (principe d'optimalité) 5.10 en x_k donne cette fois :

$$\begin{aligned} V(x_k) &= \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t \wedge \tau_k} \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \mathbf{1}_{\{t < \tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) \\ &\qquad + \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_k\}} \lambda^{x_k}(\tau_k) S(y^{x_k}(\tau_k)) \\ &\geq \sup_{\mathcal{V}} \int_0^{t \wedge \tau_k} \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \mathbf{1}_{\{t < \tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) \\ &\qquad + \mathbf{1}_{\{t \geq \tau_k\}} \lambda^{x_k}(t) S(y^{x_k}(\tau_k)) - \frac{1}{k} \ , \end{aligned} \tag{5.11}$$

pour α_k bien choisi. De plus, par l'absurde, comme il a été fait pour $\overline{V}$, on a pour k assez grand :

$$\tau_k = \tau^{x_k}_{\alpha_k,v(.)} \geq t \ ,$$

pour $t > 0$ assez petit, uniformément en $v(.)$. (5.11) entraîne alors pour α_k :

$$\begin{aligned} V(x_k) &\geq \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) - \frac{1}{k} \\ &\geq \inf_{\mathcal{A}} \sup_{\mathcal{V}} \int_0^t \lambda^{x_k}(s) l^{x_k}(s) ds + \lambda^{x_k}(t) V(y^{x_k}(t)) - \frac{1}{k} \ , \end{aligned}$$

et on peut conclure comme dans le cas $x \in \Omega$.

□

De manière analogue, à partir (d'un raffinement, Rapaport [116, Lemme I.11]) du Théorème 5.10 :

Théorème 5.13 *Étant donné le jeu en coût minimum $\mathcal{G}$, la valeur inférieure VREK transformée V est solution de viscosité bornée de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$.*

Preuve Voir Rapaport [117, Corollaire 2.2 et preuve de la Proposition 2.5]. Justifions simplement la continuité de la valeur (sans difficulté particulière, mais énoncée sous des conditions moins fortes que dans Rapaport [117]). Étant donné $(x,u(\cdot),v(\cdot)) \in \mathcal{E} \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}$, on a (Commentaire 3.3.a)

$$J^x(t) \ \geq \ \underline{l}t + \underline{L} \ \geq \ L(x) \ = \ J^x(0)$$

si $t \geq T$, T localement uniforme en x, uniforme en $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. Or, pour $t \in [0,T]$ et x' dans un voisinage de x, il vient par application du Lemme de Gronwall :

$$|J^x(t) - J^{x'}(t)| \ \leq \ \int_0^t |l^x - l^{x'}| + |L[y^x(t)] - L[y^{x'}(t)]| \leq T\omega_l'(|x-x'|e^{\lambda_f T}) + \omega_L(|x-x'|e^{\lambda_f T})$$

(voir Remarque 5.4), qui tend vers 0 quand x' tend vers x, comme alors $|\inf_{t\geq 0} J^x(t) - \inf_{t\geq 0} J^{x'}(t)|$, majoré par $\sup_{t\in[0,T]} |J^x(t) - J^{x'}(t)|$; le tout, uniformément en $u(\cdot)$, $v(\cdot)$. La continuité de V en résulte, par application du Lemme élémentaire 2.4.e.

□

5.4 Principes de comparaison

La partie b de la Proposition 5.16 suivante est sujette à l'hypothèse de régularité suivante concernant $\overline{\Omega}$, classique pour aborder les problèmes de Contrôle Optimal ou de Jeux Différentiels à l'aide de solutions de viscosité.

Hypothèse 5.14 (Condition de Soner; voir Bardi-Soravia [13, Remark 1.3.ii]) *Il existe $c > 0$ et une fonction η bornée, uniformément continue de $\overline{\Omega} \cap B_c(\Gamma)$ dans $\mathcal{E}$, tels que pour tout $x \in \overline{\Omega} \cap B_c(\Gamma)$ et $t \in]0,c]$:*

$$B_{ct}(x + t\eta(x)) \subseteq \Omega \ .$$

Remarque 5.15 D'après [13, Appendix] l'Hypothèse 5.14 précédente est notamment satisfaite si $\mathcal{T}$ est *épilipschitzienne*, au sens où $\mathcal{T}$ est localement l'épigraphe de fonctions Lipschitziennes, à constantes de Lipschitz bornées (plus une condition de compacité). On renvoie pour les détails à [13, Proposition A.1].

Proposition 5.16 (Principe de comparaison, Bardi-Soravia [13]) *Étant donné le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$; si v (respectivement w) désigne une sous-solution supérieurement bornée (respectivement sur-solution inférieurement bornée) de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$, alors $v \leq w$ dès lors que l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

a. v et w sont respectivement sous-solution et sur-solution de viscosité fortes de $\mathcal{I}$;

b. v est sous-solution de viscosité continue forte de $\mathcal{I}$, ou w est sur-solution de viscosité continue forte de $\mathcal{I}$, $\overline{\Omega}$ vérifiant la Condition de Soner (Hypothèse 5.14).

Preuve

a. On applique [13, Theorem 1.2] avec $\Gamma_1 \equiv \emptyset$, $\Gamma_2 \equiv \Gamma$, $v_1 \equiv \underline{S} \vee v$, $v_2 \equiv 1 \wedge w$. En effet, v_1 (respectivement v_2) ainsi défini est sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité de $\mathcal{I}$, comme maximum (respectivement minimum) de deux sous-solutions (respectivement sur-solutions) dont l'une au moins est continue (Proposition A.10.a). v_1 (respectivement v_2) est même sous-solution (respectivement sur-solution) bornée forte de $\mathcal{I}$. On est donc bien dans les conditions d'application du Théorème évoqué ci-dessus.

b. On applique [13, Theorem 1.2] avec $\Gamma_1 = \Gamma$, $\Gamma_2 = \emptyset$ et toujours $v_1 \equiv \underline{S} \vee v$, $v_2 \equiv 1 \wedge w$.

$\square$

Proposition 5.17 (Principe de comparaison, Barles [14, Th. 4.3]) *Étant donné le jeu en coût minimum $\mathcal{G}$; on a $v \leq w$ dès que v (respectivement w) désigne une sous-solution supérieurement bornée (respectivement sur-solution inférieurement bornée) de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$.*

Preuve On applique Barles, [14, Théorème 4.3] à $\underline{S} \vee v$ et $1 \wedge w$ [1]. En effet, l'Hamiltonien G du jeu en coût minimum vérifie bien les hypothèses (H1), (H4) et (H11) de ce Théorème (voir [14, pp. 189–190]), adaptées en tenant compte de nos conventions de signe (voir §5.2). Ainsi :

• Pour (H1), on a d'après le Lemme élémentaire 2.4.b :

$$\begin{aligned} H(x,s,p) - H(x,t,p) &\geq \min_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} \left(\mathcal{H}(x,s,p,u,v) - \mathcal{H}(x,t,p,u,v)\right) \\ &= \min_{\mathsf{U}\times\mathsf{V}} (t-s) l(x,u,v) \\ &\geq (t-s)\underline{l} \quad \text{si} \quad s \leq t \ , \end{aligned}$$

par Définition 5.2 de $\mathcal{H}$. Puis

$$(S(x) - s) - (S(s) - t) = t - s \ ,$$

donc d'après le Lemme élémentaire 2.2.iii :

$$G(x,s,p) - G(x,t,p) \geq (1 \wedge \underline{l})(t-s) \ \text{ si } s \leq t.$$

• Pour (H4) et (H11), on a d'après le Lemme 5.3 et la Remarque 5.4 :

$$\begin{aligned} &|H(x,s,p) - H(y,t,q)| \leq \\ &\qquad \| p \| \lambda_f \ \| x - y \| + (1 + |s|)\omega_l'(\| x - y \|) + \overline{l}|s - t| + \overline{f}||p - q|| =: A \ , \end{aligned}$$

tandis que

$$|S(x) - s - S(y) - t| \leq |t - s| + \omega_S(||x - y||) =: B \ .$$

1. Qui sont respectivement sous-solution bornée et sur-solution bornée, comme plus haut.

Donc, par le Lemme élémentaire 2.2.iv :

$$|G(x,s,p) - G(y,t,q)| \leq A \vee B \; .$$

$\square$

Corollaire 5.18 *On se place dans le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$. Si la valeur VREK inférieure transformée V est continue sur Γ, alors l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$ admet une et une seule solution de viscosité bornée forte, à savoir V — qui est donc continue sur $\overline{\Omega}$. Si de plus $\overline{\Omega}$ vérifie la condition de Soner (Hypothèse 5.14), alors V est la seule solution de viscosité bornée de $\mathcal{I}$.*

Preuve V est solution de viscosité discontinue de $\mathcal{I}$, d'après la Proposition 5.3. Donc ses enveloppes semi-continues $\underline{V}$ et $\overline{V}$ sont respectivement sur-solution et sous-solution de viscosité de $\mathcal{I}$. Elle sont par ailleurs bornées, comme V. Enfin, sur Γ, elles coïncident avec V, par continuité de cette dernière, qui n'est elle-même autre que S. Donc $\overline{V} \leq \underline{V}$ sur $\overline{\Omega}$, d'après la Proposition 5.16.a. Comme par ailleurs on a sur $\overline{\Omega}$ l'inégalité opposée, il s'agit en fait d'une égalité. V est alors solution de viscosité bornée forte de $\mathcal{I}$ — l'égalité précédente impliquant notamment la continuité sur $\overline{\Omega}$ tout entier de V, qui était déjà solution de viscosité discontinue.

Réciproquement, si v désigne une solution de viscosité bornée forte de $\mathcal{I}$, alors $V = v$ par applications successives de la Proposition (principe de comparaison) 5.16.a à (V,v) puis (v,V), et il en va de même si v désigne une solution de viscosité bornée (non nécessairement forte) de $\mathcal{I}$, mais que $\overline{\Omega}$ vérifie la condition de Soner (Hypothèse 5.14), par applications successives de la Proposition (principe de comparaison) 5.16.b.

$\square$

Corollaire 5.19 *On se place dans le jeu en coût minimum $\mathcal{G}$. L'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$ admet une et une seule solution de viscosité bornée, à savoir la valeur VREK inférieure transformée V. V est même la seule solution de viscosité discontinue bornée de $\mathcal{I}$.*

Preuve Seule l'unicité dans le cadre discontinu reste à démontrer, d'après les Propositions 5.13 et 5.17 précédentes. Soit alors v solution de viscosité discontinue bornée de l'équation d'Isaacs du jeu. V et $\underline{v}$ (respectivement $\overline{v}$) sont donc sur-solutions (respectivement sous-solutions) bornées, d'où la double inégalité suivante, d'après la Proposition (principe de comparaison) 5.17 :

$$\overline{v} \leq V \leq \underline{v} \; ,$$

qui est en fait une double égalité, à V, par définition des enveloppes semi-continues.

$\square$

5.5 Exemple du servomécanisme

Dans l'exemple du servomécanisme, étudié analytiquement au Chapitre 4, on peut montrer directement par le calcul que la valeur *feedback*, et présumée VREK, transformée, du jeu de poursuite évasion (respectivement en distance minimum) est solution de viscosité discontinue (respectivement solution de viscosité) de l'équation d'Isaacs du jeu. Montrons-le notamment en distance minimum.

Théorème 5.20 *On considère à nouveau le jeu du servomécanisme en distance minimum (§4.3). Soit U, la valeur* feedback *mise en évidence au Théorème 4.4. Alors $V \equiv \phi \circ U$ est solution de viscosité de l'inéquation d'Isaacs du jeu (transformé).*

Preuve On utilise la formulation par semi-différentiels (Proposition A.6.b). U est continue et n'excède nulle part $\delta_{\mathcal{T}}(.)$. V est donc solution de viscosité de l'inéquation d'Isaacs, si et seulement si :

$$\begin{cases} \max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > \quad \geq 0, \, \forall p \in \overline{D}V(x) \\ V(x) = \phi \circ \delta_{\mathcal{T}}(x) \text{ ou } \max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > \quad \leq 0, \, \forall p \in \underline{D}V(x) \,. \end{cases}$$

Soit, puisque $\overline{D}V(x) = e^{-U(x)}\overline{D}U(x)$ (Proposition A.8) et idem en $\underline{D}$:

$$\begin{cases} \max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > \quad \geq 0, \, \forall p \in \overline{D}U(x) \\ U(x) = \delta_{\mathcal{T}}(x) \text{ ou } \max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > \quad \leq 0, \, \forall p \in \underline{D}U(x) \,. \end{cases}$$

Le calcul direct montre que U satisfait l'inéquation à ses points différentiables. À ses points non différentiables, utilisant des règles de calcul non lisse (voir par exemple Clarke [52] ou Proposition A.9), nous avons :

- pour x tel que $P^+(x) = \gamma + x_1$ et $x_2 > \alpha$,

$$\overline{D}U(x) = \left\{ -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ (x_2+\alpha)/\beta \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in [0,1]}, \qquad \underline{D}U(x) = \emptyset.$$

Donc $\max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > = (1-2\lambda)x_2 - |1-2\lambda|\alpha + \lambda(x_2+\alpha) \geq 0, \quad \forall p \in \overline{D}U(x)$, et par symétrie, nous avons les mêmes inégalités aux points x tel que $P^-(x) = \gamma - x_1$ and $x_2 < -\alpha$;

- pour x tel que $P^+(x) = \gamma - \alpha^2/\beta$ et $|x_2| < \alpha$,

$$\overline{D}U(x) = \left\{ -\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ (x_2+\alpha)/\beta \end{pmatrix} + (1-\lambda) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda \in [0,1]}, \qquad \underline{D}U(x) = \emptyset.$$

Donc $\max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(x,u,v) > = -\lambda(x_2+\alpha) + \lambda(x_2+\alpha) = 0, \quad \forall p \in \overline{D}U(x)$, et par symétrie, nous avons les mêmes inégalités aux points x tel que $P^-(x) = \gamma - \alpha^2/\beta$ and $|x_2| < \alpha$;

- au point A (voir Figure 4.1) :

$$\overline{D}U(A) = \left\{ -\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\alpha/\beta \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\lambda_1-\lambda_2) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \\ \lambda_1+\lambda_2 \leq 1}}$$

$$\underline{D}U(A) = \emptyset.$$

Donc $\max_{v \in \mathsf{V}} \min_{u \in \mathsf{U}} \quad < p, f(A,u,v) > = (\lambda_2-\lambda_1)\alpha - |\lambda_2-\lambda_1|\alpha + 2\lambda_1\alpha \geq 0, \quad \forall p \in \overline{D}U(A)$, et par symétrie, nous avons les mêmes inégalités au point B .

U est donc bien solution de viscosité de l'inéquation d'Isaacs du jeu.

□

En poursuite évasion, lorsque p est supérieur à 1, on pourrait mener des calculs analogues, pour prouver que $\underline{V}$ et $\overline{V}$ préalablement calculées à l'aide de la valeur *pe* transformée $V \equiv \phi \circ U$ (§4.2) sont respectivement sur-solution et sous-solution de viscosité de l'équation d'Isaacs du jeu. On ne mènera pas le calcul ici. En effet, ces résultats sont peu utilisables pour prouver que V est la valeur du jeu (en poursuite évasion comme en distance minimum), faute de résultats d'unicité (principes de comparaison) appropriés pour l'équation d'Isaacs correspondante (pas de principe de comparaison discontinu en poursuite évasion et pas de principe de comparaison en distance minimum).

La démarche qu'on adopte dans la suite de cette Partie consiste à calculer numériquement, à l'aide de jeux à différences finies, les fonctions valeurs de nos jeux, caractérisées comme uniques solutions de viscosité bornées (fortes dans le cas poursuite évasion) de leurs équations d'Isaacs respectives. Toutefois, la présence éventuelle de discontinuités dans les fonctions valeurs de nos jeux (voir notamment Corollaire 5.18) appelle un travail préliminaire supplémentaire : le recours aux solutions enveloppes de viscosité, suivant la théorie de l'école italienne [8, 7].

5.6 Solutions enveloppes de viscosité

Commentaire 5.21 *L'introduction des ces solutions enveloppes est inspirée de la méthode de Perron pour prouver l'existence de solutions classiques à certaines équations elliptiques, voir par exemple Courant-Hilbert [56]; voir aussi Ishii [88] pour une version de cette méthode dans le cadre des solutions de viscosité (continues).*

5.6.1 Jeu de poursuite évasion

Soit $\mathcal{G}$ un jeu de poursuite évasion. Par jeu à cible dilatée de ε, $\mathcal{G}_\varepsilon$, on entendra dans la suite le jeu à cible $\mathcal{T}_\varepsilon$ (Lemme 2.5.c), $\mathcal{E} \setminus \mathcal{T}_\varepsilon$ renoté Ω_ε (bord Γ_ε).

On notera $V_{(\varepsilon)}$,$\mathcal{I}_{(\varepsilon)}$,$\sigma_{(\varepsilon)}$,$\Sigma_{(\varepsilon)}$, la valeur VREK inférieure transformée, l'équation d'Isaacs inférieure, l'ensemble des sous-solutions fortes supérieurement bornées de cette équation, l'ensemble des sur-solutions fortes inférieurement bornées de cette équation, respectivement; et enfin, pour $x \in \overline{\Omega}_{(\varepsilon)}$,

$$v_{(\varepsilon)}(x) := \sup_{u \in \sigma_{(\varepsilon)}} u(x) \ . \tag{5.12}$$

$\sigma_{(\varepsilon)}$, respectivement $\Sigma_{(\varepsilon)}$, contiennent la fonction constante égale à $\underline{S}$, respectivement 1 (Remarque 5.8). D'où par la Proposition (principe de comparaison) 5.16.a :

$$u \leq 1, \quad u \leq v, \quad \underline{S} \leq v \ ,$$

pour tout $(u,v) \in \sigma_{(\varepsilon)} \times \Sigma_{(\varepsilon)}$.

Lemme 5.22 *On suppose (Hypothèse 5.9) que S est sous-solution de viscosité (continue, bornée, forte) de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$ du jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$. Soit ε fixé > 0. La prolongée $\tilde{u}$ par S sur $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, d'une sous-solution de viscosité supérieurement bornée $u \geq S$ de l'équation $\mathcal{I}_\varepsilon$, est sous-solution de viscosité forte supérieurement bornée de $\mathcal{I}$ ($\tilde{u} \in \sigma$).*

Preuve Il ne reste qu'à vérifier la propriété de sous-solution de viscosité pour $\tilde{u}$ au point courant $x \in \Gamma_\varepsilon$. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ une fonction-test telle que $\tilde{u} - \varphi$ est maximale sur $\overline{\Omega}$, nulle en x.

Alors il en va de même pour $S - \varphi$, pour peu qu'on ait de plus $u(x) \leq S(x)$; car alors

$$\varphi(x) = \tilde{u}(x) = u(x) \leq S(x) \, ,$$

tandis que par hypothèse, $S \leq u$ sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$, donc $S \leq \tilde{u} \leq \varphi$ sur $\overline{\Omega}$. Donc, S étant sous-solution en x pour le domaine $\overline{\Omega}$, on a :

$$H[x,S(x),\nabla\varphi(x)] \geq 0 \, ,$$

où $S(x)$ n'est autre que $\tilde{u}(x)$.

Si au contraire $u(x) > S(x)$, alors par la condition au bord faible pour u sur Γ_ε :

$$H[x,u(x),\nabla\varphi(x)] \geq 0 \ ,$$

où $u(x) = \tilde{u}(x)$. En effet, $u - \varphi$ est maximale sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$, nulle en x, comme restriction de $\tilde{u} - \varphi$.

Finalement, on a bien $\tilde{u} \in \sigma$.

□

Proposition 5.23 (Bardi, Bottacin, Falcone [8, 7]) *On fait l'Hypothèse 5.9 sur le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$ (S sous-solution de $\mathcal{I}$). Alors :*

a. $v = \min \Sigma$*, qui, en tout* $x \in \Omega$*, n'est autre que la limite croissante (au sens large) des* $v_\varepsilon(x)$ *quand* $\varepsilon \searrow 0^+$*; la fonction* v *sur* $\overline{\Omega}$*, à valeurs dans* $[\underline{S},1]$*, s'appelle solution* enveloppe de viscosité *de* $\mathcal{I}$*.*

b. si v *est continue, alors* $v = \max \sigma$*, l'unique solution de viscosité bornée forte de* $\mathcal{I}$*.*

Preuve

a. D'après Bardi *et al.* [8, 7], le supremum, $\tilde{v}$, des sous-solutions bornées fortes de $\mathcal{I}$, en est la plus petite sur-solution bornée forte. Or, pour tout $(u',v') \in \sigma \times \Sigma$, $u' \vee S$, resp. $1 \wedge v'$, est une sous-, resp. sur-, solution bornée forte de $\mathcal{I}$ (Proposition A.10.a). D'où

$$u' \ \leq \ u' \vee S \ \leq \ \tilde{v} \ \leq \ 1 \wedge v' \ \leq \ v' \ ,$$

et $v = \tilde{v} = \min \Sigma$.

De plus, toujours d'après Bardi *et al.*, $v(x) = \tilde{v}(x)$ ($x \in \Omega$) est la limite croissante (au sens large) des $\tilde{v}_\varepsilon(x)$ quand $\varepsilon \searrow 0^+$, où $\tilde{v}_\varepsilon \equiv \sup \tilde{\sigma}_\varepsilon$; $\tilde{\sigma}_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$), l'ensemble des sous-solutions bornées de $\mathcal{I}$, coïncidant avec S sur $\overline{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$ (donc $\tilde{\sigma}_\varepsilon|_{\overline{\Omega}_\varepsilon} \subseteq \sigma_\varepsilon$). Mais $\tilde{v}_\varepsilon$ n'est autre que v_ε, prolongée par S sur $\overline{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$. En effet, les deux objets coïncident (avec S) sur $\overline{\Omega} \setminus \Omega_\varepsilon$, tandis que par l'inclusion précédente $v_\varepsilon \geq \tilde{v}_\varepsilon$ sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$. Enfin, pour toute $u \in \sigma_\varepsilon$, alors $u \vee S$ bornée, $u \vee S \in \sigma_\varepsilon$ (sous l'Hypothèse 5.9, Proposition A.10.a) $u \vee S \geq S$ (avec égalité sur Γ_ε), donc (Lemme 5.22) $u \vee S$, prolongée par S sur $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, appartient à $\tilde{\sigma}_\varepsilon$, et sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$:

$$v_\varepsilon \ = \ \sup \sigma_\varepsilon \ \leq \ \sup_{u \in \sigma_\varepsilon} u \vee S \ \leq \ \sup \tilde{\sigma}_\varepsilon \ = \ \tilde{v}_\varepsilon \ .$$

b. v est donc bornée, $\underline{S} \leq v \leq 1$. Si elle est de plus continue, alors elle est sous-solution de viscosité comme *supremum* continu de sous-solutions (Proposition A.10.b). L'unicité et le caractère extrêmal résultent de la Proposition (principe de comparaison) 5.16.a.

□

La Proposition 5.26 suivante fait le lien entre cette solution enveloppe et la valeur du jeu.

Hypothèse 5.24 *Pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment faible,* Ω_ε *vérifie la condition de Soner (Hypothèse 5.14).*

Remarque 5.25 L'Hypothèse 5.24 est notamment vérifiée si $\mathcal{T}$ est convexe (ou plus généralement proximalement lisse [53], Lemme 2.5.d) compacte.

Proposition 5.26 (Bardi, Bottacin, Falcone[8, 7]) *Hypothèse 5.9 sur le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$. Alors :*

a. pour ε positif,

$$v_\varepsilon \leq \underline{V}_\varepsilon \leq \overline{V}_\varepsilon \leq v \tag{5.13}$$

sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$, si celui-ci vérifie la Condition de Soner (Hypothèse 5.14) ;

b. sous l'Hypothèse 5.24, $v(x) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} V_\varepsilon(x)$, en tout $x \in \Omega$;

c. $v \equiv V$ si v est continue, $\overline{\Omega}$ vérifiant la condition de Soner (Hypothèse 5.14).

Preuve c résulte des Proposition 5.23.b, Théorème 5.12, et Proposition (principe de comparaison) 5.16.b; b est un corollaire immédiat de a et de la Proposition 5.23.a; montrons a (prouvé dans [8] dans la cadre plus restrictif d'un critère de coût égal au temps de capture τ).

D'après le Théorème 5.12, V_ε est solution de viscosité discontinue bornée de $\mathcal{I}_\varepsilon$. $\underline{V}_\varepsilon$ est donc sur-solution bornée de cette équation, dont S est sous-solution bornée, continue, forte sous l'Hypothèse 5.9. Donc

$$S \leq \underline{V}_\varepsilon \leq \overline{V}_\varepsilon \tag{5.14}$$

sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$, par application de la Proposition (principe de comparaison) 5.16.b, puis $u \leq \underline{V}_\varepsilon$ sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$ pour $u \in \sigma_\varepsilon$ par application de la Proposition (principe de comparaison) 5.16.a. On en déduit la première inégalité dans (5.13) par passage au supremum sur σ_ε.

Prouvons maintenant la dernière inégalité dans (5.13). $\overline{V}_\varepsilon$ est sous-solution bornée de $\mathcal{I}_\varepsilon$. Donc $\widetilde{V}$, prolongée de $\overline{V}_\varepsilon$ par S dans $\overline{\Omega} \setminus \overline{\Omega}_\varepsilon$, appartient à σ (Lemme 5.22). Or, (Proposition 5.23.a) $v \in \Sigma$. Donc $\widetilde{V} \leq v$ sur $\overline{\Omega}$, et, a fortiori, $\overline{V} \leq v$ sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$.

□

5.6.2 Jeu en distance minimum

Étant donné un jeu en distance minimum, $\mathcal{G}$, associé à un jeu de poursuite évasion de cible $\mathcal{T}$, on introduit le jeu en coût minimum $\mathcal{G}_\varepsilon$, correspondant au jeu en distance minimum écrétée inférieurement au niveau $-R$, $L \equiv \delta^R_{\mathcal{T}}$, et à pénalité Lagrangienne $l \equiv \varepsilon$ (paramètre ε, constante R, fixés > 0, voir Commentaire 3.3.e). On notera respectivement $V_{(\varepsilon)}$,$\mathcal{I}_{(\varepsilon)}$,$\sigma_{(\varepsilon)}$,$\Sigma_{(\varepsilon)}$, la valeur VREK inférieure transformée de $\mathcal{G}_{(\varepsilon)}$, son équation d'Isaacs inférieure, l'ensemble des sous-solutions supérieurement bornées de cette équation, l'ensemble des sur-solutions inférieurement bornées de cette équation (tous dépendant implicitement de la constante R).

$\sigma_{(\varepsilon)}$, respectivement $\Sigma_{(\varepsilon)}$, contient la fonction constante égale à $\underline{S}$, respectivement 1 (Remarque 5.8). D'où par la Proposition (principe de comparaison) 5.17, pour $\varepsilon > 0$:

$$u \leq 1, \quad u \leq v, \quad \underline{S} \leq v \ ,$$

pour tout $(u,v) \in \sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon$.

On rappelle — toujours pour $\varepsilon > 0$ — que V_ε est solution de viscosité bornée de l'équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}_\varepsilon$, dont V_ε est également l'unique solution de viscosité discontinue bornée (Corollaire 5.19).

Proposition 5.27 (Rapaport [116]) *Étant donnés le jeu en distance minimum, $\mathcal{G}$; la constante R fixée > 0. Alors,*

a. $V_\varepsilon = \max \sigma_\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$;

b. sous l'Hypothèse supplémentaire 5.28 suivante, $(-R) \vee V = \max \sigma$, limite décroissante (au sens large) de V_ε quand $\varepsilon \searrow 0^+$; la fonction v ainsi définie sur $\mathcal{E}$, à *valeurs dans* $[\underline{S},1]$ *(*$\underline{S} = \phi(R)$*), s'appelle* solution enveloppe de viscosité *de l'équation d'Isaacs inférieure* $\mathcal{I}$*. C'est la plus grande sous-solution supérieurement bornée de cette équation.*

Hypothèse 5.28 *Pour tout* $(x,\alpha) \in \mathcal{E} \times \mathcal{A}$ *et* $\eta > 0$*, il existe* T *fini, tel que pour tout* $y^x \equiv y^x_{\alpha,v(\cdot)}$ *(*$v(\cdot) \in \mathcal{V}$*)*

$$\inf_{[0,T]} \delta_{\mathcal{T}} \circ y^x \;\leq\; \inf_{[0,+\infty[} \delta_{\mathcal{T}} \circ y^x + \eta \; . \tag{5.15}$$

Preuve de la Proposition 5.27

a. Par la Proposition (principe de comparaison) 5.17.

b. En effet, dans les conditions de l'Hypothèse 5.28, on a d'après le Lemme élémentaire 2.3:

$$\begin{aligned}
\inf_{[0,T]} \delta^R_{\mathcal{T}} \circ y^x &= (-R) \vee \inf_{[0,T]} \delta_{\mathcal{T}} \circ y^x \\
&\leq (-R+\eta) \vee \left(\inf_{[0,+\infty[} \delta_{\mathcal{T}} \circ y^x + \eta \right) \\
&= \inf_{[0,+\infty[} \delta^R_{\mathcal{T}} \circ y^x + \eta \; .
\end{aligned}$$

D'après Rapaport [117], on a alors le b, avec, à la place de $(-R)\vee V$, la valeur VREK transformée du jeu en distance minimum $\delta^R_{\mathcal{T}}$ — mais les deux objets coïncident, en vertu des Lemmes élémentaires 2.3 et 2.4.h.

□

Remarque 5.29 En valeurs supérieures, l'hypothèse analogue à 5.28 prend la forme suivante.

Hypothèse 5.30 *Pour tout* $(x,u(\cdot)) \in \mathcal{E} \times \mathcal{U}$*, et* $\eta > 0$*, il existe* T *fini, tel que (5.15) vaut pour tout* $y^x \equiv y^x_{u(\cdot),\beta}$ $(\beta \in \mathcal{B})$.

5.7 Points-selles

Les résultats précédents reliant valeurs inférieures des jeux et solutions de viscosité de leurs équations d'Isaacs inférieures, mis en regard des résultats analogues concernant les fonctions valeurs et équations d'Isaacs supérieures, permettent de prouver l'existence de fonctions valeurs de point-selle VREK pour ces jeux lorsque la condition d'Isaacs est satisfaite — auquel cas les équations d'Isaacs inférieures et supérieures du jeu coïncident, on parle alors d'équation d'Isaacs du jeu.

Hypothèse 5.31 (Condition d'Isaacs) *On a un point-selle du petit jeu :*

$$\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \langle q, f(x,u,v)\rangle \;+\; l(x,u,v) \;=\; \min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} \langle q, f(x,u,v)\rangle \;+\; l(x,u,v),$$

pour tout $(x,q) \in \mathcal{E}^2$.

Alors, (en prenant $q \equiv p/(1-s)$, $\underline{S} \leq s < 1$, puis en faisant tendre s vers 1^-)

$$\max_{\mathsf{V}} \min_{\mathsf{U}} \mathcal{H}(x,s,p,u,v) \;=\; \min_{\mathsf{U}} \max_{\mathsf{V}} \mathcal{H}(x,s,p,u,v) \; ,$$

pour tout $(x,s,p) \in \mathcal{E} \times [\underline{S},1] \times \mathcal{E}$; d'où coïncidence des équations d'Isaacs inférieures et supérieures du jeu de poursuite évasion ou en coût minimum transformé $\mathcal{G}$.

Proposition 5.32 *Dans le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$ vérifiant la Condition d'Isaacs (Hypothèse 5.31) :*

a. si les valeurs VREK inférieures et supérieures transformées sont continues sur Γ, ou, $\overline{\Omega}$ étant supposé de plus vérifier la condition de Soner (Hypothèse 5.14), si l'une des deux est continue, alors ces valeurs coïncident, et cette valeur commune définit une valeur de point-selle VREK continue ;

b. Hypothèses 5.9 et 5.24 sur $\mathcal{G}$. Alors les valeurs VREK inférieures et supérieures transformées des jeux $\mathcal{G}_\varepsilon$ (à cibles dilatées de ε) convergent vers une même limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$.

Preuve

a. Par le Corollaire 5.18, et l'énoncé analogue concernant les valeurs VREK et équations d'Isaacs supérieures.

b. La limite en question est la solution enveloppe de viscosité de l'équation d'Isaacs de $\mathcal{G}$, d'après la Proposition 5.26.b et l'énoncé analogue concernant les valeurs et équations d'Isaacs supérieures.

$\square$

Proposition 5.33 *Sous la Condition d'Isaacs (Hypothèse 5.31), tout jeu en distance minimum vérifiant les Hypothèses 5.28–5.30, respectivement, jeu en coût minimum, admet une valeur de point-selle VREK semi-continue supérieurement, respectivement continue.*

Preuve Cette valeur transformée est la solution enveloppe de viscosité du jeu en distance minimum δ_T^R (du moins au-dessus du niveau $-R$, R étant pour cette fois considéré comme un paramètre qu'on fait tendre vers $+\infty$), respectivement la solution de viscosité bornée, de l'équation d'Isaacs du jeu, d'après la Proposition 5.27.b, respectivement le Corollaire 5.19, et les énoncés analogues pour les valeurs et équations d'Isaacs supérieures.

$\square$

Ensuite, pour calculer numériquement les valeurs des jeux, caractérisées comme solutions (éventuellement enveloppes) de viscosité de leurs équations d'Isaacs respectives, on va utiliser une extension aux jeux (déjà considérée par Pourtallier et Tidball [115]) d'une méthode proposée par Kushner [95] pour le contrôle optimal. Cette dernière est elle-même une extension au contrôle des équations aux différences finies dans le sens du vent (*upwind*) pour résoudre les équations hyperboliques (voir par exemple Morton-Mayers [112]), et peut être vue comme un schéma d'approximation par jeux à différences finies.

Chapitre 6

Schémas numériques

6.1 Grilles étoilées

Définition 6.1 *Étant donné un ensemble de nœuds localement fini (*grille*) $\mathcal{E}^h \subseteq \mathcal{E} = \mathbb{R}^r$, ($r \in \mathbb{N}^*$) :*

a. *on appelle* cône *en $x \in \mathcal{E}^h$, l'ensemble des combinaisons positives d'une famille libre d'*arêtes *de la forme $y - x$, où $y \in \mathcal{E}^h$;*
   Si un tel cône comporte plus d'une arête, on appelle face *de ce cône opposée à son arête $y - x$, le sous-cône engendré par ses arêtes autres que $y - x$;*
b. *la grille $\mathcal{E}^h$ est dite* étoilée *si à chaque $x \in \mathcal{E}^h$, est associé un* système *(fini par définition) de cônes en x, dit* étoile, *$\mathcal{S}^h(x)$, réalisant une partition de l'espace $\mathcal{E}$ pointé en x ;*
c. *étant donnée une grille étoilée, $\mathcal{E}^h$, on note $\mathcal{V}^h(x)$, et on appelle ensemble des voisins de $x \in \mathcal{E}^h$, l'ensemble des $y \in \mathcal{E}^h$ tels que $y - x$ est une arête d'au moins un cône de $\mathcal{S}^h(x)$.*

Proposition 6.2 *Étant donnés un jeu différentiel à instant final variable $\mathcal{G}$ (dynamique f), une grille étoilée $\mathcal{E}^h$ de $\mathcal{E} = \mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^\star$), et $(x,u,v) \in \mathcal{E}^h \times U \times V$:*

a. *l'ensemble $\mathcal{E}^h$ est dénombrable ;*
b. *l'ensemble des fonctions réelles bornées sur $\mathcal{E}^h$, muni de la norme sup $||.||_\infty^h$ sur $\mathcal{E}^h$, est un espace de Banach, noté $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$;*
c. *l'ensemble $\mathcal{V}^h(x)$ est fini ;*
d. *il existe une unique famille, $(f^y(x,u,v))_{y \in \mathcal{V}^h(x)}$ telle que :*
   i. *pour $y \in \mathcal{V}^h(x)$, $f^y(x,u,v)$ est positif, si y appartient au cône de $\mathcal{S}^h(x)$ contenant $f(x,u,v)$; nul, sinon ;*
   ii.
   $$f(x,u,v) \;=\; \sum_{y \in \mathcal{V}^h(x)} f^y(x,u,v)(y - x) \;,$$
   le cardinal du support de cette somme étant compris (au sens large) entre 1 et r.

Preuve

a. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^\star$) étant non borné, $\mathcal{E}^h$ est infini. Sinon $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}^h)$ (l'enveloppe convexe fermée de $\mathcal{E}^h$) est un polyèdre convexe compact, donc pour tout sommet x^h de ce polyèdre ($x^h \in \mathcal{E}^h$) il existe un hyperplan de $\mathcal{E}$ qui laisse $\overline{\mathrm{co}}(\mathcal{E}^h)$ d'un seul (au sens large) côté, l'autre (au sens strict) côté ne pouvant rencontrer aucun cône de $\mathcal{S}^h(x^h)$, ce qui contredit le caractère étoilé de $\mathcal{E}^h$ en x^h. Étant de plus localement fini, $\mathcal{E}^h$ est donc dénombrable.

b. Corollaire immédiat de a.

c. En dimension r, chaque cône de l'étoile (finie par définition) $\mathcal{S}^h(x)$ comporte au plus r arêtes.

d. $f(x,u,v)$ est non nul (d'après les Hypothèses 3.2), et par définition $\mathcal{S}^h(x)$ partitionne l'espace $\mathcal{E}^h$ pointé en x.

$\square$

Exemple 6.3 Si $\mathcal{E}$ est le plan ($r = 2$), une grille étoilée $\mathcal{E}^h$ peut être constituée par la donnée d'un réseau régulier de parallélogrammes de côtés $\underline{\delta}^h \leq \overline{\delta}^h$, d'angle obtus α^h, assortie de la donnée en chaque nœud P du système de cônes défini par les arêtes $\overrightarrow{PE}$,

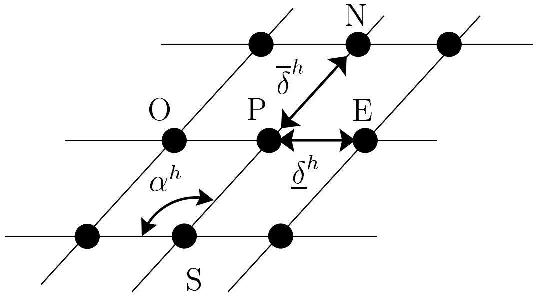


FIG. 6.1 – Grille losange de pas h sur $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$

$\overrightarrow{PN}$, $\overrightarrow{PO}$, $\overrightarrow{PS}$, et leurs paires $\{\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PN}\}$, $\{\overrightarrow{PN},\overrightarrow{PO}\}$, $\{\overrightarrow{PO},\overrightarrow{PS}\}$ et $\{\overrightarrow{PS},\overrightarrow{PE}\}$ (Figure 6.1).

Cet Exemple se généralise aisément à des dimensions quelconques d'espace. De même, il n'est pas difficile de définir une grille étoilée $\mathcal{E}^h$ à partir d'une triangulation donnée de $\mathcal{E}$.

6.2 Schémas numériques

Définition 6.4 *Étant donnés un jeu différentiel à instant final variable $\mathcal{G}$, une grille étoilée $\mathcal{E}^h$, une fonction réelle $V^h \in \ell_\infty(\mathcal{E}^h)$, $(x,u,v) \in \mathcal{E}^h \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}$ et $y \in \mathcal{V}^h(x)$, on notera :*

$$\Delta t^h(x,u,v) = 1/\sum_{z\in\mathcal{V}^h(x)} f^z(x,u,v) \in \mathbb{R}_+^\star \quad , \quad \Delta^y V^h(x) = V^h(y) - V^h(x) \ ;$$

$$\begin{array}{l} p^y(x,u,v) = f^y(x,u,v)\Delta t^h(x,u,v) \in [0,1] \ , \\ EV^h(x,u,v) = \sum_{z\in\mathcal{V}^h(x)} p^z(x,u,v)V^h(z) \leq \| V^h \|_\infty^h \ ; \end{array} \tag{6.1}$$

$$\hat{k} \ \equiv \ \frac{l\Delta t^h}{1+l\Delta t^h} \ \equiv \ 1-\hat{\beta} \ , \ où\ \hat{\beta} \equiv \frac{1}{1+l\Delta t^h} \in]0,1[\ ;$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^h V^h(x,u,v) &= \hat{k}(x,u,v) + \hat{\beta}(x,u,v)EV^h(x,u,v) \ ; \\ &= V^h(x) + \hat{\beta}(x,u,v)\Delta t^h(x,u,v)\mathcal{H}^h V^h(x,u,v) \ , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^h V^h(x,u,v) &= \sum_{z\in\mathcal{V}^h(x)} f^z(x,u,v)\Delta^z V^h(x) + [1-V^h(x)]l(x,u,v) \ ; \\
\mathcal{R}^h V^h(x,u,v) &= \begin{cases} \mathcal{T}^h V^h(x,u,v) \text{ si } x\in\Omega^h, S(x) \text{ sinon} & (pe) \\ S(x)\wedge \mathcal{T}^h V^h(x,u,v) & (cm) \ ; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$T^h V^h(x) = \max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{T}^h V^h(x,u,v) \quad , \quad H^h V^h(x) = \max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{H}^h V^h(x,u,v) \ ;$$

$$\begin{aligned}
R^h V^h(x) &= \max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{R}^h V^h(x,u,v) \\
&=^1 \begin{cases} T^h V^h(x) \text{ si } x\in\Omega,\ S(x) \text{ sinon} & (pe) \\ S(x)\wedge T^h V^h(x) & (cm) \end{cases}
\end{aligned}$$

$$G^h V^h(x) = \begin{cases} H^h V^h(x) \text{ si } x\in\Omega,\ S(x)-V^h(x) \text{ sinon} & (pe) \\ (S(x)-V^h(x))\wedge H^h V^h(x) & (cm) \ . \end{cases}$$

On a anticipé quelques propriétés faciles (positivité de Δt^h...) dans ces Définitions. Remarquons en outre dès à présent que les $p^y(x,u,v)$ pour $y\in\mathcal{V}^h(x)$, peuvent être interprétées comme des probabilités de transition de x à y conditionnelles aux contrôles u et v — $\sum_{z\in\mathcal{V}^h(x)} p^z(x,u,v)V^h(z)$ s'interprétant alors comme la moyenne de $V^h(z)$ sous cette pondération. D'où l'inégalité dans (6.1).

On vérifie alors aisément que H^h et T^h, ou G^h et R^h, opèrent de $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ dans lui-même. On appellera équation d'Isaacs discrète au pas h, l'équation

$$G^h V^h = 0 \qquad (\mathcal{I}^h)$$

sur $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$.

Remarque 6.5 On a les mêmes Définitions pour un jeu en distance minimum, $\mathcal{G}$, mais on perd alors la Proposition (principe de comparaison) 6.11.c et ses conséquences.

Dans la Définition 6.6 et les Propositions 6.8 et 6.11 à venir, il faut lire également les énoncés analogues où G^h et R^h remplacent respectivement H^h et T^h — les preuves étant pour leur part rédigées dans les deux cas.

Définition 6.6 *Étant donnés le jeu $\mathcal{G}$, une grille étoilée $\mathcal{E}^h$. On appellera* sous-solution *de l'équation $H^hV^h=0$, toute fonction $V^h\in\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$, telle que sur $\mathcal{E}^h$:*

$$H^h V^h \geq 0 \ ,$$

ou de façon équivalente (Proposition 6.8.a) :

$$V^h \leq T^h V^h \ .$$

Définitions symétriques pour une sur-solution.

Exemple 6.7 Soient le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E}\equiv\mathbb{R}^r$, $r\in\mathbb{N}^*$), la grille étoilée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$. On vérifie aisément que 1 et $\underline{S}$ sont respectivement sur- et sous-solutions de $\mathcal{I}^h$. De plus, en coût minimum, S est également sur-solution de $\mathcal{I}^h$.

1. En utilisant au passage le Lemme élémentaire 2.4.h en coût minimum.

Proposition 6.8 *Soient le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$), la grille étoilée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$. Pour tous U^h,V^h, $\varphi \in \ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ et $x \in \mathcal{E}^h$:*

a. $T^hV^h(x) - V^h(x)$ et $H^hV^h(x)$ ont même signe ;

b. (Ellipticité) $H^hU^h(x) \leq H^hV^h(x)$, si $V^h(x) \leq U^h(x)$ et $\Delta^y V^h(x) = \Delta^y U^h(x)$ pour $y \in \mathcal{V}^h(x)$;

c. (Monotonie et fonctions-tests)

$$H^hV^h(x) \leq H^h\varphi(x) \ , \quad si \ \ V^h \leq \varphi \ sur \ \mathcal{V}^h(x) \ \ et \ V^h(x) = \varphi(x) \ ,$$

et même résultat (par interchangeabilité de V^h et φ) avec les inégalités changées de signe; enfin,

$$T^hU^h \ \leq \ T^hV^h \quad si \quad U^h \ \leq \ V^h \ .$$

Preuve

a. Déjà, $T^hV^h(x) - V^h(x)$ et $H^hV^h(x)$ ont même signe, par application du Lemme élémentaire 2.4.d. Ainsi, en poursuite évasion: $R^hV^h(x) - V^h(x) = T^hV^h(x) - V^h(x)$ et $G^hV^h(x) = H^hV^h(x)$ ont même signe si $x \in \Omega$, tandis que si $x \in \mathcal{T}$:

$$R^hV^h(x) - V^h(x) = S(x) - V^h(x) = G^hV^h(x) \ .$$

Enfin, en coût minimum,

$$R^hV^h(x) - V^h(x) = (S(x) - V^h(x)) \ \wedge \ (T^hV^h(x) - V^h(x))$$

est "du plus petit signe" de $(S(x) - V^h(x))$ et $(T^hV^h(x) - V^h(x))$, ce dernier étant du signe de $H^hV^h(x)$ d'après ce qui précède. $(R^hV^h(x) - V^h(x))$ est donc "du plus petit signe" de $(S(x) - V^h(x))$ et $H^hV^h(x)$, comme $G^hV^h(x)$.

b. Dans les Hypothèses du b, on a clairement quel que soit $(u,v) \in \mathsf{U} \times V$:

$$\mathcal{H}^hU^h(x,u,v) \leq \mathcal{H}^hV^h(x,u,v) \ ,$$

d'où $H^hU^h(x) \leq H^hV^h(x)$, par application du Lemme élémentaire 2.4.c. Ainsi, en poursuite évasion, $G^hU^h(x) = H^hU^h(x) \leq H^hV^h(x) = G^hV^h(x)$ si $x \in \Omega$, tandis que si $x \in \mathcal{T}$:

$$G^hU^h(x) = S(x) - U^h(x) \leq S(x) - V^h(x) = G^hV^h(x) \ .$$

Enfin en coût minimum, on a d'après les inégalités précédentes :

$$G^hU^h(x) = (S(x) - U^h(x)) \wedge H^hU^h(x) \ \leq \ (S(x) - V^h(x)) \wedge H^hV^h(x) = G^hV^h(x) \ ,$$

d'après le Lemme élémentaire 2.2.i.

c. Montrons les énoncés relatifs à H^h ou G^h (ceux relatifs à T^h ou R^h se montreraient de manière analogue, en plus simple). En effet, si par exemple $V^h \leq \varphi$ sur $\mathcal{V}^h(x)$ et $V^h(x) = \varphi(x)$, alors pour $y \in \mathcal{V}^h(x)$:

$$V^h(y) - \varphi(y) \leq V^h(x) - \varphi(x) = 0 \ .$$

Soit :

$$\Delta^y V^h(x) \leq \Delta^y \varphi(x) \ ,$$

d'où, puisque $V^h(x) = \varphi(x)$,

$$\mathcal{H}^hV^h(x,u,v) \leq \mathcal{H}^h\varphi(x,u,v) \ ,$$

pour tout $(u,v) \in \mathsf{U} \times \mathsf{V}$. Alors, par application du Lemme élémentaire 2.4.c :

$$H^h V^h(x) \leq H^h \varphi(x) \ .$$

En poursuite évasion, on a par définition :

$$G^h V^h(x) = H^h V^h(x) \leq H^h \varphi(x) = G^h \varphi(x)$$

si $x \in \Omega$, tandis que si $x \in \mathcal{T}$:

$$G^h \varphi(x) = S(x) - \varphi(x) = S(x) - V^h(x) = G^h V^h(x) \ ,$$

par définition.

Enfin, en coût minimum, on a par définition :

$$\begin{aligned} G^h V^h(x) &= (S(x) - V^h(x)) \wedge H^h V^h(x) \\ &\leq (S(x) - \varphi(x)) \wedge H^h \varphi(x) = G^h \varphi(x) \ , \end{aligned}$$

par application du Lemme élémentaire 2.2.i.

□

Une grille étoilée $\mathcal{E}^h$ sera dite *non dégénérée* si elle vérifie l'Hypothèse suivante — comme par exemple la grille parallélipipédique de l'Exemple 6.3 :

Hypothèse 6.9 (Grille étoilée non dégénérée) *Il existe* $\underline{\delta}^h \in \mathbb{R}_+^\star$, $\overline{\delta}^h \in \mathbb{R}_+^\star$, $\alpha^h \in]\pi/2,\pi[$ *tels que pour tout* $x \in \mathcal{E}^h$, *pour tout cône* $\mathcal{C}$ *de l'étoile* $\mathcal{S}^h(x)$ *dans* $\mathcal{E}^h$, *pour toute arête* $y - x$ *de ce cône :*
a. $\underline{\delta}^h \leq \| y - x \| \leq \overline{\delta}^h$;
b. l'angle entre $y - x$ *et la face opposée* $\mathcal{F}$ *dans* $\mathcal{C}$ *n'excède jamais* α^h :

$$\frac{< y - x, z - x >}{||y - x|| \, ||z - x||} \geq \cos(\alpha^h) \in]-1,0[\text{ si } z \in \mathcal{F} \setminus \{x\}.$$

Remarque 6.10 Dans un cône $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}^h(x)$, l'Hypothèse 6.9.b est notamment vérifiée si l'angle $(\widehat{xy,n})$ (de vecteurs non nuls de $\mathcal{E}$, à valeur dans $[0,\pi]$) entre une arête $y - x$ et la normale n (dans l'espace affine engendré par $\mathcal{C}$) à la face opposée $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{C}$ n'exède jamais $\alpha^h - \pi/2$. On a alors en effet, en se plaçant dans l'espace à trois dimensions engendré par les vecteurs xy, xz et n :

$$(\widehat{xy,xz}) \leq (\widehat{xy,n}) + (\widehat{n,xz}) \leq (\alpha^h - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \alpha^h \ ,$$

pour tout $z \in \mathcal{F} \setminus \{x\}$. Néanmoins cette condition n'est pas nécessaire, excluant les grilles où l'angle entre arêtes et faces opposées est certes borné supérieurement par α^h, mais peut être arbitrairement faible lorsque x décrit $\mathcal{E}^h$.

Proposition 6.11 *Étant donnés un jeu différentiel à instant final variable* $\mathcal{G}$ *(espace d'état* $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$*), et* $\mathcal{E}^h$ *une grille étoilée sur* $\mathcal{E}$ *vérifiant l'Hypothèse de non dégénerescence 6.9; alors pour tous* $(x,u,v) \in \mathcal{E}^h \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}$ *et* $y \in \mathcal{V}^h(x)$:

a.

$$0 \leq \quad f^y(x,u,v) \, \| y - x \| \quad \leq \overline{f} / \sin(\alpha^h) \tag{6.2}$$

$$\underline{f} \leq \quad \textstyle\sum_{z \in \mathcal{V}^h(x)} f^z(x,u,v) \, \| z - x \| \quad \leq r\overline{f} / \sin(\alpha^h) \tag{6.3}$$

$$\underline{f} / \overline{\delta}^h \leq \quad \textstyle\sum_{z \in \mathcal{V}^h(x)} f^z(x,u,v) \quad \leq r\overline{f} / (\underline{\delta}^h \sin(\alpha^h)) \tag{6.4}$$

$$\underline{\Delta} t^h \leq \quad \Delta t^h(x,u,v) \quad \leq \overline{\Delta} t^h \ , \tag{6.5}$$

où $\underline{\Delta} t^h$ *(respectivement* $\overline{\Delta} t^h$*) est une notation pour l'inverse du membre de droite (respectivement gauche) dans (6.4).*

b. T^h *est une contraction de* $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ *dans lui même.*

c. (Accrétivité) T^h *admet dans* $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ *un unique point-fixe* V^h*, qui y est également l'unique* 0 *de* H^h*, ainsi que la plus petite sur-solution, ou encore la plus grande sous-solution, de l'équation* $H^hV^h = 0$.

d. (Principe de comparaison) V^h *désignant le point-fixe précédent,* $U^h \leq V^h \leq W^h$ *si* $H^hW^h \leq 0 \leq H^hU^h$*, pour* $U^h, W^h \in \ell_\infty(\mathcal{E}^h)$.

Remarque 6.12 Étant donné un opérateur maximal monotone (*accrétif*) A sur un Banach, on définit sa *résolvante* en $\lambda > 0$, $\mathcal{R}_\lambda := (Id + \lambda A)^{-1}$ (Brézis [41]). $\mathcal{R}_\lambda$ est contractif, et admet comme tel un unique point-fixe. A admet donc un unique 0. De même, nous montrons que T^h ou R^h est une contraction pour prouver que H^h ou G^h admet un unique 0.

Preuve de la Proposition 6.11

a. (6.5) est une reécriture de (6.4) dont, sous l'Hypothèse 6.9.a., les inégalités gauche et droite découlent aisément des inégalités analogues dans (6.3), qui découlent elles-mêmes de (6.2) et de la Proposition 6.2.d. Reste à prouver l'inégalité de droite dans (6.2) (la gauche résultant de la Proposition 6.2.d.i).

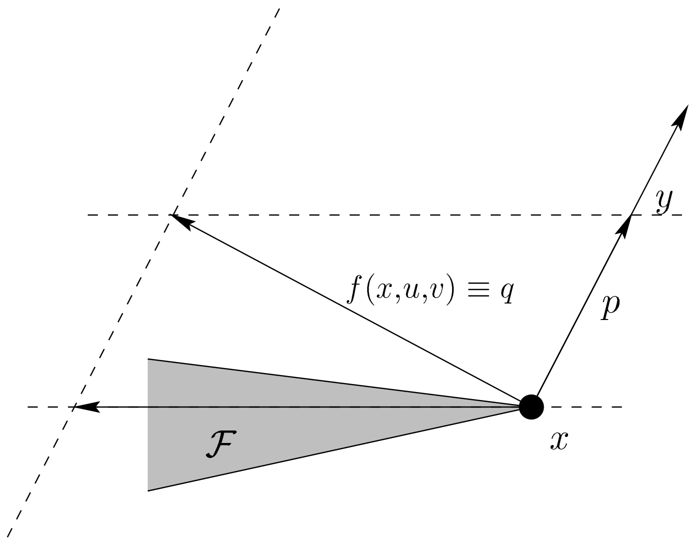


FIG. 6.2 – $f(x,u,v)$ et sa décomposition dans $\mathcal{S}^h(x)$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$

La Figure 6.2 illustre la situation. Notons $p \equiv f^y(x,u,v)(y-x)$, $q \equiv f(x,u,v)$. Par les relations métriques dans le triangle (supposé non dégénéré) $x, x+p, x+q$, on a d'après l'Hypothèse de non dégénérescence 6.9.b :

$$||q|| \sin(\widehat{q,q-p}) = ||p|| \sin(\widehat{p,p-q}) \geq ||p|| \sin(\alpha^h),$$

si $(\widehat{p,q-p}) \geq \pi/2$; sinon :

$$||q||^2 = ||p||^2 + ||q-p||^2 + 2 < p,q-p > \ \ \geq \ \ ||p||^2,$$

qui est encore trivialement vraie dans les cas dégénérés où p ou $q-p$ sont nuls.

b. Soient $U^h, V^h \in \ell_\infty(\mathcal{E}^h)$. En poursuite évasion, on a pour $x \in \mathcal{E}^h$:

$$|R^hU^h(x) - R^hV^h(x)| = |T^hU^h(x) - T^hV^h(x)|$$

si $x \in \Omega$, tandis que si $x \in \mathcal{T}$:

$$R^h U^h(x) = R^h V^h(x) = S(x)\,.$$

En coût minimum :

$$\begin{array}{rcl} |R^h U^h(x) - R^h V^h(x)| & = & |S(x) \wedge T^h U^h(x) - S(x) \wedge T^h V^h(x)| \\ & \leq & |T^h U^h(x) - T^h V^h(x)|, \end{array}$$

par application du Lemme 2.2.ii.
Donc, en poursuite évasion comme en coût minimum :

$$|R^h U^h(x) - R^h V^h(x)| \leq |T^h U^h(x) - T^h V^h(x)|\,.$$

Or, par application du Lemme élémentaire 2.4.e :

$$|T^h U^h(x) - T^h V^h(x)| \leq \frac{1}{1 + \underline{l\Delta t^h}}\ ||U^h - V^h||_\infty^h\,,$$

car, pour tout (u,v) :

$$\begin{array}{rcl} |\mathcal{T}^h U^h(x,u,v) - \mathcal{T}^h V^h(x,u,v)| & = & \hat{\beta}(x,u,v)|E(U^h - V^h)(x,u,v)| \\ & \leq & \dfrac{1}{1 + \underline{l\Delta t^h}}\ ||U^h - V^h||_\infty^h\,. \end{array}$$

D'où :

$$\| R^h U^h - R^h V^h \|_\infty^h \leq \| T^h U^h - T^h V^h \|_\infty^h \leq \overline{\beta} \parallel U^h - V^h \|_\infty^h\ ,$$

où $\overline{\beta} := 1/(1 + \underline{l\Delta t^h}) < 1$, d'après a.

Donc T^h et R^h sont des contractions sur $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$.

c et d. La contraction T^h admet donc un unique point-fixe, ou indifféremment (Proposition 6.8.a) H^h admet un unique zéro, V^h, sur l'espace de Banach $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$, limite uniforme, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de l'itération de Picard suivante :

$$V_{n+1}^h = T^h V_n^h\,,$$

au départ de V_0^h arbitraire dans $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$.
Par exemple, $V_0^h \equiv W^h$ comme en d, mais alors

$$V_1^h = T^h V_0^h = T^h W^h \leq W^h = V_0^h\,,$$

d'après la Proposition 6.8.a. Par récurrence, on obtient (en vertu de la croissance de T^h à la Proposition 6.8.c):

$$V_{n+1}^h \leq V_n^h \leq V_0^h \equiv W^h\,,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $V^h \leq W^h$, par passage à la limite uniforme sur $\mathcal{E}^h$ quand $n \longrightarrow \infty$.

On raisonne de même pour U^h à la place de W^h.
Idem pour R^h et G^h à la place de T^h et H^h.

□

Chapitre 7

Convergence — Approche globale par les solutions de viscosité

7.1 Enveloppes de schémas

Hypothèse 7.1 *Étant donnée une famille de grilles étoilées non dégénérées, $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$, sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$), on parlera de* famille non dégénérée *de grilles étoilées, ou de* non dégénérescence uniforme *de ces grilles, si on peut prendre $\alpha^h < \alpha < \pi$ ($h > 0$), et $\overline{\delta}^h$ tendant vers 0 quand $h \to 0^+$, dans l'Hypothèse de non dégénérescence 6.9.*

Théorème 7.2 *Sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$), soient $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$ une famille non dégénérée de grilles étoilées, $(V^h)_{h>0} \in (\ell_\infty(\mathcal{E}^h))_{h>0}$ une famille localement équibornée de fonctions.*

a. Si

$$\ell \;=\; \lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} V^{h_m^n}(x^{h_m^n}) \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

où $h_m^n \to 0^+$, $\mathcal{E}^{h_m^n} \ni x^{h_m^n} \to x^n \in \mathcal{E}$ ($n \in \mathbb{N}$) quand $m \to +\infty$, et $x^n \to x \in \mathcal{E}$ quand $n \to +\infty$, alors ℓ se réécrit sous la forme :

$$\ell \;=\; \lim_{N\to+\infty} V^{h_N}(x^{h_N}),$$

où $h_N \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h_N} \ni x^{h_N} \to x$ quand $N \to +\infty$;

b. l'ensemble des limites de la forme :

$$\ell \;=\; \lim_{n\to+\infty} V^{h_n}(x^{h_n}) \in \mathbb{R}\ , \tag{7.2}$$

où $h_n \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h_n} \ni x^{h_n} \to x \in \mathcal{E}$ lorsque $n \to +\infty$, est compact non vide, et admet comme tel un plus petit et un plus grand élément: $\underline{V}(x)$ et $\overline{V}(x)$ dans $\mathbb{R}$;

c. la fonction $\underline{V}$, respectivement $\overline{V}$, ainsi définie sur $\mathcal{E}$, est semi-continue inférieurement, respectivement supérieurement. On l'appellera enveloppe (semi-continue) inférieure, respectivement supérieure, de $(V^h)_{h>0}$;

d. pour tous α et $\beta > 0$, il existe $\overline{h} > 0$, tel que :

$$\underline{V}(x) - \alpha \;\le\; V^h(x^h) \;\le\; \overline{V}(x) + \beta\ ,$$

si $h \le \overline{h}$ et $x^h \in \mathcal{E}^h \cap \overline{B}_{\overline{h}}(x)$. Alors $|V^h(x^h) - \ell| \le \alpha \vee \beta =: \gamma$, en supposant de plus que $\underline{V}(x) = \overline{V}(x) =: \ell$;

e. on dira alors que V^h converge en x quand $h \to 0^+$, et on notera :

$$\lim_{\substack{h\to 0^+ \\ \mathcal{E}^h \ni x^h \to x}} V^h(x^h) \ = \ \ell \ ,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to +\infty} V^{h_n}(x^{h_n}) \ = \ \ell \ ,$$

pour toutes suites $h_n \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h_n} \ni x^{h_n} \to x$;

f. si V^h converge en tout point vers une fonction V, alors cette convergence est uniforme sur tout compact $\mathcal{C}$ où V est continue :

$$\max_{\mathcal{E}^h \cap \mathcal{C}} |V^h(x^h) - V(x^h)| \ \to 0$$

quand $h \to 0^+$.

Exemple 7.3 Étant donnés le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$), une grille étoilée non dégénérée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$. Soit V^h, l'unique zéro de H^h ou G^h sur $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ (Proposition 6.11.c). Alors, $\underline{S} \leq V^h \leq 1$ sur $\mathcal{E}^h$, par application de la Proposition (principe de comparaison) 6.11.d. à l'Exemple 6.7 ; donc $(V^h)_{h>0}$ est équibornée.

Remarque 7.4 Dans le Théorème 7.2, $(V^h)_{h>0}$ désigne une famille localement équibornée arbitraire de fonctions réelles sur $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$, et non spécialement le cas particulier mis en évidence à l'Exemple 7.3.

Preuve du Théorème 7.2

a. Étant donnée une limite ℓ de la forme (7.1), alors pour N fixé positif, on a pour n suffisamment grand, mettons $n \geq n_N$, puis m suffisamment grand, mettons $m \geq m_n$:

$$h^n_m \ \vee \ 2 \parallel x^n - x \parallel \ \ \vee \ 2 \parallel x^{h^n_m} - x^n \parallel \ \ \vee \ |V^{h^n_m}(x^{h^n_m}) - \ell| \ < \ \frac{1}{N} \ .$$

D'où en particulier, renommant $h_N \equiv h^{n_N}_{m_{n_N}}$:

$$h^N \ \vee \ \parallel x^N - x \parallel \ \ \vee \ |V^{h_N}(x^{h_N}) - \ell| \ < \ \frac{1}{N} \ .$$

b. (Début) En effet, cet ensemble est fermé (spécialiser le point a précédent au cas $x^n = x$ pour tout n), borné (V^h localement équibornée), non vide.
Pour justifier ce dernier point, notons $\mathcal{F}$ l'ensemble, fermé (vu dans la preuve du a), des limites de suites de $x^{h_n} \in \mathcal{E}^{h_n}$ où $h_n \to 0^+$ quand $n \to +\infty$.
• Si $\emptyset \subsetneq \mathcal{F} \subsetneq \mathcal{E}$, disons $x \notin \mathcal{F}$, alors $d_{\mathcal{F}}(x) = d(x,x^*) > 0$, pour x^* bien choisi dans $\mathcal{F}$, $x^* = \lim x^{h_n} \in \mathcal{E}^{h_n}$ où $h_n \to 0^+$ quand $n \to +\infty$. De plus, ($n \in \mathbb{N}$) on peut supposer que x^{h_n} est un point de $\mathcal{E}^{h_n}$ (qui est localement finie) au plus proche de x, sinon on choisit $\xi^{h_n} \in \mathcal{E}^{h_n}$ qui minimise cette distance; puis on extrait une sous-suite $(\xi^{h_{n'}})$ convergente vers $\xi^* \in \mathcal{F}$ tel que $d(x,\xi^*) \leq d(x,x^*)$ et il suffit de prendre la suite $(\xi^{h_{n'}})$ au lieu de la suite (x^{h_n}) précédente.
Alors, pour n assez grand, et pour toute arête $x^{h_n}y^{h_n}$ du cône de x en x^{h_n}, $\mathcal{C}^{h_n}(x)$: $d(x^{h_n},x) \geq \frac{1}{2}d(x^*,x)$,

$$\cos(\widehat{x^{h_n}x,x^{h_n}}y^{h_n}) \ \leq \ \frac{\overline{\delta}^{h_n}}{d(x,x^*)} \tag{7.3}$$

(voir Figure 7.1), qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, d'où géométriquement — voir b (Suite et fin) à la fin de la preuve — l'angle entre au moins une arête et une face opposée de $\mathcal{C}^{h_n}(x)$ (ou une extraction) tend vers π quand $n \to +\infty$, ce qui contredit la non-dégénerescence uniforme de la famille de grilles $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$. D'ou absurdité, et $\mathcal{F} = \emptyset$ ou $\mathcal{E}$.

• Si $\mathcal{F} = \emptyset$, i.e. $\lim_{h\to 0^+} \min_{x^h \in \mathcal{E}^h} \parallel x^h \parallel = +\infty$, soit alors $\mathcal{E}'^h$ l'image de $\mathcal{E}^h$ dans l'homothétie de centre origine et rapport $1/\min_{x^h\in\mathcal{E}^h} \parallel x^h \parallel$, (positif) pour h assez petit, disons $h \le \overline{h}$. $(\mathcal{E}'^h)_{0<h<\overline{h}}$ est alors une famille non dégénérée de grilles étoilées sur $\mathcal{E}$, comme $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$, et l'ensemble $\mathcal{F}'$ correspondant est non vide, par compacité de la sphère unité; mais $\mathcal{F}'$ devrait alors contenir l'origine, par le résultat du point précédent. D'ou absurdité.

En conclusion, $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

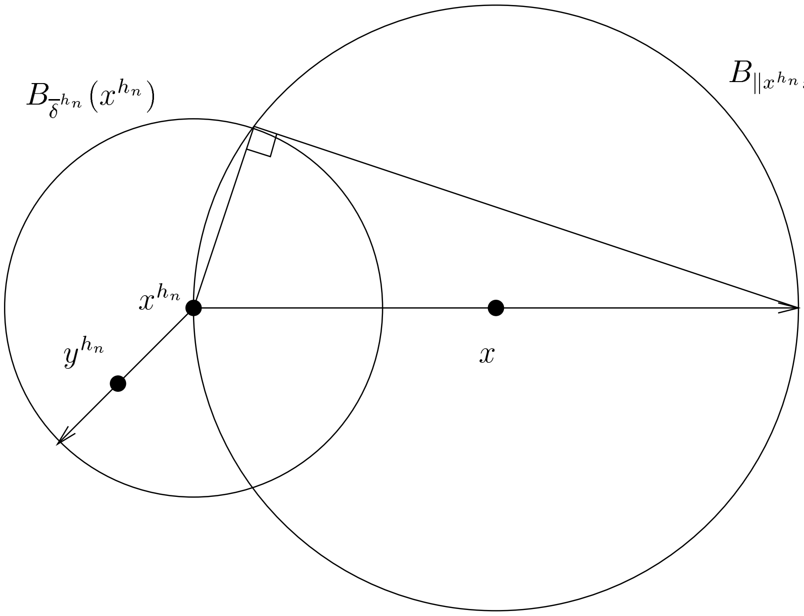


FIG. 7.1 – $y^{h_n} \in \overline{B}_{\overline{\delta}^h_n}(x^{h_n}) \setminus B_{\|x^{h_n}x\|}(x)$

c. En effet, quels que soient $x \in \mathcal{E}$ et $\ell = \lim_{n\to+\infty} \underline{V}(x^n)$, où $x^n \to x$ quand $n \to +\infty$, on a pour chaque n:

$$\underline{V}(x^n) \;=\; \lim_{m\to+\infty} V^{h^n_m}(x^{h^n_m}) \;,$$

où $h^n_m \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h^n_m} \ni x^{h^n_m} \to x^n$ quand $m \to +\infty$. D'où, par application du a:

$$\ell = \lim_{N\to+\infty} V^{h_N}(x^{h_N}) \;,$$

où $h_N \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h_N} \ni x^{h_N} \to x$. Donc $\underline{V}(x) \le \ell$, par définition. Ainsi, $\underline{V}$ est semi-continue inférieurement au point x. Preuve analogue dans le cas de $\overline{V}$.

d à f. Par arguments standards de compacité — extraction de sous-suites convergentes et, pour d et f, en procédant par l'absurde. Par exemple, pour f, supposons qu'il existe un compact $\mathcal{C}$ de continuité de V tel que:

$$\exists \gamma > 0, \exists h_n \to 0 \text{ tel que } \max_{\mathcal{C}\cap\mathcal{E}^h} |V^{h_n} - V| \;>\; 2\gamma \;,$$

disons $|V^{h_n}(x^{h_n}) - V(x^{h_n})| > 2\gamma$. Extrayant alors $x^{h_n} \to x \in \mathcal{C}$, on obtient par continuité $|V^{h_n}(x^{h_n}) - V(x)| > \gamma$ (n assez grand), contredisant $\lim_{h\to 0,\, x^h\to x} V^h(x^h) = V(x)$.

b. (Suite et fin) Précisons. Pour tout n,

$$x^{h_n}x \ = \ \sum_{y^{h_n}\in\mathcal{C}^{h_n}(x)} p^{y^{h_n}} x^{h_n}y^{h_n} \ , \quad p^{y_n} > 0$$

où (quitte à extraire en h_n)

$$\text{Card } \mathcal{C}^{h_n}(x) = d \in \mathbb{N}_r^*, \quad \mathcal{C}^{h_n}(x) \equiv \{y_l^{h_n}\}_{l\in\mathbb{N}_d^*} \ .$$

Soit en renormalisant

$$x^{h_n}x \ = \ \sum_{l=1}^{d} q_l^{h_n} x^{h_n} z_l^{h_n} \ , \quad q_l^{h_n} > 0, \quad \| x^{h_n}z_l^{h_n} \| = 1 \ ,$$

où par compacité et continuité (quitte, à nouveau, à extraire)

$$x^{h_n} \to x^*, \quad z_l^{h_n} \to z_l, \quad \| x^* z_l \| = 1 \ (l \in \mathbb{N}_d^*)$$

quand $n \to \infty$.
Soit P^{h_n} (la projection orthogonale sur) le plan normal à $x^{h_n}x$ passant par x^{h_n}. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P^{h_n}(x^{h_n}x) \ = \ 0 \ &= \ \sum_{l=1}^{d} q_l^{h_n} P^{h_n}(x^{h_n}z_l^{h_n}) \\
&= \ \sum_{l=1}^{d} r_l^{h_n} P^{h_n}(x^{h_n}z_l^{h_n}), \quad r_l^{h_n} > 0, \quad \sum_l r_l^{h_n} = 1 \\
&= \ P^{h_n}(v^{h_n}), \quad v^{h_n} \perp P^{h_n} \ , \\
v^{h_n} \ &:= \ \sum_{l=1}^{d} r_l^{h_n} x^{h_n} z_l^{h_n} \ ,
\end{aligned}$$

où (quitte, encore, à extraire)

$$r_l^{h_n} \to r_l, \quad r_l \geq 0, \quad \sum_l r_l = 1 \ (l \in \mathbb{N}_d^*)$$

quand $n \to +\infty$, et par continuité

$$v^{h_n} \to v := \sum_{l=1}^{d} r_l \ x^* z_l \ \perp \ P \ ,$$

P plan normal à x^*x passant par x^*.
Par ailleurs,

$$\left(\sum_{l=1}^{d} q_l^{h_n}\right) \ \langle x^{h_n}x, \sum r_l^{h_n} x^{h_n} z_l^{h_n} \rangle \ \equiv \ \| x^{h_n}x \|^2 \ \geq \ 0 \ ,$$

où $\sum_{l=1}^{d} q_l^{h_n} > 0$, donne par passage à la limite quand $n \to +\infty$: $< x^*x, v > \ \geq 0$, tandis que d'après (7.3) :

$$\cos(\widehat{x^{h_n}x, x^{h_n}z_l^{h_n}}) \ \leq \ \frac{\overline{\delta}^{h_n}}{d(x,x^*)}$$

(n assez grand) passe à la limite quand $n \to +\infty$ en

$$\cos(x^*x, x^*z_l) \ \leq\ 0$$

($l \in \mathbb{N}_d^*$), d'où

$$< x^*x, v > \ = \ \sum_{l=1}^{d} r_l \ < x^*x, x^*z_l > \ \leq \ 0\ .$$

Bref, $< x^*x, v >= 0$, et $P(v) = 0$, d'ou finalement $v = 0$. Soit par exemple en supposant $r_1 > 0$:

$$-x^*z_1 = \sum_{l=2}^{d} \frac{r_l}{r_1}\ x^*z_l\ ,$$

ou encore

$$-\lim_{n\to+\infty} x^{h_n} z_1^{h_n} \ = \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{l=2}^{d} \frac{r_l^{h_n}}{r_1^{h_n}}\ x^{h_n} z_l^{h_n}\ ,$$

i.e.

$$\left(x^{h_n} y_1^{h_n},\ \sum_{l=2}^{d} \frac{r_l^{h_n} \parallel x^{h_n} y_1^{h_n} \parallel}{r_1^{h_n} \parallel x^{h_n} y_l^{h_n} \parallel}\ x^{h_n} y_l^{h_n} \right)$$

tend vers π quand $n \to +\infty$.

□

D'après les résultats généraux de Barles et Souganidis [17], les enveloppes inférieures et supérieures $\underline{V}$ et $\overline{V}$ d'un schéma d'approximation stable, monotone et consistant, sont respectivement sur- et sous-solution de viscosité de l'équation d'Isaacs du problème limite de poursuite évasion ou en coût minimum.

Ces résultats s'appliquent au schéma étudié dans ce travail, sous la condition de non dégénérescence uniforme (Hypothèse 7.1) des grilles $\mathcal{E}^h$.

Lemme 7.5 *Étant donnés le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$); $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$, une famille non dégénérée (Hypothèse 7.1) de grilles étoilées sur $\mathcal{E}$; $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, $h_n \equiv h \to 0^+$, $\mathcal{E}^h \ni x^h \to x \in \mathcal{E}$. Alors uniformément sur $U \times V$, quand $h \to 0^+$:*

$$\sum_{y\in\mathcal{V}^h(x^h)} f^y(x^h,u,v)\Delta^y\varphi(x^h) \ \to\ \langle f(x,u,v),\nabla\varphi(x)\rangle \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^h\varphi(x^h,u,v) \ &\to\ \mathcal{H}(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x),u,v) \\ H^h\varphi(x^h) \ &\to\ H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x))\ . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Preuve D'après la formule de Taylor, à h fixé :

$$\begin{aligned} &\sum_{y\in\mathcal{V}^h(x^h)} f^y(x^h,u,v)\Delta^y\varphi(x^h) \\ &= \ \langle\nabla\varphi(x^h), f(x^h,u,v)\rangle \\ &\quad + \sum_{y\in\mathcal{V}^h(x^h)} \langle\nabla\varphi(z^y) - \nabla\varphi(x^h), f^y(x^h,u,v)(y-x^h)\rangle\ , \end{aligned}$$

où z^y est combinaison convexe de x^h et y, pour $y \in \mathcal{V}^h(x^h)$. Notant alors ω un module de continuité de $\nabla\varphi$ sur la fermeture (compacte) d'une boule non vide de centre x (où $\nabla\varphi$ est uniformément continue), il vient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \sum_{y \in \mathcal{V}^h(x^h)} f^y(x^h,u,v)\Delta^y\varphi(x^h) - \langle \nabla\varphi(x^h), f(x^h,u,v)\rangle \right| \;\leq\; r\omega(\overline{\delta}^h)\overline{f}/\sin(\alpha^h) \;,$$

en utilisant la Proposition 6.2.d.ii et (6.2). Quand $h \to 0^+$, les hypothèses faites sur $\overline{\delta}^h$ et α^h entraînent alors (7.4), puis (7.5), par Définitions 6.4 de $\mathcal{H}^h$ et 5.2 de $\mathcal{H}$, et application du Lemme élémentaire 2.4.f.

□

Proposition 7.6 *Étant donnés le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$); $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$, une famille non dégénérée (Hypothèse 7.1) de grilles étoilées sur $\mathcal{E}$. Soit V^h l'unique zéro de H^h sur $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ (Proposition 6.11.c). Alors, $\underline{V}$ et $\overline{V}$[1] sont respectivement sur-solution et sous-solution de viscosité de l'équation $H(x,V(x),\nabla V(x)) = 0$ sur $\mathcal{E}$.*

*Même résultat si V^h désigne l'unique zéro de G^h sur $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$, pour l'équation $G(x,V(x),\nabla V(x)) = 0$ sur $\overline{\Omega}$ (*pe*) ou $\mathcal{E}$ (*cm*) — $\underline{V}$ et $\overline{V}$ étant alors restreintes à $\overline{\Omega}$, en poursuite évasion.*

Preuve La stabilité résulte de l'Exemple 7.3 ; la monotonie n'est autre que la Proposition 6.8.c (en H^h) ; montrons la consistance.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathcal{E})$, $h_n \equiv h \to 0^+$ et $\mathcal{E}^h \ni x^h \to x \in \mathcal{E}$. La consistance pour H est fournie par l'équation (7.5) dans le Lemme 7.5 précédent. Supposons de plus que $\lim_{h\to 0^+} G^h\varphi(x^h) =: \ell$.

En coût minimum, on a par application du Lemme 2.2.ii :

$$|G^h\varphi(x^h) - G(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x))| \;\leq\; |H^h\varphi(x^h) - H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x))| \;,$$

qui tend vers 0 d'après (7.5). D'où

$$\ell \;=\; G(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) \;.$$

En poursuite évasion, soit pour h assez petit $x^h \in \Omega^h$ (c'est nécessairement le cas si $x \in \Omega$), et par définition :

$$G^h\varphi(x^h) = H^h\varphi(x^h) \;\to\; H\left(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)\right) \;,$$

d'après (7.5) ; sinon, $G^h\varphi(x^h)$ vaut $S(x^h) - \varphi(x^h)$ pour des h arbitrairement petits, d'où $\ell = S(x) - \varphi(x)$ par continuité. Finalement :

$$\begin{cases} \ell = H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) & \text{si } x \in \Omega \\ (S(x) - \varphi(x)) \wedge H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) \leq \ell \leq (S(x) - \varphi(x)) \vee H(x,\varphi(x),\nabla\varphi(x)) & \text{si } x \in \Gamma \;, \end{cases}$$

ce qui prouve la consistance en poursuite évasion.

□

1. Enveloppes inférieure et supérieure de $(V^h)_{h>0}$, voir définition au Théorème 7.2.c.

7.2 Résultats de Convergence

Proposition 7.7 *Étant donné le jeu $\mathcal{G}$ (espace d'état $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$, $r \in \mathbb{N}^*$), sa valeur VREK inférieure transformée V, son équation d'Isaacs inférieure $\mathcal{I}$, une famille non dégénérée de grilles étoilées $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$ sur $\mathcal{E}$.*

a. *En coût minimum ; ou, si V est continue sur Γ*[2]*, en poursuite évasion, $\overline{\Omega}$ étant alors supposé vérifier la condition de Soner (Hypothèse 5.14) .*
   Alors la solution V^h de $\mathcal{I}^h$ sur $\mathcal{E}^h$ (Proposition 6.11.c) converge vers V quand h tend vers 0^+, localement uniformément[3]*.*
b. *Sous l'Hypothèse 5.28 en distance minimum (écrétée inférieurement au niveau $-R$, R constante fixée > 0); ou sous les Hypothèses 5.9 et 5.24 en poursuite évasion. Notons V_ε^h la solution de $\mathcal{I}_\varepsilon^h$, analogue de $\mathcal{I}^h$ pour le jeu $\mathcal{G}_\varepsilon$ à pénalité lagrangienne $l \equiv \varepsilon$, ou, respectivement, à cible dilatée de ε*[4]*.*
   Alors V_ε^h converge doublement *vers la solution enveloppe de viscosité*[4]*v de $\mathcal{I}$ (prolongée par S sur $\mathring{\mathcal{T}}$, en poursuite évasion) quand h et ε tendent vers 0, au sens suivant.*
   Pour tout $\gamma > 0$, on a pour ε assez petit (pouvant dépendre de γ) :

$$| V_\varepsilon^h(x^h) - v(x) | \leq \gamma \tag{7.6}$$

   pour h et $\| x - x^h \|$ assez petits (pouvant dépendre de ε), $x^h \in \mathcal{E}^h$; — et pour tout compact $\mathcal{C}$ de continuité de v préalablement fixé :

$$\max_{\mathcal{E}^h \cap \mathcal{C}} | V_\varepsilon^h - v | \leq \gamma$$

   pour h assez petit (pouvant dépendre de ε).

Preuve

a. D'après les Théorèmes 5.13 ou 5.12, V (restreinte à $\overline{\Omega}$, en poursuite évasion) est solution de viscosité de $\mathcal{I}$, dont $\underline{V}$ et $\overline{V}$ sont respectivement sur- et sous-solution de viscosité, d'après la Proposition 7.6. D'où par application des Propositions (principes de comparaison) 5.17 ou 5.16.b :

$$\overline{V} \ \leq \ V \ \leq \ \underline{V}$$

   sur $\mathcal{E}$ ou $\overline{\Omega}$, puis, même en poursuite-évasion, sur $\mathcal{E}$ tout entier (par $V = \underline{V} = \overline{V} = S$ sur $\mathring{\mathcal{T}}$), c'est-à-dire convergence localement uniforme de V^h vers la fonction continue V, d'après le Théorème 7.2.e et f.
b. Soit $\mathcal{C}$ un compact sur lequel v est continue. Supposons par l'absurde l'existence de $\gamma > 0$, avec des ε arbitrairement faibles tels que

$$|V_\varepsilon^h(x^h) \ - \ v(x^h)| \ > \ 2\gamma \ ,$$

   pour des h arbitrairement faibles et x^h bien choisi dans $\mathcal{E}^h \cap \mathcal{C}$. Par compacité et continuité, on obtient $\mathcal{C} \cap \mathcal{E}^{h_n} \ni x^{h_n} \to x \in \mathcal{C}$, $v(x^{h_n}) \to v(x)$ (suites pouvant dépendre de ε), telles que pour tout n,

$$|V_\varepsilon^{h_n}(x^{h_n}) \ - \ v(x^{h_n})| \ > \ 2\gamma \ ,$$

2. Donc sur $\overline{\Omega}$, voir Corollaire 5.18.
3. Au sens défini au Théorème 7.2.f.
4. Voir §5.6.

d'où pour n assez grand :

$$|V_\varepsilon^{h_n}(x^{h_n}) \; - \; v(x)| \; > \; \gamma \; .$$

Ceci contredit (7.6) en x, qu'il ne reste donc plus qu'à montrer.

En poursuite évasion, on montrerait exactement comme on avait prouvé la Proposition 5.26.a :

$$v_\varepsilon \leq \underline{V}_\varepsilon \leq \overline{V}_\varepsilon \leq v$$

sur $\overline{\Omega}_\varepsilon$ pour $\varepsilon > 0$, et $v = \lim \nearrow_{\varepsilon\searrow 0^+} v_\varepsilon$ sur Ω, où v_ε est défini par (5.12). Notamment, pour $x \in \Omega$ ((7.6) étant évident pour $x \in \mathcal{T}$, $v(x) = S(x)$), il existe ε_γ tel que

$$v(x) \leq v_\varepsilon(x) + \gamma/2 \; ,$$

si $\varepsilon \leq \varepsilon_\gamma$. Pour un tel ε, il existe ensuite $h_\varepsilon > 0$ tel que

$$\underline{V}_\varepsilon(x) - \gamma/2 \leq V_\varepsilon^h(x^h) \leq \overline{V}_\varepsilon(x) + \gamma$$

si $h < h_\varepsilon$ et $x^h \in \mathcal{E}^h \cap \overline{B}_{h_\varepsilon}(x)$, par application du Théorème 7.2.d. Bout à bout :

$$v(x) - \gamma \leq v_\varepsilon(x) - \gamma/2 \leq \underline{V}_\varepsilon(x) - \gamma/2 \leq V_\varepsilon^h(x^h) \leq \overline{V}_\varepsilon(x) + \gamma \leq v(x) + \gamma \; .$$

De manière analogue, sous l'Hypothèse 5.28 en distance minimum écrétée inférieurement au niveau $-R$, on a sur $\mathcal{E}$:

$$\underline{V}_\varepsilon = V_\varepsilon = \overline{V}_\varepsilon$$

pour $\varepsilon > 0$, et $v = \lim \searrow_{\varepsilon\searrow 0^+} V_\varepsilon$, d'après les Propositions 7.7.a et 5.27, respectivement. Pour $x \in \mathcal{E}$, il existe donc $\varepsilon_\gamma > 0$ tel que

$$|v(x) - V_\varepsilon(x)| < \gamma/2$$

si $\varepsilon < \varepsilon_\gamma$. Puis pour un tel ε, il existe h_ε tel que

$$|V_\varepsilon^h(x^h) - V_\varepsilon(x)| < \gamma/2$$

si $h < h_\varepsilon$ et $x^h \in \mathcal{E}^h \cap \overline{B}_{h_\varepsilon}(x)$, d'après le Théorème 7.2.d appliqué à $V_\varepsilon = \overline{V_\varepsilon} = \underline{V_\varepsilon}$. Alors, $|V_\varepsilon^h(x^h) - v(x)| < \gamma$.

□

Remarque 7.8 Les preuves de convergence de schémas précédentes se rapportent à une notion de solution enveloppe de viscosité de l'équation d'Isaacs correspondante — l'existence de cette solution enveloppe étant mise en évidence par une méthode de type Perron.

En adaptant les preuves d'unicité des solutions de viscosité (par principe du maximum avec dédoublement de variables), on peut de même obtenir, lorsque la valeur est régulière, des résultats quant à la vitesse de convergence. Pour des résultats dans cette direction concernant des jeux en temps de capture, on renvoie aux travaux de l'école italienne (Soravia [125]). On obtient typiquement une vitesse de convergence en $O(\sqrt{h})$, en supposant la valeur du jeu Lipschitzienne.

Pour un résultat de même nature utilisant une technique différente, par régularisation, voir Pourtallier-Tidball [115].

Voici un Exemple de jeu de poursuite évasion (à un seul joueur : problème de contrôle en temps minimum) où l'on a la convergence double de la Proposition 7.7.b, mais pas la convergence simple de la Proposition 7.7.a.

Exemple 7.9 On considère le problème consistant à rejoindre l'origine de $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}$ en temps minimum, à l'aide d'une vitesse au choix n'excédant jamais l'unité — problème de solution évidente $|x|$, solution de viscosité forte de l'équation de Bellman(-Dirichlet) associée.

On est bien dans le cadre des Hypothèses 5.9 (problème en temps de capture) et 5.24; la solution du problème de contrôle à cible dilatée de $\varepsilon > 0$ étant $(|x|-\varepsilon)^+$. Donc pour toute famille non dégénérée de grilles étoilées $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$ sur $\mathbb{R}$, le schéma $(V_\varepsilon^h)_{\varepsilon>0,h>0}$ précédent converge doublement vers la solution enveloppe de l'équation de Bellman (transformée), solution qui ne saurait être que $\phi(|x|)$, d'après ce qui précède et la Proposition 5.26.b — tandis que si $\cup_{h>0}\mathcal{E}^h$ ne contient pas l'origine, alors $V^h \;\equiv\; 1 \;\equiv\; \hat{k} + \hat{\beta}$ pour tout h, où V^h désigne la solution du schéma pour la cible origine, d'où

$$\underline{V} \;\equiv\; \overline{V} \;\equiv\; 1 \;>\; \phi(|x|) \;,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$; la cause en étant bien sûr que la cible origine ne vérifie pas la condition de Soner (Hypothèse 5.14).

Dans certains cas discontinus, on a, au moins localement, la convergence simple de la Proposition 7.7.a. C'est l'objet de la section suivante, qui est aussi l'occasion de présenter des techniques de preuve de convergence probabilistes, fondées sur une approche trajectorielle de nos jeux différentiels, et qui revient en fait à adopter le point de vue des équations caractéristiques sur ces problèmes.

Chapitre 8

Approche trajectorielle par convergence faible

Dans ce Chapitre, on présente une preuve de convergence utilisant des techniques probabilistes de *convergence faible* (voir par exemple Billingsley [34]), fondée sur l'interprétation des problèmes discrets approximants comme jeux stochastiques, à l'exclusion de toute notion classique d'analyse numérique.

Ces techniques, qui furent introduites par Kushner [95], sont historiquement les premières à avoir été utilisées pour prouver la convergence de schémas de différences finies vers la solution de problèmes de contrôle optimal. En effet, c'est seulement lorsqu'on a compris le sens véritable de l'équation de Bellman par rapport aux problèmes de contrôle optimal, c'est-à-dire avec l'avènement de la théorie des solutions de viscosité (début des années 1980), qu'on a pu prouver la convergence de ces schémas par des méthodes d'*edp*.

Les nouvelles preuves utilisant la théorie des solutions de viscosité sont en général plus efficaces que les preuves probabilistes initiales. Cependant, celles-ci valent parfois sous des hypothèses plus faibles — uniquement locales — que celles-là. Ce Chapitre illustre ces techniques de preuves probabilistes, dans une tentative pour les étendre aux jeux différentiels. On obtient un résultat de convergence simple vers la valeur *feedback*, supposée exister, du jeu (Théorème 8.15), sans hypothèse de régularité globale sur cette fonction valeur. L'intérêt de cette approche (même si les conditions de convergence obtenues apparaissent trop restrictives) est que ces hypothèses globales sont rarement satisfaites dans les jeux classiques, tandis que des hypothèses de régularité locales sont satisfaites presque partout — sauf en-dehors d'ensembles de mesure [1] nulle, en un mot les barrières.

Dans le cadre des jeux en distance minimum, on perd l'unicité de la solution de l'équation $\mathcal{I}^h$ (voir Remarques 6.5 et 5.7). Ainsi se limite-t-on ici aux jeux de poursuite évasion. Dans la suite de ce Chapitre, on suppose donc donné un jeu différentiel de poursuite évasion $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$.

8.1 Jeux discrets stochastiques

Dans cette section, on suppose donnée une grille étoilée non dégénérée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$ (h fixé > 0).

Définition 8.1 *Au jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, et à la grille étoilée non dégénérée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$, associons un jeu stochastique (chaîne de Markov bi-contrôlée) $\mathcal{G}^h$, en espace (discret) dans $\mathcal{E}^h$ et temps (continu) dans $\mathbb{R}_+$, défini par :*

1. De Lebesgue r-dimensionnelle.

• *un délai avant le prochain saut en espace, suivant une loi exponentielle de moyenne* $\Delta t^h(x,u,v)$,

$$\Delta T(x,u,v),\ (x,u,v) \in \mathcal{E}^h \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}\ .$$

On note $\beta \equiv exp(-l\Delta T)$, $k \equiv \phi(l\Delta T)$ *;*
• *des probabilités de transition en espace :*

$$p^y(x,u,v) \ = \ f^y(x,u,v)\Delta t^h(x,u,v), \quad (x,u,v) \in \mathcal{E}^h \times \mathsf{U} \times \mathsf{V}, \quad y \in \mathcal{V}^h(x)\ ; \qquad (8.1)$$

• *un critère de coût* I^h*, défini pour toute condition initiale* $x^h \in \mathcal{E}^h$*, et paire de* feedback *discriminants inférieurs* (φ,ψ) *sur* $\mathcal{E}^h$ *:*

$$\begin{aligned} I^h_{\varphi,\psi}(x^h) \ &\equiv \ I^h(x^h;\varphi,\psi) \\ &:= \ E^{x^h}\sum_{n=0}^{\nu^h-1}(\prod_{m=0}^{n-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m))k(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) + \left(\prod_{m=0}^{\nu^h-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m)\right)S(X^h_{\nu^h}) \\ &= \ E^{x^h}\phi[\sum_{n=0}^{\nu^h-1} l(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n)\Delta T(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) + L(X^h_{\nu^h})]\ , \end{aligned}$$

d'après le Lemme élémentaire 2.1.b, en lisant un *pour les quantités dont on prend l'espérance lorsque* $\nu^h = +\infty$*, par convention.*

Dans les Définitions précédentes :
— $(X^h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désigne la chaîne de Markov bi-contrôlée sur $\mathcal{E}^h$, telle que la probabilité de passage de X^h_n à X^h_{n+1} vaut $p^{X^h_{n+1}}(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n)$, où φ^h_n et ψ^h_n sont des notations pour $\varphi(X^h_n,\psi^h_n)$ et $\psi(X^h_n)$ respectivement; on notera: $X^h_{n+1} \rightsquigarrow \mathcal{M}(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n)$;
— ν^h désigne l'étape d'atteinte de la cible $\mathcal{T}$ depuis x^h, c'est-à-dire le plus petit $n \in \overline{\mathbb{N}}$ tel que $X^h_n \in \mathcal{T}$.
— $E^{x^h}F(X^h)$ désigne l'espérance d'une fonctionnelle F dans le champ (T^h_n,X^h_n) $(\Delta T(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) \equiv T^h_{n+1} - T^h_n)$ initialisé en $X^h_0 \equiv x^h$ $(T^h_0 \equiv 0)$.

Le Chapitre 6 est indépendant de la continuité en x de la paire (f,l) du moment qu'on a la borne $\overline{f}$ sur $||f||$ et la continuité de φ par rapport à v.

Ainsi, étant donnée une paire de *feedback* discriminants inférieurs (φ,ψ) sur $\mathcal{E}^h$, où φ continue par rapport à v, désignons par R^h_φ l'opérateur correspondant à R^h pour

$$\mathsf{U} \equiv \ \text{singleton}, \quad (f,l) \equiv (f,l)(x,\varphi(x,v),v)\ .$$

Cet opérateur est bien défini, contractif de $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ dans lui-même, par application de la Proposition 6.11; il admet donc un unique point-fixe V^h_φ. L'équation au point fixe correspondante est notée $\mathcal{I}^h_\varphi$.

Définitions analogues pour R^h_ψ, V^h_ψ, et $\mathcal{I}^h_\psi$, $R^h_{\varphi,\psi}$, $V^h_{\varphi,\psi}$ et $\mathcal{I}^h_{\varphi,\psi}$.

Enfin, V^h désigne toujours le point-fixe de l'operateur R^h initial, solution de l'équation $\mathcal{I}^h$.

Théorème 8.2 *Soient un jeu de poursuite évasion* $\mathcal{G}$ *sur* $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$*, une grille étoilée non dégénérée* $\mathcal{E}^h$ *sur* $\mathcal{E}$ *(*h *fixé* > 0*),* $\mathcal{G}^h$ *le jeu associé à* $\mathcal{G}$ *sur* $\mathcal{E}^h$ *comme à la Définition 8.1,* $\Phi^h \times \Psi^h$ *l'ensemble des paires de* feedback *discriminants inférieurs sur* $\mathcal{E}^h$*, continus par rapport à* v*,* (φ,ψ) *fixé dans* $\Phi^h \times \Psi^h$*. Alors,*

a. $R^h_\psi \leq R^h \leq R^h_\varphi$ *sur* $\ell_\infty(\mathcal{E}^h)$ *;* $V^h_{\varphi,\psi} = I^h_{\varphi,\psi}$ *;*

b. $\min_{\Phi^h} I^h_{.,\psi} = I^h_{\varphi_*,\psi} = V^h_\psi \le I^h_{\underline{\varphi},\overline{\psi}} = V^h = \max_{\Psi^h}\min_{\Phi^h} I^h \le V^h_\varphi = I^h_{\varphi,\psi^*} = \max_{\Psi^h} I^h_{\varphi,.}$ *sur $\mathcal{E}^h$, dès lors que les* feedback *(d'état purs) φ_* et $\underline{\varphi}$ dans Φ^h et $\overline{\psi}$ et ψ^* dans Ψ^h vérifient pour tout $x^h \in \Omega$:*

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_*(x^h) & \in & \operatorname{Arg}\min\limits_{\mathsf{U}} \mathcal{T}^h V^h_\psi(x^h,.,\psi(x^h)) \\ \underline{\varphi}(x^h) & \in & \operatorname{Arg}\min\limits_{\mathsf{U}} \mathcal{T}^h V^h(x^h,.,\overline{\psi}(x^h)) \\ \overline{\psi}(x^h) & \in & \operatorname{Arg}\max\limits_{\mathsf{V}} \min\limits_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{T}^h V^h(x^h,u,.) \\ \psi^*(x^h) & \in & \operatorname{Arg}\max\limits_{\mathsf{V}} \mathcal{T}^h V^h_\varphi(x^h,\varphi(x^h,.),.)\,. \end{array}\right. \tag{8.2}$$

Remarque 8.3 De tels *feedback* purs existent forcément, par continuité de $\varphi(x,v)$ par rapport à v.

On relève au passage le Corollaire suivant, qui interprète (comme on pouvait s'y attendre) $\mathcal{I}^h$ comme équation de programmation dynamique caractéristique de la valeur inférieure du jeu $\mathcal{G}^h$.

Corollaire 8.4 *Hypothèses du Théorème 8.2. La solution V^h de $\mathcal{I}^h$ (Proposition 6.11.c) n'est autre que la valeur inférieure ($:= \max_{\Psi^h}\min_{\Phi^h} I^h$) de $\mathcal{G}^h$.*

□

Preuve du Théorème 8.2

a. Étant donnée $W^h \in \ell_\infty(\mathcal{E}^h)$, on a $R^h_\psi W^h(x^h) = R^h W^h(x^h) = R^h_\varphi W^h(x^h) = I^h_{\varphi,\psi}(x^h) = S(x^h)$ si $x^h \in \mathcal{T}$. Si en revanche $X^h_0 = x^h \in \Omega$, alors d'une part

$$\begin{aligned} R^h_\psi W^h(x^h) &= \min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{T}^h W^h(x^h,u,\psi(x^h)) \\ &\le \max_{v\in\mathsf{V}}\min_{u\in\mathsf{U}} \mathcal{T}^h W^h(x^h,u,v) = R^h W^h(x^h) \\ &\le \max_{v\in\mathsf{V}} \mathcal{T}^h W^h(x^h\varphi(x^h,v),v) = R^h_\varphi W^h(x^h)\,; \end{aligned}$$

et d'autre part, on a avec des notations évidentes, dans le jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}^h$:

$$0 < \nu^h_{\varphi,\psi}(x^h) = \nu^h_{\varphi,\psi}(X^h_1) + 1 \in \overline{\mathbb{N}}. \tag{8.3}$$

De plus, k et β somment à un, par définition. Donc on peut écrire, trajectoire par trajectoire, ν^h étant fini ou non, le facteur de $\beta(x^h,\phi^h_0,\psi^h_0)$ étant pris égal à un dans ce dernier cas :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\nu^h-1}\left(\prod_{m=0}^{n-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m)\right)k(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) + \left(\prod_{m=0}^{\nu^h-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m)\right)S(X^h_{\nu^h}) \\ &\equiv\ k(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) + \beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0)\left\{\sum_{n=1}^{\nu^h-1}\left(\prod_{m=1}^{n-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m)\right)k(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n)\right. \\ &\quad\left. + \left(\prod_{m=1}^{\nu^h-1}\beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m)\right)S(X^h_{\nu^h})\right\}\,. \end{aligned}$$

Alors, par linéarité de l'espérance et propriété fondamentale des espérances conditionnelles imbriquées :

$$\begin{aligned}
I^h_{\varphi,\psi}(x^h) &= E^{x^h} k(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \\
&\quad + E^{x^h} E^{X^h_1} \Bigg\{ \beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \sum_{n=1}^{\nu^h-1} \left(\prod_{m=1}^{\nu^h-1} \beta(X^h_m,\varphi^h_m,v^h_m) \right) k(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) \\
&\quad + \prod_{m=1}^{\nu^h-1} \beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m) S(X^h_{\nu^h}) \Bigg\} \\
&= \hat{k}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \\
&\quad + E^{x^h} \Bigg\{ \beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) E^{X^h_1} \Bigg[\sum_{n=1}^{\nu^h-1} \left(\prod_{m=1}^{\nu^h-1} \beta(X^h_m,\varphi^h_m,v^h_m) \right) k(X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n) \\
&\quad + \prod_{m=1}^{\nu^h-1} \beta(X^h_m,\varphi^h_m,\psi^h_m) S(X^h_{\nu^h}) \Bigg] \Bigg\} \\
&= \hat{k}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \ + \ E^{x^h} \left[\beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) I^h_{\varphi,\psi}(X^h_1) \right] \\
&= \hat{k}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \ + \ \hat{\beta}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) E^{x^h} I^h_{\varphi,\psi}(X^h_1) \ ,
\end{aligned}$$

car $\beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0)$ et $I^h_{\varphi,\psi}(X^h_1)$ sont des variables indépendantes, conditionnellement à x^h, et par propriétés des lois exponentielles (transformée de Laplace) et Définition 6.4 de $\hat{k}$ et $\hat{\beta}$:

$$E^{x^h} k(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) = \hat{k}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \ , \quad E^{x^h} \beta(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) = \hat{\beta}(x^h,\varphi^h_0,\psi^h_0) \ .$$

$I^h_{\varphi,\psi}$ résoud donc $\mathcal{I}^h_{\varphi,\psi}$. Soit $I^h_{\varphi,\psi} = V^h_{\varphi,\psi}$ par unicité.

b. V^h_φ,respectivement V^h_ψ, est sur-solution, respectivement sous-solution de $\mathcal{I}^h$ d'après a. Donc on a

$$V^h_\psi \leq V^h \leq V^h_\varphi \tag{8.4}$$

sur $\mathcal{E}^h$, d'après la Proposition (principe de comparaison) 6.11.d en vigueur pour cette équation. De même, $V^h_{\varphi,\psi}$ alias $I^h_{\varphi,\psi}$ est sous-solution, respectivement sur-solution de $\mathcal{I}^h_\varphi$, respectivement $\mathcal{I}^h_\psi$, d'où

$$I^h_{\varphi,\psi} \leq V^h_\varphi \,, \tag{8.5}$$

respectivement

$$V^h_\psi \leq I^h_{\varphi,\psi} \tag{8.6}$$

sur $\mathcal{E}^h$.

De plus, V^h_φ respectivement V^h_ψ n'est autre que V^h_{φ,ψ^*} alias I^h_{φ,ψ^*}, respectivement $V^h_{\varphi_*,\psi}$ alias $I^h_{\varphi_*,\psi}$, car elle vérifie $\mathcal{I}^h_{\varphi,\psi^*}$, respectivement $\mathcal{I}^h_{\varphi^*,\psi}$, par propriété de ψ^*, respectivement φ_* dans (8.2). D'où par comparaison avec (8.5) où on fait varier ψ sur Ψ^h, respectivement (8.6) où on fait varier φ sur Φ^h :

$$V^h_\varphi = \max_{\Psi^h} I^h_{\varphi,\cdot} \ , \quad \text{respectivement} \quad V^h_\psi = \min_{\Phi^h} I^h_{\cdot,\psi} \, . \tag{8.7}$$

Enfin, V n'est autre que $V^h_{\overline{\psi}}$, ou encore $V^h_{\underline{\varphi},\overline{\psi}}$, car il vérifie $\mathcal{I}^h_{\overline{\psi}}$ ou $\mathcal{I}^h_{\underline{\varphi},\overline{\psi}}$, par propriétés (8.2) de la paire $(\underline{\varphi},\overline{\psi})$.

D'après a et (8.7) appliqué à la paire $(\varphi_*,\psi) \equiv (\underline{\varphi},\overline{\psi})$, il vient alors :

$$V^h = V^h_{\overline{\psi}} = I^h_{\underline{\varphi},\overline{\psi}} = \min_{\Phi^h} I^h_{\cdot,\overline{\psi}}$$

ce qui, joint à (8.4) et (8.7) (où on fait varier ψ sur Ψ^h) achève de prouver :

$$V^h = \max_{\Psi^h} \min_{\Phi^h} I^h.$$

□

Dans les Propositions suivantes et leurs preuves, on notera en sus de ce qui précède, sous les hypothèses du Théorème 8.2 :
— $\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t$, (...) les interpolées de $X^h_n,\varphi^h_n,\psi^h_n$, (...) constantes en temps entre les instants T^h_n et T^h_{n+1} ;
— $(\tilde{f}^h_t,\tilde{\ell}^h_t) \equiv (f,\ell)(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t)$;
— pour $\delta > 0$ fixé, $\Delta\widetilde{X}^h_t \equiv \widetilde{X}^h_{t+\delta} - \widetilde{X}^h_\delta$;
— P^t,E^t,Cov^t, respectivement la probabilité, l'espérance et la (matrice de) covariance conditionnellement à l'information disponible à la date t (implicitement: au départ de x^h) ;
— M^T,TrM et $|||M|||$, respectivement la transposée, la trace et la norme d'application linéaire d'une matrice M (éventuellement ligne ou colonne). Donc Tr$M \leq r|||M|||$, pour M symétrique réelle de taille r.

La Figure 8.1 reprend en les illustrant un certain nombre des notations introduites dans ce Chapitre jusqu'à présent. Les constructions qui précèdent ainsi que les Propositions 8.5 et 8.6 suivantes, sont des adaptations de Kushner-Dupuis [97].

Proposition 8.5 *Hypothèses du Théorème 8.2. On a des constantes a, a^h, b^h, c^h, δ^h, — indépendantes des indices autres qu'explicités, — telles que $\forall t \geq 0$, $\forall \delta \leq \delta^h$:*

a.

$$E^t\Delta\widetilde{X}^h_t =: \delta\tilde{f}^h_t \; + \; a^{h,\delta}_t\delta^2, \quad \| \, a^{h,\delta}_t \, \| \leq a^h \; ; \quad \| \, E^t\Delta\widetilde{X}^h_t \, \| \leq b^h\delta \; ;$$

b.

$$|||Cov^t\Delta\widetilde{X}^h_t||| \; \leq \; c^h\delta^2 \; + \; a\delta\overline{\delta}^h/\sin(\alpha^h) \; .$$

Preuve Notons $N^h_{]t,t+\delta]}$ le nombre de sauts du processus $\widetilde{X}^h$ sur l'intervalle de temps $]t,t+\delta]$. Par propriétés de la chaîne de Markov en temps continu $\widetilde{X}^h_t$ et des lois exponentielles de moyennes

$$\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t) \;\; \geq \;\; \frac{\underline{\delta}^h\sin(\alpha^h)}{r\overline{f}} \;\; > \;\; 0$$

(Proposition 6.11.a), on a pour des constantes α^h et A^h assez grandes, et $\delta \leq \delta^h$ assez petit :

$$P^t\{N^h_{]t,t+\delta]} = 1\} \;\; =: \;\; \frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t)} \;\; + \;\; \alpha^{h,\delta}_t\delta^2 \; ,$$

où $|\alpha^{h,\delta}_t| \leq \alpha^h$;

$$\sum_{k\geq 2} k^2 \;\, P^t\{N^h_{]t,t+\delta]} = k\} \;\; \leq \;\; A^h \; \delta^2 \; .$$

En effet, notons ν l'entier naturel (aléatoire) tel que $T^h_\nu \leq t < T^h_{\nu+1}$. Alors,

$$P^t(N^h_{]t,t+\delta]} = 1) \; = \; P^t(N^h_{]t,t+\delta]} \geq 1) - P^t(N^h_{]t,t+\delta]} \geq 2) \; = \; P^t(T^h_{\nu+1} - t \leq \delta) - P^t(T^h_{\nu+2} - t \leq \delta) \, ,$$

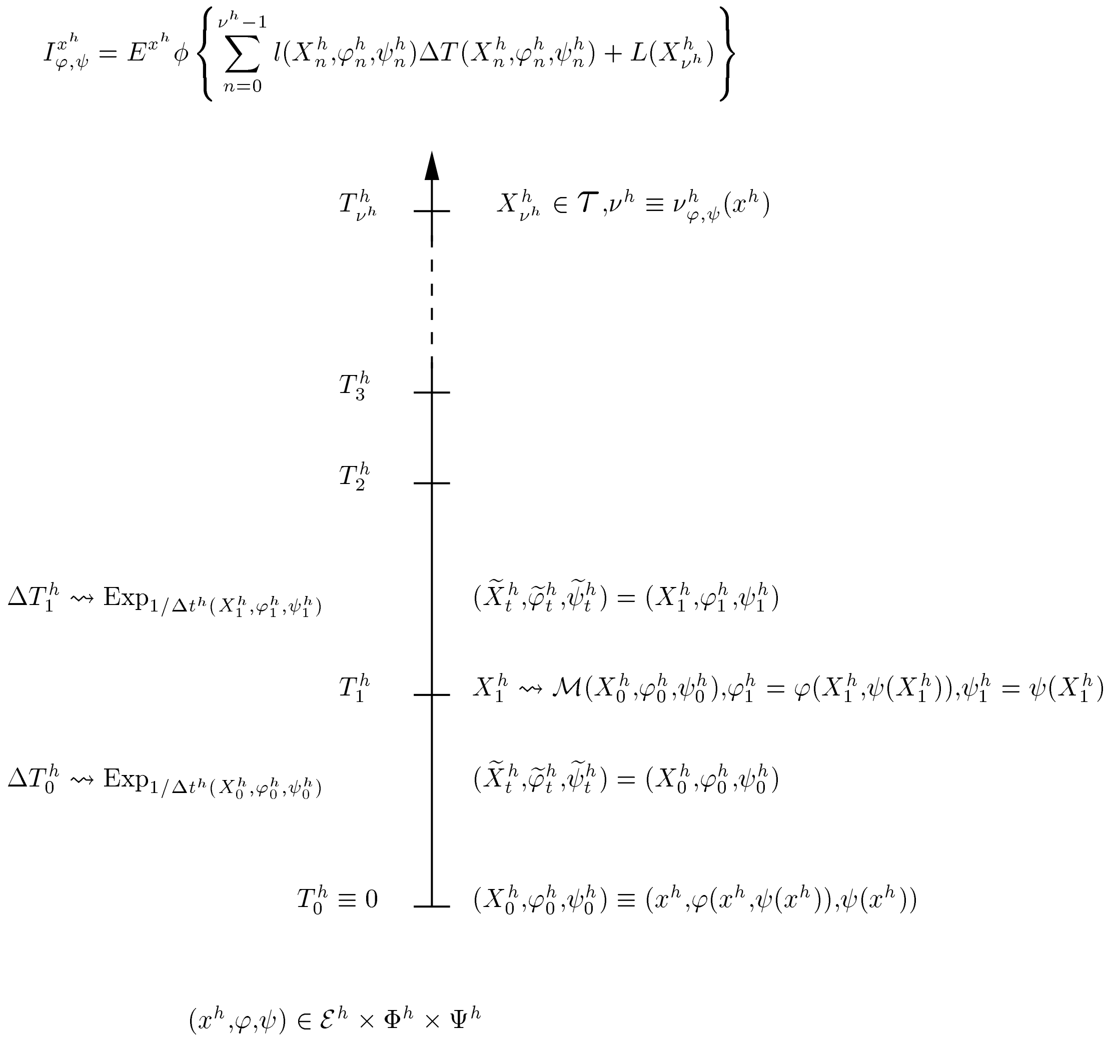


Fig. 8.1 – Jeu à chaîne de Markov $\mathcal{G}^h$

où:

$$P^t(T^h_{\nu+1} - t \le \delta) \;=\; \phi\left(\frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t, \widetilde{\varphi}^h_t, \widetilde{\psi}^h_t)}\right) \;\le\; \frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\ ,$$

$$\begin{aligned}
P^t(T^h_{\nu+2} - t \le \delta) &= P^t\{(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1}) + (T^h_{\nu+1} - t) \le \delta\} \\
&\le P^t\{(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1} \le \delta) \;\wedge\; (T^h_{\nu+1} - t \le \delta)\} \\
&= P^t(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1} \le \delta \mid T^h_{\nu+1} - t \le \delta)\; P^t(T^h_{\nu+1} - t \le \delta)\ .
\end{aligned}$$

De plus, par propriété de Markov forte de la chaîne de Markov en temps continu $\widetilde{X}^h$, l'incrément $T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1}$ est indépendant de $T^h_{\nu+1} - t$, conditionnellement au passé du processus au temps (d'arrêt) $T^h_{\nu+1}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
P^t(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1} \le \delta \mid T^h_{\nu+1} - t \le \delta) &= E^t P^{T^h_{\nu+1}}(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1} \le \delta \mid T^h_{\nu+1} - t \le \delta) \\
&= E^t P^{T^h_{\nu+1}}(T^h_{\nu+2} - T^h_{\nu+1} \le \delta) \\
&= E^t \phi\left(\frac{\delta}{\Delta t^h(X^h_{\nu+1}, \varphi^h_{\nu+1}, \psi^h_{\nu+1})}\right) \\
&\le \phi\left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right) \;\le\; \frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\ .
\end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
&\left| P^t(N^h_{]t,t+\delta]} = 1) - \frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t, \widetilde{\varphi}^h_t, \widetilde{\psi}^h_t)} \right| \\
&\le \left| \phi\left(\frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t, \widetilde{\varphi}^h_t, \widetilde{\psi}^h_t)}\right) - \frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t, \widetilde{\varphi}^h_t, \widetilde{\psi}^h_t)} \right| \;+\; \left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^2 \\
&\le \frac{1}{2}\left(\frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t, \widetilde{\varphi}^h_t, \widetilde{\psi}^h_t)}\right)^2 \;+\; \left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^2 \\
&\le \frac{3}{2}\left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^2 \;=:\; \alpha^h \delta^2\ .
\end{aligned}$$

De même, par récurrence sur $k \ge 2$ (le cas $k = 2$ étant traité ci-dessus)

$$\begin{aligned}
P^t(N^h_{]t,t+\delta]} = k) &\le P^t(N^h_{]t,t+\delta]} \ge k) \\
&= P^t(T^h_{\nu+k} - t \le \delta) \\
&= P^t\{(T^h_{\nu+k} - T^h_{\nu+k-1}) + \ldots + (T^h_{\nu+1} - t) \le \delta\} \\
&\le \left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^k\ ,
\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{k\ge 2} k^2 P^t(N^h_{]t,t+\delta]} = k) \;\le\; \left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^2 \;\sum_{\ell \ge 0} (\ell+2)^2 \left(\frac{\delta}{\underline{\Delta t}^h}\right)^\ell$$

où la série converge et est bornée en $\delta < \frac{1}{2}\underline{\Delta t}^h =: \delta^h$, auquel cas on a bien:

$$\sum_{k\ge 2} k^2 P^t(N^h_{]t,t+\delta]} = k) \;\le\; A^h \delta^2\ .$$

Alors,

a.

$$\begin{aligned} E^t \Delta \widetilde{X}_t^h \ &=: \ P^t\{N^h_{]t,t+\delta]} = 1\} \\ &\quad \times \sum_{\widetilde{X}^h_{t+\delta} \in \mathcal{V}^h(\widetilde{X}^h_t)} \Delta \widetilde{X}^h_t f^{\widetilde{X}^h_{t+\delta}}(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t)\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t) \\ &\quad + \ A_t^{h,\delta}\delta^2 \ , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \| \ A_t^{h,\delta} \ \| \ \delta^2 \ &\leq \ \sum_{k\geq 2} P^t\{N^h_{]t,t+\delta]} = k\} \ k\overline{\delta}^h \\ &\leq \ A^h\delta^2\overline{\delta}^h \ ; \end{aligned}$$

d'où :

$$E^t\Delta\widetilde{X}^h_t \ = \ \delta\tilde{f}^h_t \ + \ a_t^{h,\delta}\delta^2 \ ,$$

où $\| \ a_t^{h,\delta} \ \| \leq \alpha^h\overline{\delta}^h + A^h\overline{\delta}^h =: a^h$; puis $\| \ E^t\Delta\widetilde{X}^h_t \ \| \leq b^h\delta$ pour b^h assez grand, quitte à restreindre δ^h ;

b.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}^t\Delta\widetilde{X}^h_t \ + \ (E^t\Delta\widetilde{X}^h_t)(E^t\Delta\widetilde{X}^h_t)^T \ = \ E^t\left(\Delta\widetilde{X}^h_t \ \Delta\widetilde{X}^{hT}_t\right) \\ &=: \ \left(\frac{\delta}{\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t)} \ + \ \alpha_t^{h,\delta}\delta^2\right) \\ &\quad \times \sum_{\widetilde{X}^h_{t+\delta} \in \mathcal{V}^h(\widetilde{X}^h_t)} \Delta\widetilde{X}^h_t\Delta\widetilde{X}^{hT}_t f^{\widetilde{X}^h_{t+\delta}}(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t)\Delta t^h(\widetilde{X}^h_t,\widetilde{\varphi}^h_t,\widetilde{\psi}^h_t) \\ &\quad + \ B_t^{h,\delta}\delta^2 \ , \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} |||B_t^{h,\delta}|||\delta^2 \ &\leq \ \sum_{k\geq 2} P^t\{k \text{ sauts de } \widetilde{X}^h_t \text{ sur } [t,t+\delta]\} \ (k\overline{\delta}^h)^2 \\ &\leq \ A^h\delta^2(\overline{\delta}^h)^2 \ ; \end{aligned}$$

Il vient alors en utilisant le point a précédent et la Proposition 6.2.d.ii :

$$\begin{aligned} |||\mathrm{Cov}^t\Delta\widetilde{X}^h_t||| \ &\leq \ (b^h)^2\delta^2 \ + \ \delta r\overline{\delta}^h\overline{f}/\sin(\alpha^h) \ + \ \alpha^h\delta^2(\overline{\delta}^h)^2 \ + \ A^h\delta^2(\overline{\delta}^h)^2 \\ &=: \ c^h\delta^2 \ + \ a\delta\overline{\delta}^h/\sin(\alpha^h) \ , \end{aligned}$$

d'après la Proposition 6.11.a, équation (6.2).

□

Proposition 8.6 *Hypothèses du Théorème 8.2. Le processus* $M^h_t := \widetilde{X}^h_t - x^h - \int_0^t \tilde{f}^h$, *est une martingale nulle en 0, à sauts (à droite) n'excédant pas* $\overline{\delta}^h$, *telle que pour tous* $0 \leq s \leq t$ *:*

$$E^s \sup_{[s,t]} \| \ M^h_\cdot - M^h_s \ \|^2 \ \leq \ 4 \ E^s \ \| \ M^h_t - M^h_s \ \|^2 \ \leq \ 4ar(t-s)\overline{\delta}^h/\sin(\alpha^h) \ , \qquad (8.8)$$

— a étant la constante introduite dans la Proposition 8.5 précédente .

Preuve Pour $0 \leq s < t$, $\delta \equiv (t-s)/n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\begin{aligned} E^s(\widetilde{X}^h_t - \widetilde{X}^h_s) &= \sum_{m<n} E^s E^{s+m\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} \\ &= \delta\ E^s \left(\sum_{m<n} \tilde{f}^h_{s+m\delta} \right) \ + \ \delta^2\ E^s \left(\sum_{m<n} a^{h,\delta}_{s+m\delta} \right) \ , \end{aligned}$$

où $\| a^{h,\delta}_{s+m\delta} \| \leq a^h$, d'après la Proposition précédente 8.5.a. Donc $E^s(\widetilde{X}^h_t - \widetilde{X}^h_s) = E^s \int_s^t \tilde{f}^h$, par convergence dominée quand $n \to +\infty$ (en utilisant la borne $\overline{f}$ sur f). I.e., $E^s M^h_t = M^h_s$, et M^h est une martingale, nulle en 0, dont les sauts (à droite) sont ceux de $\widetilde{X}^h$, n'excédant jamais $\overline{\delta}^h$. Alors ,

$$M^h_t - M^h_s \ = \ \sum_{m<n} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} \ - \ E^{s+m\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} \ ,$$

où les termes de la somme sont indépendants, conditionnellement à x^h. En effet, pour $s + \ell\delta < s + m\delta < t$, il vient en utilisant les propriétés des espérances conditionnelles (imbriquées) :

$$\begin{aligned} & E^{s+\ell\delta} \left\{ (\Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta} - E^{s+\ell\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta})(\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} - E^{s+m\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \\ = \ & E^{s+\ell\delta} \left\{ \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta}\ (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \ - \ E^{s+\ell\delta} \left\{ (E^{s+\ell\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta})\ (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \\ & - \ E^{s+\ell\delta} \left\{ \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta}\ E^{s+m\delta} (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \ + \ E^{s+\ell\delta} \left\{ (E^{s+\ell\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta})\ E^{s+m\delta} (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \\ = \ & E^{s+\ell\delta} \left\{ \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta}\ (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \ - \ (E^{s+\ell\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta})\ E^{s+\ell\delta} (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \\ & - \ E^{s+\ell\delta} E^{s+m\delta} \left\{ \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta}\ (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \right\} \ + \ (E^{s+\ell\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+\ell\delta})\ E^{s+\ell\delta} E^{s+m\delta} (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})^T \\ = \ & 0\ , \end{aligned}$$

car $E^{s+\ell\delta} \equiv E^{s+\ell\delta} E^{s+m\delta}$. Par suite :

$$\begin{aligned} E^s \parallel M^h_t - M^h_s \parallel^2 &= \sum_{m<n} E^s \parallel \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} - E^{s+m\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} \parallel^2 \\ &= \sum_{m<n} E^s E^{s+m\delta} \parallel \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} - E^{s+m\delta} \Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta} \parallel^2 \\ &= \sum_{m<n} E^s \mathrm{Tr}\ \mathrm{Cov}^{s+m\delta} (\Delta \widetilde{X}^h_{s+m\delta})\ . \end{aligned}$$

Donc, en vertu et avec les notations de la Proposition 8.5.b :
$E^s \parallel M^h_t - M^h_s \parallel^2 \leq rc^h \delta(t-s) \ + \ ar(t-s)\overline{\delta}^h / \sin(\alpha^h)$, puis $E^s \parallel M^h_t - M^h_s \parallel^2 \leq ar(t-s)\overline{\delta}^h / \sin(\alpha^h)$, par passage à la limite quand $n \to +\infty$.

La première inégalité dans (8.8) n'est alors autre que l'inégalité de sous-martingale continue à droite $\parallel M^h_\cdot - M^h_s \parallel \geq 0$ (inégalité de Doob, voir par exemple Karatzas-Shreve [92, Chapter 1, Theorem 3.8.iv]).

□

8.2 Résultats de convergence

On introduit maintenant comme dans Kushner-Dupuis [97] les contrôleurs relaxés.

Définition 8.7 *On appelle* contrôleur v-relaxé, *toute mesure borélienne positive* $\nu(\cdot)$ *sur*

$V \times \mathbb{R}_+$*, telle que :* $\nu(V \times [0,t]) = t$*, pour tout* t*.*

Alors, il existe pour tout t *une* dérivée $\nu_t(\cdot)$*, mesure de probabilité borélienne sur* V*, telle que*

$$\nu(dv\ dt) \ \equiv\ \nu_t(dv)\ dt\ .$$

Exemple 8.8 On peut notamment identifier les contrôleurs mesurables, $v(\cdot) \in \mathcal{V}$ avec leurs *représentations v-relaxées*, $\nu_t(dv) \equiv \delta_{v(t)}dv$.

Proposition 8.9 *L'ensemble des contrôleurs v-relaxés est séquentiellement compact pour la* métrique de Prohorov*, telle que* $\nu_n \to \nu$ *quand* $n \to +\infty$ *si et seulement si*

$$\int_{t\in\mathbb{R}_+}\int_{v\in V} f(t,v)\nu(dvdt) \ = \ \lim_{n\to+\infty}\int_{t\in\mathbb{R}_+}\int_{v\in V} f(t,v)\nu_n(dvdt)\ ,$$

pour toute fonction réelle f*, continue (tout au moins* ν*-presque sûrement), à support compact sur* $V \times \mathbb{R}_+$*.*

Définition 8.10 *Soient un jeu de poursuite évasion* $\mathcal{G}$ *sur* $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ *(*$r \in \mathbb{N}^*$*), un produit admissible de classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs (Définition 3.4)* $\Phi \times \Psi$*. Étant donnés* $x \in \mathcal{E}$*, un* feedback *du minimiseur,* φ*, et un contrôleur v-relaxé du maximiseur,* ν*, on appelle* trajectoire relaxée *de* $\mathcal{G}$ *en* (x,φ,ν)*, toute solution*[2] *de l'équation*

$$\dot{y}^x(t) \ = \ \int_{v\in V} f(y^x(t),\varphi(y^x(t),v),v)\ \nu_t(dv)\ , \qquad y^x(0) = x\ .$$

Remarque 8.11 On n'a pas de résultat général d'existence et d'unicité pour cette équation, sauf $y^x \equiv y^x_{\varphi,v(\cdot)}$ si $\varphi \in \Phi$, $\nu_t(dv) \equiv \delta_{v(t)}dv$ pour $v(\cdot) \in \mathcal{V}$, par axiomatique de $\Phi \times \Psi$ rappelée à la Définition 3.4.

Proposition 8.12 *Données de la Définition 8.10. Toute trajectoire relaxée* y^x *de* $\mathcal{G}$ *en* (x,φ,ν) *est une* solution au sens de Fillipov *en* x *de l'inclusion différentielle associée à la correspondance (bornée)* F_φ *:*

$$\mathcal{E} \ni y \overset{F_\varphi}{\mapsto} \{f(y,\varphi(y,v),v)\ |\ v \in V\} \subseteq \mathcal{E}\ .$$

On notera: $y^x \in \mathcal{F}_\varphi(x)$*.*

Où (rappel):

Définition 8.13 (Solution au sens de Fillipov) *Étant donnée une correspondance localement bornée* F *de* $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ *(*$r \in \mathbb{N}^*$*) dans lui-même, on appelle* solution au sens de Fillipov*, initialisée en* $x \in \mathcal{E}$*, de l'inclusion différentielle associée à* F*, toute trajectoire absolument continue,* $y^x(t)$*, telle que* $y^x(0) = x$*, et pour presque tout* t *positif:*

$$\dot{y}^x(t) \in \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{co} \bigcup_{y\in B_\varepsilon[y^x(t)]} F(y)\ ,$$

— $B_\varepsilon[y^x(t)]$ *boule ouverte de rayon* ε *autour de* $y^x(t)$ *dans* $\mathcal{E}$*.*

2. Au sens de Carathéodory.

Preuve de la Proposition 8.12

Soit y^x une trajectoire relaxée de $\mathcal{G}$ en (x,φ,ν). Alors $y^x(0) = 0$, et pour presque tout t positif :

$$\begin{array}{rcl} \dot{y}^x(t) & = & \displaystyle\int_{v\in\mathsf{V}} f(y^x(t),\varphi(y^x(t),v),v)\ \nu_t(dv) \\ & \in & \overline{\mathrm{co}}\ F_\varphi[y^x(t)] \\ & \subseteq & \displaystyle\bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{co}} \bigcup_{y\in B_\varepsilon[y^x(t)]} F_\varphi(y)\ , \end{array}$$

car $F_\varphi[y^x(t)] \subseteq \bigcup_{y\in B_\varepsilon[y^x(t)]} F_\varphi(y)$, $\forall\varepsilon > 0$.

□

Remarque 8.14 On a des développements analogues concernant les *contrôleurs u-relaxés* du minimiseur, notés μ. D'où en particulier dans tout jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$, sur tout produit admissible $\Phi \times \Psi$:

$$\inf_{\{\mu\}} I^x_{\cdot,\psi} \ \leq\ \inf_{\mathcal{U}} I^x_{\cdot,\psi} \ \leq\ \sup_{\mathcal{V}} I^x_{\varphi,\cdot} \ \leq\ \sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot}$$

(voir Remarque 8.11), pour tout $(x,\varphi,\psi) \in \mathcal{E} \times \Phi \times \Psi$.

Lorsqu'on a l'inégalité opposée (qui est donc alors une égalité, à la valeur de point-selle en *feedback* $V(x)$ sur $\Phi \times \Psi$) :

$$\sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot} \ \leq\ \inf_{\{\mu\}} I^x_{\cdot,\psi}\ ,$$

on qualifiera (φ,ψ) de *point-selle relaxé* au point x.

Théorème 8.15 *Soient un jeu de poursuite évasion $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, $\Phi \times \Psi$ un produit admissible de classes de stratégies en* feedback *discriminants inférieurs sur $\mathcal{E}$, $(\mathcal{E}^h)_{h>0}$ une famille non dégénérée de grilles étoilées sur $\mathcal{E}$, $x \in \mathcal{E}$.*

a. Soit $\varphi \in \Phi$, φ continue par rapport à v. Pour $h > 0$, $x^h \in \mathcal{E}^h$, on reprend en les étendant les notations de la section précédente : Jeu $\mathcal{G}^h$ sur $\mathcal{E}^h$; $\varphi^h \equiv \varphi|_{\mathcal{E}^h\times\mathsf{V}}$; ψ^h défini à partir de $V^h_{\varphi^h}$ comme (ψ^* à partir de V^h_φ) en Proposition 8.2.b, i.e. ψ^h maximiseur dans l'équation au point-fixe $\mathcal{I}^h_{\varphi^h}$; $\widetilde{X}^h$, processus des trajectoires du jeu $\mathcal{G}^h$ en (x^h,φ^h,ψ^h) ; $\widetilde{\varphi}^h \equiv \varphi(\widetilde{X}^h,\widetilde{\psi}^h)$; $\widetilde{\psi}^h \equiv \psi^h(\widetilde{X}^h)$, de représentation relaxée $\tilde{\nu}^h$; $\tilde{\tau}^h \equiv \tau(\widetilde{X}^h)$; $M^h_t \equiv \widetilde{X}^h_t - x^h - \int_0^t f(\widetilde{X}^h_s,\widetilde{\varphi}^h_s,\widetilde{\psi}^h_s)ds$.

Alors quand $h \to 0^+$, M^h tend en probabilité, ou, indifféremment, en loi, vers la constante nulle, dans D^r .

De plus, pour toutes séquences $h_n \to 0^+$ et $\mathcal{E}^{h_n} \ni x^{h_n} \to x$ quand $n \to +\infty$, il existe une extraction, n_m, telle que

$$(\widetilde{X}^{h_{n_m}},\tilde{\nu}^{h_{n_m}},\tilde{\tau}^{h_{n_m}}) \ \rightharpoonup\ (\widetilde{X},\tilde{\nu},\tilde{\tau})$$

dans $\mathcal{D}^r \times \{\nu\} \times \mathbb{R}_+$ quand $m \to +\infty$, où $\widetilde{X}$ est à trajectoire dans $\mathcal{F}_\varphi(x)$, presque sûrement.

b. Mieux, $\widetilde{X}$ trajectoire de $\mathcal{G}$ en $(x,\varphi,\tilde{\nu})$ et $\tilde{\tau} = \tau(\widetilde{X})$, presque sûrement, et

$$\limsup_{m\to+\infty} I^{h_{n_m}}_{\varphi^{h_{n_m}},\psi^{h_{n_m}}}(x^{h_{n_m}}) \ \leq\ \sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot}\ ,$$

en supposant de plus :

• *φ continue au point (x,v), pour tout $v \in$ V, et tout $x \in \mathcal{E}$ en dehors d'un fermé $\mathcal{S}$, qu'une trajectoire $y^x \in \mathcal{F}_\varphi(x)$ ne saurait rencontrer qu'en des dates isolées[3] — a fortiori: y^x ne séjourne pas sur $\mathcal{S}$;*
• *la continuité de τ :*

$$D^r \ \ni \ y^x(\cdot) \mapsto \tau[y^x(\cdot)] \ \in \ \overline{\mathbb{R}}_+ \ .$$

c. *On reprend les Hypothèses précédentes sur $\varphi \in \Phi$ et analogues sur $\psi \in \Psi$, où (φ,ψ) point-selle relaxé en x sur $\Phi \times \Psi$. Alors*

$$\lim_{\substack{h \to 0^+ \\ \mathcal{E}^h \ni x^h \to x}} V^h(x^h) \ = \ V(x) \ ,$$

où V^h est la valeur inférieure de $\mathcal{G}^h$ sur $\mathcal{E}^h$, solution de l'équation au point-fixe, ou programme par différences finies $\mathcal{I}^h$ (Proposition 6.11.c et Corollaire 8.4).

d. *Idem c, en tout point-selle (φ,ψ) sur $\Phi \times \Psi$ (non nécessairement relaxé), si l'on suppose en outre l'existence d'une* unique *trajectoire de $\mathcal{G}$ en (x,φ,ν) pour tout ν / (x,μ,ψ) pour tout μ.*

Dans le Théorème précédent et sa preuve,

Définition 8.16 *D^r désigne l'espace (de Fréchet) des trajectoires (de $\widetilde{X}^{(h)}$)* cadlag *dans $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ (continues à droite, à limites à gauche sur $\mathbb{R}_+$), muni de sa* métrique de (Fréchet-)Skorokhod*, qui en fait un espace* Polonais *(séparable, métrique, complet), voir par exemple Billingsley, Kushner, Kushner-Dupuis [34, 95, 97].*

On rappelle en particulier que sur l'espace des trajectoires *cadlag* dans $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$, une convergence dans D^r, vers une limite continue, est localement uniforme.

Commentaire 8.17 *On obtient donc bien un Théorème du type souhaité, fournissant des conditions locales de convergence simple du schéma en un point x donné. Cependant, les conditions obtenues sont très restrictives, limitant cette convergence aux points depuis lesquels aucune trajectoire au sens de Fillipov issue de x pour un* feedback *optimal d'un des joueurs, ne séjourne sur une surface singulière du jeu. Or on sait que les trajectoires (optimales notamment) ont tendance à longer les singularités.*

Preuve du Théorème 8.15

a. Soient $h_n \to 0^+$, $\mathcal{E}^{h_n} \ni x^{h_n} \to x$ quand $n \to +\infty$. $(\widetilde{X}^{h_n},\tilde{\nu}^{h_n},\tilde{\tau}^{h_n})$ admet une extraction faiblement convergente, n_m, vers une limite $(\widetilde{X},\tilde{\nu},\tilde{\tau})$, $\widetilde{X}$ continue. En effet, la suite $(\tilde{\nu}^{h_n},\tilde{\tau}^{h_n})$ prend ses valeurs dans un compact, et

$$\widetilde{X}_t^{h_n} \ = \ x^{h_n} \ + \ \int_0^t f(\widetilde{X}_s^{h_n},\widetilde{\varphi}_s^{h_n},\widetilde{\psi}_s^{h_n})ds \ + \ M_t^{h_n} \ ,$$

où l'intégrale et M^{h_n} admettent des extractions faiblement convergentes vers des limites continues F et M, par applications de Kushner [95, Theorem 2.3.1, équations (3.3) et (3.2); Theorem 2.4.2]. En effet, pour $\varepsilon,h,s < t$ fixés > 0 :

$$E^s \parallel \int_s^t \tilde{f}^h \parallel^2 \leq \overline{f}^2 \ (t-s)^2 \ ,$$

3. Typiquement, $\mathcal{S}$ union des surfaces(,..., courbes, points) singulières de la fonction valeur (ou de son gradient), de mesure de Lebesgue r-dimensionnelle nulle.

et par inégalité de Chebycheff,

$$P^{x^h}\left(\sup_{[s,t]} \parallel M^h_\cdot - M^h_s \parallel > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E^{x^h} \sup_{[s,t]} \parallel M^h_\cdot - M^h_s \parallel^2$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E^{x^h} E^s \sup_{[s,t]} \parallel M^h_\cdot - M^h_s \parallel^2$$
$$\leq \frac{ar(t-s)\overline{\delta}^h}{\varepsilon^2 \sin(\alpha^h)}, \tag{8.9}$$

d'après (8.8).
Utilisant la représentation de Skorokhod, on peut supposer les processus approximants et limites définis sur un même espace probabilisé, vis-à-vis duquel les convergences faibles précédentes sont presque sûres (voir par exemple Kushner-Dupuis [97, Theorem 9.1.7]). Dans la suite, on raisonne ainsi presque sûrement. De plus, on renote $h_{n_m} \equiv h$, pour alléger les écritures.
Prouvons que $M \equiv 0$ et $\widetilde{X}$ absolument continue. En effet, par (8.9), on a, pour ε,h,t fixés > 0 :

$$P^{x^h}\left(\sup_{[0,t]} \parallel M^h_\cdot \parallel > \varepsilon\right) \leq \frac{art\overline{\delta}^h}{\varepsilon^2 \sin(\alpha^h)} ;$$

et on a les mêmes majorations où P^{x^h} fait place à P, probabilité sous la représentation de Skorokhod.
$(\mathcal{E}^h)_{h>0}$ étant supposée non dégénérée, on déduit alors par Borel-Cantelli l'existence d'une extraction M^{h_n} tendant vers 0, (uniformément sur tout $[0,t]$, puis, faisant varier $t \in \mathbb{N}$,) localement uniformément, P-presque sûrement.
Or, M^h tend localement uniformément vers sa limite dans D^r, continue, M. Bref, $M \equiv 0$.
De plus,

$$\widetilde{X}^h_t = x^h + \int_0^t \tilde{f}^h + M^h_t , \tag{8.10}$$

où la convergence de $\widetilde{X}^h$ vers $\widetilde{X}$ et de M^h vers $M \equiv 0$ est localement uniforme, par continuité des limites dans D^r. $\widetilde{X}$ est alors limite localement uniforme de $x + \int_0^t \tilde{f}^h$, $||\tilde{f}^h|| \leq \overline{f}$ d'où l'absolue continuité.
Il existe donc $\tilde{f} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$, telle que $\widetilde{X}_t \equiv x + \int_0^t \tilde{f}$ (voir par exemple Rudin [123, Theorem 8.18]), $\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s \equiv \int_s^t \tilde{f} \equiv \lim_{h\to 0^+} \int_s^t \tilde{f}^h$, puis par Fatou, $\forall p \in \mathcal{E}$:

$$\int_s^t \liminf_{h\to 0^+} < p,\tilde{f}^h_u > \ du \ \leq \int_s^t < p,\tilde{f}_u > \ du \ \leq \int_s^t \limsup_{h\to 0^+} < p,\tilde{f}^h_u > \ du ,$$

pour tout $s < t$, d'où en tout point de Lebesgue t commun aux trois intégrandes, i.e.[4] pour presque tout $t > 0$ [123, Theorem 8.8] :

$$\liminf_{h\to 0^+} < p,\tilde{f}^h_t > \ \leq \ < p,\tilde{f}_t > \ \leq \ \limsup_{h\to 0^+} < p,\tilde{f}^h_t > .$$

De plus, pour ε fixé positif, on a

$$\widetilde{X}^h_t \in B_\varepsilon(\widetilde{X}_t)$$

4. En effet, $\tilde{f} \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$, et $\tilde{f}^h$ mesurable, $\parallel \tilde{f}^h \parallel \leq \overline{f}$, donc $\liminf_{h\to 0^+} \tilde{f}^h, \limsup_{h\to 0^+} \tilde{f}^h \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$.

si h assez petit, d'où :

$$\begin{aligned}\inf_{y\in B_\varepsilon(\widetilde{X}_t),v\in \mathsf{V}} < p\,,f(y,\varphi(y,v),v) > \ &\leq\ \liminf_{h\to 0^+} < p\,,\tilde{f}^h_t > \\ &\leq\ < p\,,\tilde{f}_t > .\end{aligned}$$

Soit en raisonnant de même en sup :

$$\begin{aligned}\inf_{y\in B_\varepsilon(\widetilde{X}_t),v\in \mathsf{V}} < p\,,f(y,\varphi(y,v),v) > \ &\leq\ < p\,,\tilde{f}_t > \\ &\leq\ \sup_{y\in B_\varepsilon(\widetilde{X}_t),v\in \mathsf{V}} < p\,,f(y,\varphi(y,v),v) > \ ,\end{aligned}\tag{8.11}$$

pour tout $p \in \mathbb{R}^r$.
Ce qui entraîne, d'après le Théorème de séparation d'un point et d'un convexe fermé non vide dans $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$:

$$\tilde{f}_t \in \overline{\mathrm{co}}\left\{f(y,\varphi(y,v),v) \mid y \in B_\varepsilon(\widetilde{X}_t),\, v \in \mathsf{V}\right\} =: \overline{\mathrm{co}}F_\varepsilon\ . \tag{8.12}$$

Sinon, il existe en effet $p \in \mathbb{R}^r$, tel que :

$$< p,\tilde{f}_t > \ < \ < p,\overline{\mathrm{co}}F_\varepsilon > \ \leq\ \inf < p,F_\varepsilon > \ ,$$

ou

$$\sup < p,F_\varepsilon > \ \leq\ \sup < p,\overline{\mathrm{co}}F_\varepsilon > \ < \ < p,\tilde{f}_t > \ ,$$

ce qui contredit l'inégalité gauche ou droite dans (8.11). On a donc bien (8.12), pour tout $\varepsilon > 0$, c'est-à-dire $\widetilde{X} \in \mathcal{F}_\varphi(x)$.

b. Alors, sous les hypothèses supplémentaires faites sur φ, on a $\tilde{\tau} = \tau(\widetilde{X})$, et l'ensemble (compact, par compacité de $[0,t]$ et caractère fermé de $\widetilde{X}^{-1}(\mathcal{S})$) $\mathcal{T}$ des dates de $[0,t]$ (t fixé > 0) où $\widetilde{X}$ rencontre $\mathcal{S}$ est fini, disons $0 \leq t_0 < \ldots < t_n \leq t$. Sinon, il existe une suite injective convergente à valeurs dans $\mathcal{T}$, et la limite n'est pas isolée dans $\mathcal{T}$, contrairement aux hypothèses.
• Donc pour s dans [0,t] et en-dehors de $\mathcal{T}$ fini, on a $\varphi(y,v)$, puis $f(y,\varphi(y,v),v)$, continues en $(\widetilde{X}_s,v)$, pour tout v, par hypothèses supplémentaires faites sur φ.
D'où continuité $\tilde{\nu}$-presque sûre de $\mathbf{1}_{[0,t]}(s)\ f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)$ (t fixé > 0), ce qui joint à la convergence de $\tilde{\nu}^h$ vers $\tilde{\nu}$ entraîne

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{s=0}^t\int_{v\in\mathsf{V}} f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)\ \tilde{\nu}^h_s(dv)ds\ =\ \int_{s=0}^t\int_{v\in\mathsf{V}} f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)\ \tilde{\nu}_s(dv)ds\ .$$

• De plus, pour ε fixé > 0, notant

$$\mathcal{T}_\varepsilon\ \equiv\ [0,t]\setminus\bigcup_{i=0}^n\left]t_i-\frac{\varepsilon}{n+1},t_i+\frac{\varepsilon}{n+1}\right[\ ,$$

il vient :

$$\begin{aligned}&\left|\int_{s=0}^t\int_{v\in\mathsf{V}}[f(\widetilde{X}^h_s,\varphi(\widetilde{X}^h_s,v),v)-f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)]\ \tilde{\nu}^h_s(dv)ds\right| \\ &\quad\leq\ 4\overline{f}\varepsilon\ +\ \left|\int_{s\in\mathcal{T}_\varepsilon}\int_{v\in\mathsf{V}}[f(\widetilde{X}^h_s,\varphi(\widetilde{X}^h_s,v),v)-f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)]\ \tilde{\nu}^h_s(dv)ds\right|\ ,\end{aligned}$$

où la distance entre points de $\mathcal{S}$, fermé, et $\{\widetilde{X}_s\}_{s\in\mathcal{T}_\varepsilon}$, compact, disjoints, est inférieurement positivement bornée.
Donc $\varphi(y,v)$, puis $f(y,\varphi(y,v),v)$, uniformément continues au voisinage (compact, disjoint de $\mathcal{S}$: prendre les points de $\mathcal{E}$ situés à distance assez faible de $\{\widetilde{X}_s\}_{s\in\mathcal{T}_\varepsilon}$) de $\{\widetilde{X}_s\}_{s\in\mathcal{T}_\varepsilon}\times V$.
Or, sur $\mathcal{T}_\varepsilon\subseteq[0,t]$, $\widetilde{X}^h$ converge uniformément vers $\widetilde{X}$ quand $h\to 0^+$. Alors, l'intégrande converge uniformément vers 0 dans la dernière intégrale, qui converge elle-même vers 0. Il vient donc par l'inégalité précédente :

$$\limsup_{h\to 0^+}\left|\int_{s=0}^t\int_{v\in\mathsf{V}}[f(\widetilde{X}^h_s,\varphi(\widetilde{X}^h_s,v),v)-f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)]\;\tilde{\nu}^h_s(dv)ds\right| \;\leq\; 4\overline{f}\varepsilon\ ,$$

pour tout $\varepsilon>0$. Bref, on a une limite qui est nulle. Synthétisant tous ces résultats, on obtient par passage à la limite quand $h\to 0^+$ dans (8.10)

$$\widetilde{X}_t \;=\; x \;+\; \int_{s=0}^t\int_{v\in\mathsf{V}} f(\widetilde{X}_s,\varphi(\widetilde{X}_s,v),v)\tilde{\nu}_s(dv)ds,\quad \forall t\in\mathbb{R}_+\ .$$

• Et de même pour ℓ, P-presque sûrement :

$$\begin{aligned}\sup_{\{\nu\}} J^x_{\varphi,\cdot} \;&\geq\; \int_{t=0}^{\tilde{\tau}}\int_{v\in\mathsf{V}} l(\widetilde{X}_t,\varphi(\widetilde{X}_t,v),v)\;\tilde{\nu}_t(dv)dt \;+\; L(\widetilde{X}_{\tilde{\tau}})\\ &=\; \lim_{h\to 0^+}\int_{t=0}^{\tilde{\tau}^h} l(\widetilde{X}^h_t,\tilde{\varphi}^h_t,\tilde{\psi}^h_t)\;dt \;+\; L(\widetilde{X}^h_{\tilde{\tau}^h}) \;\in\; \widetilde{\mathbb{R}}\ ,\end{aligned}$$

— ou que $\tilde{\tau}=\lim_{h\to 0^+}\tau(\widetilde{X}^h)\in\mathbb{R}$, et que $\widetilde{X}^h$ converge vers sa limite continue $\widetilde{X}$, uniformément sur un segment $[0,T]$, $T>\tau$;
— ou que $\tilde{\tau}=\lim_{h\to 0^+}\tau(\widetilde{X}^h)=+\infty$, $\int_0^{\tilde{\tau}^h}\tilde{l}^h+L(\widetilde{X}^h_{\tilde{\tau}^h})$ valant alors $+\infty$ si $\tilde{\tau}^h=+\infty$, par convention, et, étant supérieur à $\underline{\ell}\tilde{\tau}^h+\underline{L}$, qui tend vers $+\infty$, sinon.
• D'où après transformation de Kruzkov (continue, bornée sur $[\underline{L},+\infty[$) ϕ, E désignant l'espérance sous la représentation de Skorokhod :

$$\begin{aligned}\sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot} \;&\geq\; E\;\lim_{h\to 0^+}\;\phi\left\{\int_0^{\tilde{\tau}^h}\tilde{\ell}^h+L(\widetilde{X}^h_{\tilde{\tau}^h})\right\}\\ &\geq\; \limsup_{h\to 0^+}\;E\phi\left\{\int_0^{\tilde{\tau}^h}\tilde{\ell}^h+L(\widetilde{X}^h_{\tilde{\tau}^h})\right\}\ ,\end{aligned}$$

par Fatou. Enfin, le passage aux représentées de Skorokhod ne change pas les espérances, donc le terme dont on prend la lim sup n'est autre que :

$$E^{x^h}\phi\left\{\int_0^{\tilde{\tau}^h}\tilde{\ell}^h+L(\widetilde{X}^h_{\tilde{\tau}^h})\right\} \;\equiv\; I^h_{\varphi^h,\psi^h}(x^h)\ .$$

c. D'après les Théorème 7.2.b et 8.2.b, il existe $h_n\to 0^+$, $\mathcal{E}^{h_n}\ni x^{h_n}\to x$ quand $n\to+\infty$, telles que :

$$\overline{V}(x) \;=\; \lim_{n\to+\infty} V^{h_n}(x^{h_n})\ ,$$

où

$$V^{h_n}(x^{h_n}) \;\leq\; V^{h_n}_{\varphi^{h_n}}(x^{h_n}) \;=\; I^{h_n}_{\varphi^{h_n},\psi^{h_n}}(x^{h_n})\ .$$

Puis, par l'extraction, n_m, mise en évidence aux points a et b :

$$\begin{aligned}\overline{V}(x) &= \lim_{m\to+\infty} V^{h_{n_m}}(x^{h_{n_m}}) \ \le\ \limsup_{m\to+\infty} V^{h_{n_m}}_{\varphi^{h_{n_m}}}(x^{h_{n_m}}) \\ &= \limsup_{m\to+\infty} I^{h_{n_m}}_{\varphi^{h_{n_m}},\psi^{h_{n_m}}}(x^{h_{n_m}}) \ \le\ \sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot}\ .\end{aligned}$$

De même, $\inf_{\{\mu\}} I^x_{\cdot,\psi} \le \underline{V}(x)$. D'où par hypothèse de point-selle relaxé (φ,ψ) en x :

$$\overline{V}(x) \ \le\ \sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot} \ \le\ \inf_{\{\mu\}} I^x_{\cdot,\psi} \ \le\ \underline{V}(x)\ .$$

d. Comme dans Kushner [96, Theorems 2.1 et 2.2 p. 49 et 50] (mais en utilisant de surcroît comme en c, dans le contexte discontinu qui est le nôtre, les Hypothèses de régularité du b sur φ et analogues sur ψ), il existe en effet, sous ces Hypothèses d'unicité supplémentaires, une suite maximisante sur $\{\nu\}$ de contrôleurs déterministes et constants par morceaux (*chatter*), et résultat analogue sur ψ. Donc,

$$\sup_{\mathcal{V}} I^x_{\varphi,\cdot} \ =\ \sup_{\{\nu\}} I^x_{\varphi,\cdot}\ , \qquad \inf_{\mathcal{U}} I^x_{\cdot,\psi} \ =\ \inf_{\{\mu\}} I^x_{\cdot,\psi}\ .$$

Ainsi, (φ,ψ) est point-selle relaxé, et on n'a plus qu'à appliquer c.

□

Conjecture 8.18 *Hypothèses générales du Théorème 8.15. On a alors les résultats du b, en faisant uniquement l'hypothèse supplémentaire alternative sur φ: continuité par rapport à $y^x(\cdot)$ de*

$$D^r \times V \ \ni\ (y^x(\cdot),v) \ \mapsto\ (f,l)\,(y^x(\cdot),\varphi[y^x(\cdot),v],v) \ \in\ D^{r+1}\ ,$$

en tout $y^x(\cdot) \in \mathcal{F}_\varphi(x)$, uniforme par rapport à $v \in V$.

Preuve (Idée) Voir Kushner-Dupuis [97, p. 277].

□

Chapitre 9

Résolutions numériques

9.1 Algorithmes

Étant donnés un jeu $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{E} \equiv \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$ (, une dilatation ε sur la cible en poursuite évasion ou une pénalité Lagrangienne ε en distance minimum écrétée inférieurement au niveau $-R$, R constante fixée > 0,) et une grille étoilée non dégénérée $\mathcal{E}^h$ sur $\mathcal{E}$, h fixé > 0, il existe plusieurs algorithmes pour résoudre numériquement les équations de programmation dynamique discrète, $\mathcal{I}^h_{(\varepsilon)}$ — systèmes algébriques infinis qui se décomposent en une équation par nœud de la grille dénombrable $\mathcal{E}^h$. Une étape préliminaire à la résolution consiste donc en la localisation à une fenêtre bornée suffisament grande autour d'un point d'intérêt, moyennant l'introduction de conditions aux bords appropriées. Dans les exemples ci-dessous, on choisit classiquement de remplacer par des transitions invariantes les transitions qui mèneraient à un état extérieur au domaine de résolution. Ainsi, on peut espérer — on ne mènera pas ici l'analyse — que la localisation ne perturbe pas trop la solution, sauf peut-être aux bords de la fenêtre de calcul. De même, on utilise des ensembles de contrôles discrétisés U^h,V^h. Oublions les ε, pour alléger les notations. Ainsi on est ramené à résoudre numériquement des équations au point-fixe, du type :

$$V^h = \max_{v \in \mathsf{V}^h} \min_{u \in \mathsf{U}^h} \mathcal{R}^h V^h, \tag{9.1}$$

où V^h désigne une fonction définie sur un maillage fini $\mathcal{F}^h$.

Un premier algorithme possible pour résoudre l'équation au point-fixe (9.1) est l'algorithme de Shapley, ou *itération sur les valeurs*, consistant à reprendre numériquement l'itération de Picard (localisée) déjà utilisée dans la Preuve de la Proposition 6.11.d :

$$V^h_{n+1} \quad = \quad \max_{v \in \mathsf{V}^h} \min_{u \in \mathsf{U}^h} \mathcal{R}^h V^h_n \ ,$$

au départ d'une fonction réelle V^h_0 arbitraire sur $\mathcal{F}^h$. Il s'agit d'une méthode de gradient simple, sans conjugaison ni préconditionnement (Filar-Raghavan [75]). La convergence est lente.

On peut aussi utiliser l'algorithme de Hoffman-Karp, ou *itération sur les politiques*, qui consiste en la résolution itérative de systèmes linéaires sur $\mathcal{F}^h$:

$$V^h_{n+1}(x) = \mathcal{R}^h V^h_{n+1}(x,\underline{u}_n(x),\overline{v}_n(x)) \ , \tag{9.2}$$

où

$$\mathcal{R}^h V^h_n(x,\underline{u}_n(x),\overline{v}_n(x)) = \max_{v \in \mathsf{V}^h} \min_{u \in \mathsf{U}^h} \mathcal{R}^h V^h_n(x,u,v)$$

— toujours au départ d'une fonction réelle V^h_0 arbitraire sur $\mathcal{F}^h$. Il s'agit cette fois d'un algorithme de type Newton-Raphson (Filar-Raghavan [75]). La convergence de ce deuxième algorithme n'est pas garantie. On sait seulement que la seule limite possible est la valeur V^h recherchée. En pratique, la convergence survient alors plus rapidement qu'avec la méthode de gradient.

Il existe enfin plusieurs autres algorithmes (*e.g.* méthode du simplexe, voir Kushner-Dupuis [97]), ou techniques d'accélérations (*e.g.* méthode de la convergence monotone de Falcone, voir Bardi *et al.* [8]).

9.2 Annulations de la dynamique

Comme annoncé au Commentaire 3.3.d, l'extension d'état pour pallier les cas où f s'annule n'entraîne pas d'augmentation de la dimension sur le plan de la résolution numérique.

Explicitons en effet l'équation $\mathcal{I}^h$ pour le jeu étendu, discrétisé sur $h\mathbb{N} \times \mathcal{E}^h$:

$$V^h(t,x) \;=\; \begin{cases} \max_{v\in \mathsf{V}} \min_{u\in \mathsf{U}} \hat{k} + \hat{\beta} E V^h(t,x,u,v) & \text{si } x \in \Omega \text{ ,} S(x) \text{ sinon} \quad (pe) \\ S(x) \bigwedge \max_{v\in \mathsf{V}} \min_{u\in \mathsf{U}} \hat{k} + \hat{\beta} E V^h(t,x,u,v) & \text{si } x \in \Omega \equiv \mathcal{E}^h \quad (cm) \end{cases} ,$$

où

$$\Delta t^h(t,x,u,v) \;=\; \frac{h}{1+h(\sum_{y\in\mathcal{V}^h(x)} f^y(x,u,v))} \;,\quad \hat{k} \;\equiv\; \frac{l\Delta t^h}{1+l\Delta t^h} \;,\quad \hat{\beta} \;\equiv\; \frac{1}{1+l\Delta t^h} \;,$$

$$\begin{aligned} & EV^h(t,x,u,v) \\ &= \Delta t^h(t,x,u,v) \sum_{y\in\mathcal{V}^h(x)} f^y(x,u,v) V^h(t,y) \;+\; \frac{1}{1+h(\sum_{y\in\mathcal{V}^h(x)} f^y(x,u,v))} V^h(t+h,x) \;, \end{aligned}$$

qui ne dépendent de t que via la solution V^h. Celle-ci est donc stationnaire, et on rabaisse la dimension du système en faisant a posteriori $V^h \equiv V^h(x)$ dans les équations précédentes. Enfin, on peut vérifier qu'un maillage de la forme $h\mathbb{N} \times \mathcal{E}^h$ sur $\mathbb{R}^{r+1}$, est étoilé, resp. non dégénéré, resp. resp. une famille de tels maillages pour $h > 0$ est non dégénérée, si et seulement si on a les propriétés équivalentes pour $\mathcal{E}^h$ sur $\mathbb{R}^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$).

9.3 Retour sur le problème du servomécanisme

Dans cette section, on rend compte d'expériences numériques relatives au problème de servo-mécanisme résolu analytiquement au Chapitre 4, en poursuite évasion comme en distance minimum. Dans l'expérience qui suit, nous avons utilisé les valeurs des paramètres $(\alpha,\beta,\gamma) = (3,2,5)$, $p = \beta\gamma/\alpha^2 > 1$; une fenêtre de localisation de taille 20×20 centrée à l'origine des coordonnées; une grille $\mathcal{F}^h$ de 300×300 nœuds répartis suivant un maillage carré de cette fenêtre; et des ensembles de contrôles discrétisés comportant cinq valeurs.[1] On a procédé par itération sur les politiques, en appliquant les critères de convergence suivants :

— pour tout contrôle fixé, les systèmes linéaires (9.2) ont été résolus en utilisant les itérations de Picard jusqu'à une erreur (différence des résultats obtenus entre deux itérations successives) au plus égale à 10^{-5} ;

— puis des itérations sur les contrôles ont été effectuées jusqu'à ce qu'une erreur sur les points-fixes inférieure à 10^{-4} ait été atteinte.

1. On a réalisé des expériences avec plus de contrôles sans améliorer la précision des résultats. Ce n'est pas surprenant, les contrôles optimaux étant de type *bang bang* (voir Kushner-Dupuis [97]).

9.3.1 Jeu de poursuite évasion

La Figure 9.1 montre la valeur $\widehat{V}_\varepsilon^h$ obtenue numériquement pour une faible valeur de ε, après une centaine d'itérations sur les politiques (le nombre d'itérations requis pour obtenir la stabilisation de l'algorithme). Les résultats sont présentés sous forme de courbes de niveaux. Les courbes de niveaux inférieurs à 0.9 sont représentées en dégradés de rouge, et celles de niveaux plus élevés sont en dégradés de vert. La lentille visible sur cette Figure est la zone $\{x \mid \widehat{V}_\varepsilon^h(x) \geq 0.9\}$, qui donne une idée de la zone d'évasion. L'existence et la forme générale de cette zone d'évasion sont cohérents avec les résultats analytiques obtenus pour ce jeu par Bernhard et Masle (voir [29, 110] et §4.2).

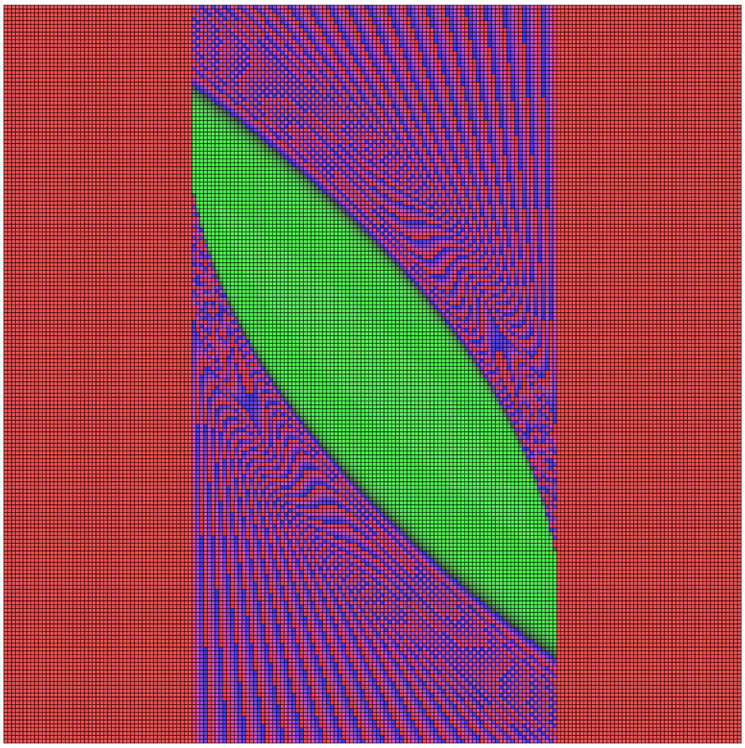


FIG. 9.1 – Courbes de niveau pour le jeu de poursuite évasion

9.3.2 Jeu en distance minimum

La Figure 9.2 montre la valeur transformée $\widehat{V}_\varepsilon^h$ obtenue numériquement pour une faible valeur de ε (à nouveau après une centaine d'itérations sur les politiques) : les courbes de niveau négatif sont représentées en dégradés de vert, et celles de niveau positif sont en dégradés de rouge. Ces résultats numériques sont cohérents avec l'étude théorique du §4.3, sauf dans les coins Nord-Est et Sud-Ouest de la fenêtre, où les effets de bords semblent importants. On distingue bien le champ de trajectoires optimales déterminé au §4.3. L'*oppidum* qui devrait séparer les champs de trajectoires optimales est clairement visible (il correspond sur la Figure à la lentille interne dont seul le bord supérieur est bien formé). $\widehat{V}_\varepsilon^h$ varie peu et est maximum dans cette approximation de l'*oppidum*, conformément aux résultats analytiques pour V.

Les courbes de niveaux sont bien resserrées autour de la bordure de la zone d'évasion $\{x \mid \widehat{V}_\varepsilon^h(x) > 0\}$. La détermination de cette zone est donc robuste numériquement.

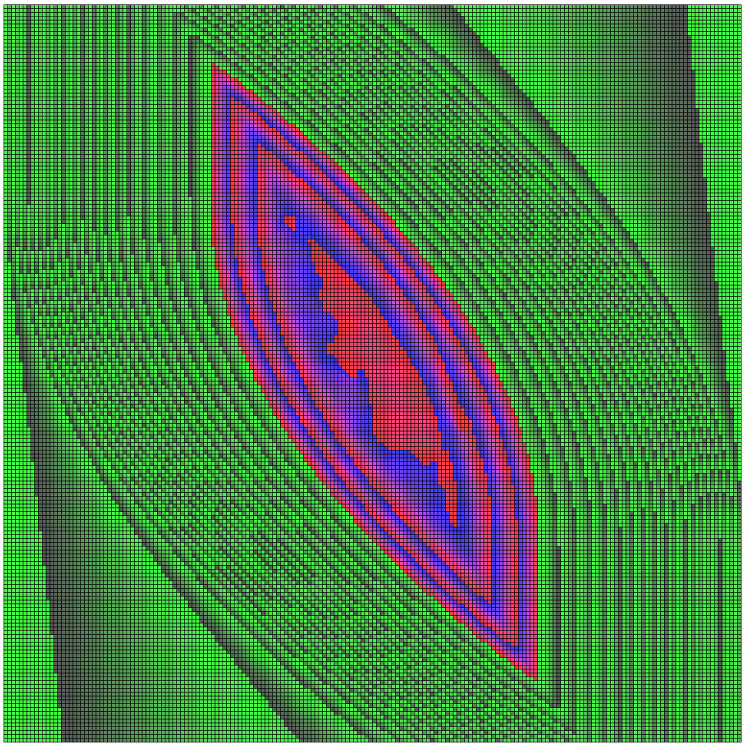


FIG. 9.2 – Courbes de niveau pour le jeu en distance minimum

Chapitre 10

Conclusion

Les solutions de viscosité procurent deux points de vue complémentaires sur les jeux de poursuite évasion. L'équation d'Isaacs associée au jeu quantitatif permet d'explorer le temps de capture, tandis qu'une inéquation variationnelle associée au jeu qualitatif est un moyen efficace pour étudier la barrière — au prix de la résolution préalable d'un problème de temps minimum pour calculer la distance orientée à la cible, si celle-ci n'est pas connue explicitement.

Les deux approches permettent de construire des fonctions valeurs, dans l'esprit de la théorie des jeux dynamiques de Isaacs-Breakwell-Bernhard, et peuvent être appréhendées numériquement à l'aide d'un même schéma par différences finies, doublement (à cause des discontinuités des fonctions valeurs) indexé par les paramètres h (le pas de discrétisation) et ε (une dilatation de la cible dans le jeu quantitatif et une pénalité sur le temps écoulé dans le jeu qualitatif). Des expériences numériques pratiquées sur un exemple résolu analytiquement suggèrent que ce schéma conduit à de bons résultats, même si ceci gagnerait à être approfondi, et vérifié sur d'autres exemples.

Ce schéma par jeux à différences finies, adapté de Kushner [95] par Pourtallier et Tidball [115], relève du cadre abstrait général défini par Barles et Souganidis [17], également considéré dans Bardi *et al.* [8, 11]. Il se pose en concurrence à plusieurs autres approches pour résoudre numériquement les jeux différentiels : par approximation d'Euler de la dynamique (Bardi, Bottacin, Capuzzo-Dolcetta, Falcone et Soravia [12, 10, 8, 125, 11]), dans le cadre de la théorie de la viabilité (Cardaliaguet, Quincampoix et Saint-Pierre [47, 48, 49]) ou des solutions minimax d'*edp* (Krassovski, Subbotin et Tarasyev, [93, 128, 130, 129]). Notons que dans le cadre le plus simple des jeux différentiels de poursuite évasion ayant pour critère le temps de capture (cadre qui se trouve dans l'intersection des champs couverts par les diverses théories précédentes), les objets calculés dans ces diverses approches sont en fait les mêmes, à savoir en termes de solutions de viscosité d'*edp*, la solution enveloppe du jeu, minimum des sur-solutions de viscosité de l'équation d'Isaacs du jeu non négatives sur le bord de la cible.

Troisième partie

Évaluation et couverture de produits dérivés — *Benchmark* de schémas numériques par différences ou éléments finis

Cette Partie rend compte d'expériences numériques permettant de comparer plusieurs schémas numériques d'équations aux dérivées partielles (*edp*) par différences ou éléments finis pour évaluer des produits dérivés de la finance, ou leurs sensibilités par rapport à divers paramètres d'intérêt. Ces sensibilités, ou *Grecs*, interviennent en effet dans les calculs de couverture. Ce *benchmark* numérique nous fournit également l'occasion d'exposer de nombreuses techniques mathématiques d'*edp* pour aborder ces problèmes d'estimation ou de couverture.

Cette recherche a été développée à partir des travaux réalisés dans le cadre d'un "Stage industriel pour doctorant INRIA" à la CAR (Caisse Autonome de Refinancement, Groupe Caisse des Dépots, Paris), sous la direction de Pierre-Louis Lions (consultant à la CAR, Professeur à l'Université Paris IX), en collaboration avec Éric Fournié (alors ingénieur financier à la CAR et PAST au laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI). Les méthodes d'éléments finis présentées à titre de comparaison sont dues à Jérôme Busca. On a en outre bénéficié d'utiles discussions avec les autres permanents et consultants de la CAR, en particulier Henri Berestycki et Nicole El Karoui. Merci enfin à Fawz Slougui pour son travail de programmation sur les barrières courbes.

Chapitre 1

Introduction

Les méthodes d'évaluation et de couverture des produits dérivés de la finance sont principalement des techniques de Monte-Carlo (voir par exemple Lapeyre-Pardoux-Sentis [101]), d'une part, et d'autre part des techniques d'arbres. Comme on le mettra clairement en évidence au §3.2, ces dernières peuvent être vues comme des schémas de résolution par différences finies explicites pour les *edp* des produits dérivés — équations *backward* de Kolmogorov, paraboliques du deuxième ordre (problèmes européens), ou comportant de plus un obstacle (problèmes américains).

Sur le plan numérique, la présence d'un terme du deuxième ordre incite à utiliser des schémas comportant une part implicite. Le coût de calcul supplémentaire qui en résulte n'est pas nécessairement justifié sur des problèmes excessivement réguliers — par exemple un *call* européen dans le modèle de Black-Scholes. Nous vérifierons cependant, lors des expérimentations numériques, que l'adoption de tels schémas s'impose en effet pour résoudre des problèmes plus compliqués, non linéaires notamment.

Systématisant ce point de vue, nous mettons en œuvre dans ce travail un certain nombre de schémas numériques pour des problèmes de référence :
— l'évaluation d'un *call* européen (§4.1);
— l'évaluation d'un *call* européen à barrière (éventuellement courbe) *up out* (§4.2) ;
— le calcul de la frontière d'exercice d'un *put* américain (§4.3) ;
— l'évaluation d'une digitale (§4.4) ;
— l'évaluation d'un *call* européen dans un modèle de Black-Scholes à volatilité stochastique (§4.5).

À travers ces exemples, notre propos dans cette Partie est de faire percevoir l'étendue et la diversité des situations rencontrées et des réponses possibles. Il ne s'agit donc pas de traiter dans leur totalité les problèmes mathématiques sous-jacents. Ceux-ci appelleraient en effet un investissement dépassant l'objectif ici poursuivi. De manière précise, le but de cette étude est double.

D'une part, on cherche à former un dictionnaire des schémas numériques à utiliser en fonction du problème considéré, à l'aide d'un *benchmark* numérique en précision. Ainsi, on fixe une taille de maillage, par exemple 5000 nœuds à répartir de façon optimale sur le domaine localisé choisi pour la résolution numérique en fonction du problème et du type de schéma utilisé. On compare alors les meilleurs résultats obtenus à l'aide de divers schémas numériques sur des maillages de cette taille. La taille de maillage utilisée sur un problème donné résulte d'un compromis à trouver entre le volume des calculs et les impératifs de précision fournis par les marchés : par exemple, obtenir une erreur relative inférieure au pour cent sur le problème (unidimensionnel, le plus régulier) de l'évaluation du *call* européen, tandis que les calculs correspondants doivent être menés en temps réel

— quelques secondes maximum. On s'efforce en pratique de ne pas dépasser une centaine de points de discrétisation dans chaque direction de temps ou d'espace.

D'autre part, on souhaite sensibiliser les utilisateurs d'arbres à l'approche par *edp* (voir notamment le Chapitre 5, évaluation par *edp* d'un *put* asiatique, européen ou américain). La prise en compte à l'intérieur des technologies d'arbres de méthodes d'*edp* représente en effet une réelle valeur ajoutée dans le domaine de l'évaluation et de la couverture des produits dérivés. En Conclusion, nous verrons sur un exemple comment ceci peut se faire en restant dans le cadre des arbres.

Chapitre 2

Présentation du solveur numérique SNOOΠ

2.1 Différences et éléments finis

Évoquons pour commencer la question de l'éventuelle utilisation de codes d'éléments finis, potentiellement plus puissants que les différences finies qui tournent le plus souvent sur les salles de marchés (en général sous la forme d'arbres), — et constituent elles-mêmes un cas, très particulier, d'éléments finis. Une première remarque générale à ce sujet est que les différences finies sont nettement plus simples à implémenter que les éléments finis, et non moins efficaces sur domaines rectangulaires. Rappelons ensuite que les différences finies sont a priori plus naturelles que les éléments finis pour les équations elliptiques ou paraboliques (au sens de la théorie des solutions de viscosité [59], comme ce sera désormais par défaut le cas dans ce travail) qu'on rencontre en finance. En effet, ces équations satisfont des principes du maximum, et non des principes de conservation dont la version discrétisée s'exprimerait naturellement en termes d'éléments finis. Par conséquent, on utilisera surtout des différences finies.

Cependant, dans certains problèmes, par exemple celui de l'option à barrière courbe du §4.2, ou de la frontière d'exercice du *put* américain du §4.3, la présence de domaines à bords courbes conduit à envisager des schémas d'éléments finis. En effet, la gestion des bords courbes est naturelle en éléments finis, tandis qu'elle donne lieu à un travail d'adaptation spécifique si l'on procède par différences finies. Un autre intérêt des éléments finis est de permettre une meilleure appréhension des termes de dérivées croisées, en dimension supérieure à un. Les méthodes d'éléments finis utilisées dans ce travail sont dues à Jerôme Busca [43].

Pour les résolutions numériques par différences finies, on a utilisé (et enrichi) le Solveur Numérique Orienté Objet SNOOΠ de la CAR, développé ces dernières années sur les bases d'un partenariat scientifique avec le projet Omega de l'INRIA Sophia Antipolis. Ce solveur a fait l'objet de plusieurs notes techniques, dont une description récente [55, 25]. Il permet de factoriser la discrétisation par différences finies de plusieurs équations de même opérateur, quelles que soient leurs conditions limites ou aux bords, ou d'éventuels termes sources, en dimension un, deux ou trois d'espace, plus la dimension de temps.

2.2 Résolution numérique des problèmes paraboliques

D'une manière générale, soit à résoudre numériquement un problème parabolique, supposé bien posé dans un espace fonctionnel approprié — pouvant dépendre de la régularité des conditions aux limites ou des conditions aux bords du problème considéré.

Le choix d'une méthode numérique par *edp* pour ce problème se décompose en trois étapes successives :

a. on transforme le problème à résoudre, par changements de variables, de fonctions inconnues, ou de lois de probabilité (i.e. modification de l'état du système par ajout ou retrait de certaines variables) ; on choisit également un type de maillage, à incréments constants dans un jeu de variables ou dans un autre ;
b. on choisit un compact sur lequel on localise le problème initialement posé dans tout l'espace ;
c. on choisit un schéma numérique, et on introduit des conditions appropriées aux bords du domaine localisé.

On résout alors numériquement sur tout le maillage.

Introduisons maintenant un modèle sur lequel nous illustrerons ensuite ces différents points, tels que SNOOΠ permet de les implémenter. Il s'agit du très classique *modèle de Black-Scholes* [36]. Ce modèle servira également de cadre à bon nombre de nos expériences numériques. On y dispose en effet de nombreuses formules explicites, — du moins dans le cas européen, — permettant de valider les résultats numériques.

2.3 Modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes [36] est un modèle d'option à un actif sous-jacent représenté par une diffusion lognormale :

$$dS_s = S_s(rds + \sigma\, dW_s), \quad s > t \ ; \quad S_t = S \ . \tag{2.1}$$

Dans (2.1), les constantes $\sigma > 0$ et $r \geq 0$ désignent respectivement la volatilité du sous-jacent sous la *probabilité risque-neutre* P [101, 69], et le taux court de l'économie. Ils sont dans ce travail supposés constants, pour alléger les notations, mais les résultats se généralisent aisément au cas où ils dépendent de manière déterministe du temps. W désigne le Brownien standard sous P, initialisé à 0 en t. Dans toute cette partie de thèse, on suppose les hypothèses habituelles (même si grossièrement irréalistes) de marchés financiers liquides, sans opportunité d'arbitrage et parfaits [69]. D'où notamment l'existence de la probabilité risque-neutre P.

De manière équivalente, on a affaire à une diffusion de générateur infinitésimal sous P :

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} := \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{S^2} + rS\partial_S. \tag{2.2}$$

On introduit aussi l'équation de Kolmogorov en temps rétrograde, parabolique du deuxième ordre en la fonction générique $\Pi(t,S)$, dite *équation de Black-Scholes* :

$$\partial_t \Pi + \mathcal{L}_{\mathcal{S}}\Pi = r\Pi \ . \tag{2.3}$$

Pour toute échéance T, et condition terminale φ, on a alors le problème de Cauchy, respectivement l'inéquation variationnelle associée à l'obstacle φ, sur $]-\infty,T] \times \mathbb{R}_+^\star$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \Pi + \mathcal{L}_{\mathcal{S}}\Pi &=& r\Pi \ , \quad t < T \\ \Pi(T,S) &=& \varphi(S) \ , \end{array} \right. \tag{2.4}$$

respectivement

$$\left\{ \begin{array}{c} -\partial_t \Pi - \mathcal{L}_{\mathcal{S}}\Pi + r\Pi \bigwedge \Pi - \varphi \ = \ 0, \, t < T \\ \Pi(T,S) = \varphi(S) \ . \end{array} \right. \tag{2.5}$$

Le sens dans lequel on recherche la solution dépend du problème considéré et de la régularité de φ ; typiquement, on aura affaire à des solutions de viscosité, uniques à vérifier des conditions de croissance en S analogues à celle de φ, classiques avant T dans le cas de l'équation. On n'approfondira pas davantage cet aspect dans le présent travail.

On admettra donc que le problème est bien posé, et que par la *formule de Feynman-Kac* dans le cas de l'équation [93, p.366], ou un résultat analogue pour l'inéquation [24, 91, 108], la solution (dans un sens qui resterait donc à préciser) Π de (2.4), respectivement (2.5), admet la représentation probabiliste suivante :

$$\Pi(t,S) = e^{-r(T-t)} E_P^{t,S} \varphi(S_T) \ , \tag{2.6}$$

respectivement

$$\Pi(t,S) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{[t,T]}} E_P^{t,S} e^{-r(\tau-t)} \varphi(S_\tau) \ , \tag{2.7}$$

où P désigne toujours la probabilité risque-neutre, sous laquelle le sous-jacent suit la loi (2.1), et $\mathcal{T}_{[t,T]}$ désigne l'ensemble des temps d'arrêt à valeurs dans l'intervalle $[t,T]$.

On reconnaît alors en (2.6) et (2.7), lorsque t et S varient, les solutions respectives des problèmes européens et américains associés à la condition terminale ou obstacle φ — fonction de gain, ou l'une des ses dérivées successives, dites *Grecs*. Pour calculer la solution de ces problèmes numériquement, on peut utiliser :
— soit des méthodes trajectorielles de type Monte-Carlo, fondées sur les représentations probabilistes (2.6), (2.7) ;
— soit des techniques de calcul par *edp*, comme dans le présent travail.

Dans le cas européen, on peut valider les résultats obtenus numériquement à l'aide de nombreuses formules explicites disponibles dans le modèle de Black-Scholes. En revanche, même dans le cadre élémentaire de ce modèle, on ne dispose plus de formules explicites dans le cas américain, non linéaire, beaucoup plus difficile. Les méthodes numériques sont alors les seules à pouvoir apporter des éléments de solution.

Ajoutons que les techniques de calcul par *edp* sont les seules disponibles de façon standard sur les problèmes américains, pour lesquels les méthodes de Monte-Carlo relèvent encore de la recherche.

Enfin, si le temps de calcul par *edp*, respectivement Monte-Carlo, croît de manière exponentielle, respectivement linéaire, avec la dimension d'espace, en revanche on évalue souvent mieux les vitesses de convergence (dont diverses constantes en jeu) par *edp* que par Monte-Carlo, où la convergence devient en fait souvent excessivement lente quand croît la dimension. On préférera donc souvent une méthode par *edp*, lorsqu'elle n'est pas exclue d'emblée par la dimension du problème, et qu'on a pu prouver la stabilité et évaluer la vitesse de convergence.

Sauf mention spéciale, les Chapitres suivants se placent dans le cadre du modèle de Black-Scholes unidimensionnel précédent. On dispose alors de nombreuses formules explicites, — du moins dans le cas européen, — qui permettent de valider les résultats d'expériences numériques. Pour plus de clarté, on a regroupé ces formules en Annexe C.

Illustrons maintenant sur ce modèle les points a, b et c du §2.2, tels que SNOOΠ permet de les implémenter.

Chapitre 3

Méthodes numériques

3.1 Transformations du problème

3.1.1 Changements de variables

SNOOΠ propose trois changements de variables classiques pour les équations de type Black-Scholes.

Changement de variables logarithmique

Le premier changement de variables, dit *logarithmique*, est le suivant, pour toute fonction Π :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \ln(S)\ ,\ \check{\Pi}(t,y) = \Pi(t,S) \\ \partial_t \Pi = \partial_t \check{\Pi}\ ,\ S\partial_S \Pi = \partial_y \check{\Pi}\ ,\ S^2 \partial^2_{S^2} \Pi = \partial^2_{y^2} \check{\Pi} - \partial_y \check{\Pi}\ . \end{array} \right. \tag{3.1}$$

À titre d'illustration, l'équation de Black-Scholes (2.3) se réécrit en variables logarithmiques, par application des formules (3.1) :

$$\partial_t \check{\Pi} + \mathcal{L}_y \check{\Pi} = r \check{\Pi}\ , \tag{3.2}$$

où

$$\mathcal{L}_y := \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{y^2} + (r - \frac{\sigma^2}{2})\partial_y\ . \tag{3.3}$$

On remarque que l'opérateur $\mathcal{L}_y$ est elliptique (non dégénéré), tandis que $\mathcal{L}_S$ est dégénéré en $S = 0$. La condition terminale ou l'obstacle du problème (2.4) ou (2.5) devient pour sa part :

$$\check{\varphi}(y) := \varphi(e^y)\ .$$

Changement de variables centrant

Le deuxième changement de variables, dit *centrant* en (t_0,S_0), s'écrit ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \frac{S}{S_0} e^{-r(t-t_0)}\ ,\ \hat{\Pi}(t,x) = \Pi(t,S) \\ \partial_t \Pi = \partial_t \hat{\Pi} - rx\partial_x \hat{\Pi}\ ,\ S\partial_S \Pi = x\partial_x \hat{\Pi}\ ,\ S^2 \partial^2_{S^2} \Pi = x^2 \partial^2_{x^2} \hat{\Pi}\ . \end{array} \right. \tag{3.4}$$

$(t_0,S_0 := S_{t_0})$ désigne une phase où la valeur de la solution de (2.4) ou (2.5) présente un intérêt particulier, — typiquement "la monnaie aujourd'hui", — par rapport à laquelle on localise le domaine de résolution.

Ainsi, l'équation de Black-Scholes (2.3) se réécrit en variables centrées :

$$\partial_t \breve{\Pi} + \mathcal{L}_x \breve{\Pi} = r\breve{\Pi} \ , \tag{3.5}$$

où

$$\mathcal{L}_x := \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{x^2} \ . \tag{3.6}$$

L'opérateur de diffusion ne comporte plus de terme de premier ordre en variables centrées, d'où leur dénomination. La condition terminale ou l'obstacle du problème (2.4) ou (2.5) devient pour sa part :

$$\hat{\varphi}(t,x) := \varphi(xS_0 e^{r(t-t_0)}) \ .$$

Passage à l'équation de la chaleur

En combinant les changements de variables précédents, on obtient le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} z = \ln(\frac{S}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(t - t_0) \ , \ \breve{\Pi}(t,z) = \Pi(t,S) \\ \partial_t \Pi = \partial_t \breve{\Pi} + (\frac{\sigma^2}{2} - r)\partial_z \breve{\Pi} \ , \ S\partial_S \Pi = \partial_z \breve{\Pi} \ , \ S^2 \partial^2_{S^2} \Pi = \partial^2_{z^2} \breve{\Pi} - \partial_z \breve{\Pi} \ . \end{array} \right. \tag{3.7}$$

L'équation de Black-Scholes (2.3) se réécrit dans ces nouvelles variables, qu'on qualifiera de *réduites* :

$$\partial_t \breve{\Pi} + \mathcal{L}_z \breve{\Pi} = r\breve{\Pi} \ , \tag{3.8}$$

où

$$\mathcal{L}_z := \frac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{z^2} \ . \tag{3.9}$$

On obtient l'équation de la chaleur en temps rétrograde, continûment actualisée au taux r. Les conditions terminales ou l'obstacle des problèmes (2.4) et (2.5) deviennent alors :

$$\breve{\varphi}(t,z) := \varphi \left\{ S_0 \exp[z - (\frac{\sigma^2}{2} - r)(t - t_0)] \right\} \ .$$

Autres changements de variables

Les changements de variables précédents ne sont pas les seules transformations permettant de ramener la diffusion lognormale (2.1) à une martingale lognormale, ou à l'équation de la chaleur. On a indiqué ci-dessus les transformations les plus classiques. Voici par exemple un autre changement de variables permettant de se ramener à une martingale lognormale :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} M & \equiv & S^\gamma \\ \gamma M \partial_M & \equiv & S\partial_S \\ \gamma^2 M \partial_M + \gamma^2 M^2 \partial^2_{M^2} & \equiv & S^2 \partial^2_{S^2} + \gamma M \partial_M \ , \end{array} \right. \tag{3.10}$$

où γ désigne la quantité $1 - \frac{2r}{\sigma^2}$, supposée différente de 0, faute de quoi l'équation en variables logarithmiques est, en prime, centrée. On obtient à l'issue d'un calcul élémentaire :

$$\mathcal{L}_M \equiv \frac{\gamma^2 \sigma^2}{2} M^2 \partial_{M^2} \ .$$

Pour distinguer ce changement de variables du changement de variables centrant (3.4), on le qualifiera de *stationnaire* ; il est en effet indépendant du temps.

3.1.2 Changements d'inconnues

On présente maintenant un changement de fonctions inconnues, alternative à un changement de variables précédent pour se ramener à l'équation de la chaleur.

Illustrons cette technique sur le problème suivant — auquel nous reviendrons au §4.2 à propos de l'évaluation d'un *call* à barrière courbe, — exprimé en variables centrées (3.4) :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t\hat{\Pi} + \mathcal{L}_x\hat{\Pi} = r\hat{\Pi}\ ;\ t < T, \quad x \leq H_t := \frac{H}{H_0}e^{-r(t-t_0)} \\ \hat{\Pi}(T,x) = (xS_0\exp(r(T-t_0)) - K)^+ =: \hat{\varphi}_K(x) \\ \hat{\Pi}(t,H_t) = 0\ . \end{array}\right. \tag{3.11}$$

La transformation envisagée pour ce problème correspond à un changement de variables logarithmique à partir de la variable x :

$$\left\{\begin{array}{lll} y = \ln(x), & \check{\Pi}(t,y) = \hat{\Pi}(t,x), & \check{\varphi}_K(y) = \hat{\varphi}_K(x) \\ \partial_t\hat{\Pi} = \partial_t\check{\Pi}, & x\partial_x\hat{\Pi} = \partial_y\check{\Pi}, & x^2\partial^2_{x^2}\hat{\Pi} = \partial^2_{y^2}\check{\Pi} - \partial_y\check{\Pi}\ , \end{array}\right.$$

suivi du changement de fonction inconnue suivant, paramétré par α et ρ:

$$\tilde{\Pi}(t,y) := \check{\Pi}(t,y)e^{\alpha y - \rho(t-T)}\ .$$

D'où :

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t\tilde{\Pi} = (\partial_t\check{\Pi} - \rho\check{\Pi})e^{\alpha y-\rho(t-T)} \\ \partial_y\tilde{\Pi} = (\alpha\check{\Pi} + \partial_y\check{\Pi})e^{\alpha y-\rho(t-T)} \\ \partial^2_{y^2}\tilde{\Pi} = (\alpha^2\check{\Pi} + 2\alpha\partial_y\check{\Pi} + \partial^2_{y^2}\check{\Pi})e^{\alpha y-\rho(t-T)}\ , \end{array}\right. \tag{3.12}$$

puis :

$$\begin{array}{ll} & \partial_t\tilde{\Pi} + \dfrac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\tilde{\Pi} \\ = & (\partial_t\check{\Pi} - \rho\check{\Pi} + \dfrac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\check{\Pi} + \dfrac{\sigma^2}{2}(2\alpha\partial_y\check{\Pi} + \alpha^2\check{\Pi}))e^{\alpha y-\rho(t-T)}\ . \end{array}$$

Fixons α et ρ tels que :

$$\sigma^2\alpha = -\frac{\sigma^2}{2} \quad , \quad \rho - \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} = r\ ,$$

c'est-à-dire :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad , \quad \rho = r + \frac{\sigma^2\alpha^2}{2} = r + \frac{\sigma^2}{8}\ . \tag{3.13}$$

On obtient alors le problème suivant pour $\tilde{\Pi}$:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t\tilde{\Pi} + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\tilde{\Pi} = 0\ ;\ t < T, \quad y \leq h_t := \ln(H_t) = \ln(\frac{H}{S_0}) - r(t-t_0) \\ \tilde{\Pi}(T,y) = \tilde{\varphi}_K(y) := \hat{\varphi}_K(e^y)e^{-\frac{y}{2}} \\ \tilde{\Pi}(t,h_t) = 0\ . \end{array}\right. \tag{3.14}$$

Dans ce problème, on est ramené à l'équation de la chaleur.

3.1.3 Changements de probabilité — une version *edp* du Théorème de Girsanov

La Proposition suivante est un avatar d'une remarque de Krylov en contrôle optimal [94]. Elle illustre une transformation de l'*edp*, qui correspond (voir commentaires après la Preuve de la Proposition) à un changement de probabilités dans les processus stochastiques sous-jacents.

Proposition 3.1 *Soient u et v, respectivement supposées solutions uniques*[1] *de*

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t u + \frac{\sigma^2(x)}{2}\partial^2_{x^2} u + \mu\sigma(x)\partial_x u = 0 \ , \ t < T \\ u(T,x) = \varphi(x) \ , \end{array}\right.$$

et

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t v + \frac{\sigma^2(x)}{2}\partial^2_{x^2} v + \frac{\nu^2}{2} y^2 \partial^2_{y^2} v + \sigma(x)\mu y \partial^2_{yx} v = 0 \ , \ t < T \\ v(T,x,y) = y\varphi(x) \end{array}\right.$$

($\nu \geq \mu$). Alors :

$$yu(t,x) \equiv v(t,x,y) \ . \tag{3.15}$$

Preuve $w := yu(t,x)$ vérifie la même condition terminale que v, et pour $t < T$:

$$\begin{aligned} &\partial_t w + \frac{\sigma^2(x)}{2}\partial^2_{x^2} w + \frac{\nu^2}{2} y^2 \partial^2_{y^2} w + \sigma(x)\mu y \partial^2_{xy} w \\ &= \ y\left(\partial_t u + \frac{\sigma^2(x)}{2}\partial^2_{x^2} u + \sigma(x)\mu\partial_x u\right) \ = \ 0 \ . \end{aligned}$$

□

À travers la représentation de Feynman-Kac (supposée valide pour ces problèmes), l'identité (3.15) se réécrit :

$$yE_P^{t,x}\varphi(x_T^\mu) = E_P^{t,x,y}\varphi(x_T^0)y_T \ ,$$

où :

$$\left\{\begin{array}{l} dx_s^\mu = \mu\sigma(x_s^\mu)ds + \sigma(x_s^\mu)dW_s^\mu, \ s > t \ ; \quad x_t^\mu = x \\ dx_s^0 = \sigma(x_s^0)dW_s^0, \ s > t \ ; \quad x_t^0 = x \\ dy_s = \nu y_s dW_s^y, \ s > t \ ; \quad y_t = y \\ \nu d\langle W^0, W^y\rangle_s = \mu ds, \quad s > t \end{array}\right.$$

(W^μ, W^0 et W^y Browniens standards initialisés en t sous P). Soit dans le cas $\nu = \mu$, $W^0 = W^y$, après explicitation de y_T et simplification par y :

$$E_P^{t,x}\varphi(x_T^\mu) = E_P^{t,x}\varphi(x_T^0)e^{\nu W_T^0 - \frac{\nu^2}{2}(T-t)}.$$

On obtient le *Théorème de Girsanov* [92, p.190], pour la diffusion décentrée x^μ.

Une fois l'équation transformée par changement de variables, de fonctions inconnues ou de lois de probabilités, on choisit un type de maillage. Pour des raisons de stabilité numérique (voir §3.2), on choisit classiquement un maillage régulier en variable logarithmique y ou si l'on s'est ramené à l'équation de la chaleur, et un maillage exponentiel, i.e. à $\Delta \ln(x)$ constant, en variables centrées (t,x). Puis on définit un schéma numérique sur le maillage ainsi choisi. C'est l'objet de la section suivante.

1. Au sens classique.

3.2 Schémas numériques

Concernant les schémas numériques par différences finies utilisés pour la résolution numérique des équations paraboliques, SNOOΠ offre le choix entre les différents θ-schémas en dimension un d'espace, tandis qu'en dimension supérieure il utilise une méthode de directions alternées, composée de schémas implicites dans les directions successives d'espace, et d'un traitement explicite des termes de dérivées croisées. Dans le cas américain, les algorithmes sont les mêmes, en faisant suivre chaque pas en temps de diffusion discrétisée d'une mise au niveau de la fonction de gain : on parle de *méthode de Trotter*, ou *itération sur les valeurs*.

Ces choix techniques se sont imposés durant les périodes de test du solveur. En particulier, en dimension supérieure à un, des méthodes *full implicit* auraient nécessité le recours à des méthodes d'algèbre linéaire sophistiquées, afin de pouvoir inverser des matrices de grande taille, qui ne présentent plus des propriétés de structure aussi favorables qu'en dimension un — structure tridiagonale, matrices inversibles en temps linéaire grâce à l'algorithme de Thomas. Lors des périodes de test du solveur, il est donc apparu préférable de se contenter d'une méthode de directions alternées, quitte à travailler dans des variables transformées, faiblement corrélées. La faiblesse des méthodes de directions alternées réside en effet dans l'évaluation des dérivées croisées apparaissant dans les termes de corrélation. Pour une présentation complète de ces schémas, — du moins dans le cas européen, — on renvoie au livre de Morton-Mayers [112].

Nous nous bornerons ici à illustrer quelques points et concepts importants relatifs aux θ-schémas, sur l'exemple de l'équation de la chaleur — en temps rétrograde :

$$\partial_t \Pi + \frac{\sigma^2}{2} \partial^2_{y^2} \Pi = 0 \,. \tag{3.16}$$

D'où le schéma numérique suivant :

$$\delta^{\varepsilon}_t \pi^n_m \;+\; \frac{\lambda}{2}\,\delta^2_{y^2}\pi^n_m \;=\; 0\;,$$

dans lequel :
— $\lambda := \frac{\sigma^2 \Delta t}{(\Delta y)^2}$;
— $\delta^2_{y^2}$ désigne la différence seconde centrée par rapport à y ;
— δ^{ε}_t, $\varepsilon = \pm 1$ désigne la différence première par rapport au temps, décentrée arrière ($\varepsilon = -1$, $\delta^{\varepsilon}_t \pi^n_m \equiv \delta^-_t \pi^n_m := \pi^n_m - \pi^{n-1}_m$, schéma explicite), ou avant ($\varepsilon = +1$, $\delta^{\varepsilon}_t \pi^n_m \equiv \delta^+_t \pi^n_m := \pi^{n+1}_m - \pi^n_m$, schéma implicite).

Dans le schéma explicite, réécrit sous la forme suivante :

$$\pi^{n-1}_m = \frac{\lambda}{2}\pi^n_{m-1} + (1-\lambda)\pi^n_m + \frac{\lambda}{2}\pi^n_{m+1}\,, \tag{3.17}$$

on reconnaît, avec les notations de Bizid [35], l'arbre trinômial associé au paramètre $1/\sqrt{\lambda}$. De plus, pour $\lambda = 1/2$, celui-ci n'est à son tour autre que la trace de l'arbre binômial comportant deux fois plus de nœuds — en espace comme en temps. En effet, ce dernier s'écrit avec des notations évidentes (d'après [35]) :

$$\pi^{(n-1)/2}_{m/2} = \frac{1}{2}(\pi^{n/2}_{(m+1)/2} + \pi^{n/2}_{(m-1)/2}) \;\;,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\pi_m^{n-1} = \pi_{2m/2}^{((2n-1)-1)/2} &= \frac{1}{2}\left(\pi_{(2m+1)/2}^{(2n-1)/2} + \pi_{(2m-1)/2}^{(2n-1)/2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\pi_{m+1}^n + \frac{1}{2}\pi_m^n\right) + \left(\frac{1}{2}\pi_m^n + \frac{1}{2}\pi_{m-1}^n\right)\right)\\ &= \frac{1}{4}\pi_{m-1}^n + \frac{1}{2}\pi_m^n + \frac{1}{4}\pi_{m+1}^n\,,\end{aligned}$$

qui est bien le schéma explicite (3.17) pour $\lambda = 1/2$. Plus généralement, pour $0 \leq \theta \leq 1$, on définit le schéma implicite sur les $\theta\Delta t$ premiers instants depuis l'étape n, puis explicite sur les $(1-\theta)\Delta t$ instants restant pour atteindre l'étape $n-1$ — en temps rétrograde. On parle de *θ-schéma*, ou, dans le cas particulier $\theta = 1/2$, de *schéma de Crank-Nicholson*. Notons :

$$A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & & & 0\\ \vdots & \ddots & & & -1\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2\end{pmatrix} \equiv -\frac{\delta_{y^2}^2}{2}\,,$$

de valeurs et vecteurs propres :

$$2\sin^2\left(\frac{k\pi}{2(M+1)}\right) =: \mu_k > 0,\ \left(\sin\left(\frac{jk\pi}{M+1}\right)\right)^T_{j\in\{1,\ldots M\}}\,,$$

(transposition T), pour $k = 1,\cdots,M$. Le θ-schéma s'écrit matriciellement :

$$\begin{cases}(\mathrm{Id} + \theta\lambda A)\pi^{n,\theta} &= \pi^n\\ \pi^{n-1} &= (\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)\pi^{n,\theta}\,,\end{cases}$$

Soit:

$$\begin{aligned}\pi^{n-1} &= (\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)(\mathrm{Id} + \theta\lambda A)^{-1}\pi^n\\ &= (\mathrm{Id} + \theta\lambda A)^{-1}(\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)\pi^n\,,\end{aligned} \tag{3.18}$$

par commutativité de $(\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)$ et de $(\mathrm{Id} + \theta\lambda A)^{-1}$. On a de plus les identités suivantes :

$$\theta\pi^{n-1} + (1-\theta)\pi^n = \theta(\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)\pi^{n,\theta} + (1-\theta)(\mathrm{Id} + \theta\lambda A)\pi^{n,\theta} = \pi^{n,\theta}\,, \tag{3.19}$$

et :

$$\begin{aligned}\pi^n - \lambda A\pi^{n,\theta} &= (\mathrm{Id} + \theta\lambda A)\pi^{n,\theta} - \lambda A\pi^{n,\theta}\\ &= (\mathrm{Id} - (1-\theta)\lambda A)\pi^{n,\theta} = \pi^{n-1}\,.\end{aligned} \tag{3.20}$$

D'après le Théorème de Lax pour les problèmes linéaires bien posés et bien conditionnés [112], la convergence de nos schémas (quand les pas de discrétisation en espace Δy et en temps Δt tendent vers 0), équivaut à leurs consistance et stabilité. Cette dernière revenant pour sa part à l'absence de valeur propre

$$(1 + \theta\lambda\mu_k)^{-1}(1 - (1-\theta)\lambda\mu_k) =: \nu_k$$

supérieure à un en module pour l'opérateur de θ-schéma, $k = \{1,\cdots,M\}$, il vient :

Théorème 3.2 *Quand Δt et Δy tendent vers 0, le θ-schéma (3.18) est stable si et seulement si $\lambda(1-2\theta) \leq 1$, d'où stabilité :*

a. pour $\lambda \leq 1$, dans le cas explicite ;

b. inconditionnelle, si $\theta \leq 1/2$ — notamment dans le cas implicite ou pour le schéma de Crank-Nicholson.

Preuve À k fixé (qu'on oublie dans les écritures ci-après, pour alléger les notations), on a par définition :

$$\begin{aligned} |\nu| \leq 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|(1+\theta\lambda\mu)^{-1}(1-(1-\theta)\lambda\mu)\right| \leq 1 \;\Leftrightarrow |1-(1-\theta)\lambda\mu| \leq 1+\theta\lambda\mu \\ &\Leftrightarrow \quad (1-\lambda\mu) \vee (\lambda\mu(1-2\theta)-1) \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \lambda\mu(1-2\theta) \leq 2\,, \end{aligned}$$

par $|x| \equiv x \vee -x$. □

Remarque 3.3 Revenons sur les points a et b de ce Théorème :

a. la condition de stabilité dans le cas explicite n'est autre que la condition d'ouverture des branches que l'arbre doit satisfaire pour garantir la convergence du schéma trinômial arborescent pour l'équation de la chaleur (voir par exemple Bizid [35]) ;

b. la convergence inconditionnelle dans le cas implicite correspond à l'approximation "dans le sens du vent" (*upwind*) du terme en dérivée première par rapport au temps dans l'équation de la chaleur.
Dans le cas du schéma de Crank-Nicholson, on a pour λ assez grand : $\max_k |\nu_k| = |\nu_M|$, qui tend vers 1^- lorsque λ tend vers $+\infty$. Donc on se rapproche de (et on risque de dépasser à cause des erreurs numériques) la limite de la stabilité sur les hautes fréquences pour lesquelles k est de l'ordre de M. Mieux vaut donc utiliser un schéma implicite lorsqu'on est confronté à un problème comportant de telles hautes fréquences, par exemple en présence d'une condition limite de type "masse de Dirac".

Quant à la consistance, elle est toujours vérifiée, comme il découle du Théorème (standard) suivant, qui donne en outre l'erreur de troncature du θ-schéma.

Théorème 3.4 *L'erreur de troncature du θ-schéma (3.20), vu comme une approximation de l'équation de la chaleur (3.16), est comme*

$$O(|2\theta-1|\Delta t + (\Delta t)^2 + (\Delta y)^2)\,.$$

Les θ-schémas sont donc précis à l'ordre un en temps et deux en espace, sauf le θ-schéma de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$), précis à l'ordre deux en espace comme en temps.

Preuve du Théorème 3.4
Voir Annexe D.

□

De cette étude sur l'équation de la chaleur, retenons en général qu'à propos des θ-schémas :
— les parties implicites ont tendance à stabiliser les programmes ;
— les parties explicites sont les plus légères à calculer : leur résolution nécessite environ deux fois moins de calculs que celles des parties implicites, pour lesquelles il faut inverser une matrice tridiagonale, en utilisant l'algorithme de Thomas ;
— le schéma de Crank-Nicholson est souvent le plus précis. Il permet de diminuer le nombre de pas en temps, sans préjudice de stabilité ou de précision.
À nouveau, pour plus de détails, on renvoie à Morton-Mayers [112].

Il existe naturellement (et c'est encore plus vrai à plusieurs dimensions d'espace, où on peut également jouer sur les directions) d'autres schémas par différences finies, à davantage de points en espace (voir Théorème 6.1) ou plusieurs niveaux en temps. On s'est limité ici aux θ-schémas bien connus, présentés sur l'équation de la chaleur, afin d'illustrer un certain nombre de difficultés génériques.

Notons cependant que l'analyse de Fourier esquissée ci-dessus (recherche des modes propres divergents des schémas), trouve ses limites lorsqu'on sort du cadre de la linéarité. Un recours au Théorème de Lax est alors le Théorème de Barles-Souganidis [17], selon lequel tout schéma d'approximation stable, monotone et consistant d'une équation elliptique non linéaire (au sens de la théorie des solutions de viscosité) converge vers la solution de viscosité, supposée unique, de cette équation. La stabilité et l'unicité en question s'appréhendent à travers des principes du maximum.

Enfin, les Théorèmes précédents, s'ils garantissent la convergence, laissent ouverte la question de son taux. L'analyse de l'erreur doit en effet précéder toute utilisation raisonnable de ces schémas. Pour une telle analyse dans un cadre plus général d'éléments finis (voir §4.2.3), on renvoie, suivant la synthèse sur ces sujets due à Berestycki-Busca *in* [54, Vol. I], à Babuška-Bieterman [5] ou Thomée [131] : et, pour des extensions de ces analyses dans des contextes non linéaires, par principes du maximum, à des travaux en préparation de Berestycki-Busca. La particularité des situations rencontrées provient des conditions terminales présentant des singularités, typiquement d'ordre 0, 1 ou 2, *e.g.* option digitale, *call* européen ou *put* américain, respectivement. Un corollaire intéressant de ces analyses est la justification de l'usage intuitif et déterminant dans la pratique consistant à adapter la grille au problème considéré, calant la grille à la barrière s'il en est, augmentant la densité du maillage au voisinage des singularités, etc...

En pratique, on résout un problème localisé à un domaine borné, moyennant l'introduction de conditions aux bords ainsi créés. Ainsi adapte-t-on les θ-schémas précédents à l'aide de conditions aux bords naturelles de Dirichlet et Neumann sur les parties explicites et implicites des schémas, respectivement. C'est l'objet de la section suivante.

3.3 Localisation

Le choix de la localisation dépend de la nature et de l'importance de la perturbation induite par la résolution numérique sur un domaine borné, nécessitant l'introduction de conditions aux bords. Cette perturbation s'évalue bien sûr au cas par cas (même si on peut souvent raisonnablement conjecturer un ordre de grandeur en $e^{-C\delta^2}$ pour cette perturbation, $\delta = d(y,\text{bord en esp.})$, $y = \ln(S)$, dans le cadre d'un problème parabolique doté d'une solution fondamentale).

Cependant, pour fixer les idées, et illustrer quelques points importants en matière de localisation, considérons le calcul du prix Π d'une option européenne dans le modèle de Black-Scholes, à fonction de gain terminale φ. Notons $\Pi^{\overline{S}}$ la solution du problème localisé au domaine $]-\infty,T]\times]0,\overline{S}]$, moyennant l'introduction de la condition de Dirichlet au bord suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \Pi^{\overline{S}} + \mathcal{L}_S \Pi^{\overline{S}} = r\Pi^{\overline{S}} \ ; \ t < T,\, S < \overline{S} \\ \Pi^{\overline{S}}(T,S) = \varphi(S) \ ,\ S < \overline{S} \\ \Pi^{\overline{S}}(t,\overline{S}) = e^{-r(T-t)}\varphi(\overline{S}e^{r(T-t)}) \ ,\ t < T \ . \end{array} \right. \tag{3.21}$$

Remarque 3.5 Cette condition au bord tient compte de l'évolution moyenne du sous-jacent dans le problème non localisé : en référence à certains travaux relatifs à l'équation de Helmholtz en électromagnétisme, Busca *in* [54] a pu parler de conditions aux limites *transparentes*. On qualifiera de *naturelle*, la condition de Dirichlet plus habituelle :

$$\Pi^{\overline{S}}(t,\overline{S}) \ = \ \varphi(\overline{S}) \ e^{-r(T-t)} \qquad t < T \ .$$

Par la formule de Feynman-Kac (supposée valide pour le problème (3.21)), la solution $\Pi^{\overline{S}}$ de ce problème se réécrit en (t_0,S_0) fixé :

$$\Pi^{\overline{S}}(t_0,S_0) = e^{-r(T-t_0)} E_P^{t_0,S_0}\left\{\varphi(S_\tau e^{r(T-\tau)})\mathbf{1}_{\tau<T} + \varphi(S_T)\mathbf{1}_{\tau\geq T}\right\} ,$$

— τ temps de sortie de $]0,\overline{S}]$ pour le processus S . De même,

$$\Pi(t_0,S_0) = e^{-r(T-t_0)} E_P^{t_0,S_0}\varphi(S_T) = e^{-r(T-t_0)} E_P^{t_0,S_0}\left\{e^{r(T-\tau)}\Pi(\tau,S_\tau)\mathbf{1}_{\tau<T} + \varphi(S_T)\mathbf{1}_{\tau\geq T}\right\} ,$$

par la *propriété de Markov forte* dont est pourvue la diffusion lognormale S [92] :

$$E_P^{t_0,S_0}\left\{\varphi(S_T)\mathbf{1}_{\tau<T}\right\} = E_P^{t_0,S_0} E_P^{\tau,S_\tau}\left\{\varphi(S_T)\mathbf{1}_{\tau<T}\right\} = E_P^{t_0,S_0}\left\{e^{r(T-\tau)}\Pi(\tau,S_\tau)\mathbf{1}_{\tau<T}\right\} .$$

Donc :

$$\Pi(t_0,S_0) - \Pi^{\overline{S}}(t_0,S_0) = e^{-r(T-t_0)} E_P^{t_0,S_0}\{[e^{r(T-\tau)}\Pi(\tau,S_\tau) - \varphi(S_\tau e^{r(T-\tau)})]\mathbf{1}_{\tau<T}\} . \quad (3.22)$$

Pour majorer cette différence, on peut jouer sur l'un des facteurs :

$$e^{r(T-t)}\Pi(t,\overline{S}) - \varphi(\overline{S}e^{r(T-t)}) \quad , \quad t \in [t_0,T] \quad (3.23)$$

ou

$$E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\tau<T} \quad = \quad P^{t_0,S_0}(\tau < T) . \quad (3.24)$$

Si $r = \frac{\sigma^2}{2}$ on obtient, avec des notations évidentes, après un changement de variables logarithmique (3.1) :

$$\tau^{t_0,S_0}_{]-\infty,\overline{S}]} = \tau^{t_0,y_0}_{]-\infty,\overline{y}]} ,$$

où

$$dy_t = \sigma dW_t,\, t > t_0 \ ; \quad y_{t_0} = y_0 := \ln(S_0) \ ; \quad \overline{y} := \ln(\overline{S}) .$$

D'où si $\lambda > 0$, en utilisant l'expression de la *transformée de Laplace* de $\tau^{t_0,y_0}_{]-\infty,\overline{y}]}$ (voir par exemple Lamberton-Lapeyre [100, p.99]) :

$$\begin{aligned} E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\{\tau^{t_0,S_0}_{]-\infty,\overline{S}]}<T\}} &= E_P^{t_0,y_0}\mathbf{1}_{\{\tau^{t_0,y_0}_{]-\infty,\overline{y}]}<T\}} \\ &\leq E_P^{t_0,y_0} e^{\lambda\left(T-\tau^{t_0,y_0}_{]-\infty,\overline{y}]}\right)} = e^{\lambda(T-t_0)-\sqrt{2\lambda}\ \frac{\overline{y}-y_0}{\sigma}} , \end{aligned}$$

qui se minimise sur $\lambda > 0$ en $e^{-f^2/2}$, où

$$f := \frac{\overline{y} - y_0}{\sigma\sqrt{T-t_0}} .$$

Soit,

$$E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\{\tau^{t_0,S_0}_{]-\infty,\overline{S}]}<T\}} \ \leq \ e^{-\frac{f^2}{2}} ,$$

où

$$f = \frac{\ln(\frac{\overline{S}}{S_0})}{\sigma\sqrt{T-t_0}} . \quad (3.25)$$

Dans le cas général,

$$\begin{aligned} \{\tau^{t_0,S_0}_{]-\infty,\overline{S}]} < T\} &= \bigcup_{t_0<t<T}\{S_0 e^{\sigma W_t - (\frac{\sigma^2}{2}-r)(t-t_0)} > \overline{S}\} \\ \subset \bigcup_{t_0<t<T}\{e^{\sigma W_t} > \frac{\overline{S}}{S_0} e^{-\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)^+(T-t_0)}\} &= \{\tau^{t_0,\sigma W_{t_0}=0}_{]-\infty,\ln\left(\frac{\overline{S}}{S_0}\right)-(r-\frac{\sigma^2}{2})^+(T-t_0)]} < T\} , \end{aligned}$$

événement dont la probabilité admet la majoration suivante, par l'étude dans le cas précédent :

$$e^{-f^2/2} \ , \text{où} \quad f = \frac{\ln\left(\frac{\overline{S}}{S_0}\right) - (r - \frac{\sigma^2}{2})^+(T-t_0)}{\sigma\sqrt{T-t_0}} \ .$$

Remarque 3.6 Pour de telles estimations uniformes sur le domaine localisé en espace (dans le cas de l'équation de la chaleur, à un phénomène de couche limite près), on renvoie à l'étude de Barles, Romano et Daher [15] (théorie des grandes déviations et solutions de viscosité).

Parfois, l'analyse de l'autre facteur (3.23) permet de conclure à la convergence uniforme sur l'intégralité du domaine localisé, sans phénomène de couche limite. Ainsi, dans le cas du *call* européen dans le modèle de Black-Scholes ($\varphi \equiv \varphi_K := (S-K)^+$, voir §4.1), on a pour $t \in [t_0,T]$, en supposant $\overline{S} > K$:

$$\begin{aligned}
&e^{r(T-t)}\Pi(t,\overline{S}) - \varphi_K(\overline{S}e^{r(T-t)}) = E_P^{t,\overline{S}}(S_T-K)^+ - (\overline{S}e^{r(T-t)}-K)^+ \\
&= E_P^{t,\sigma W_t=0}\left(\overline{S}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}-K\right)^+ - (\overline{S}e^{r(T-t)}-K) \\
&= E_P^{t,\sigma W_t=0}\left\{\left(\overline{S}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}-K\right) + \left(K-\overline{S}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}\right)^+\right\} - (\overline{S}e^{r(T-t)}-K) \\
&= E_P^{t,\sigma W_t=0}\left(K-\overline{S}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}\right)^+ \\
&= KE_P^{t,\sigma W_t=0}\left(1-\frac{\overline{S}}{K}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}\right)^+ .
\end{aligned}$$

En effet, l'espérance de l'exponentielle vaut $e^{r(T-t)}$. La dernière expression dont on prend la partie positive étant inférieure à un, il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
0 \ \leq \ e^{r(T-t)}\Pi(t,\overline{S}) - \varphi_K(\overline{S}) &\leq KE_P^{t,\sigma W_t=0}\mathbf{1}_{\left\{\overline{S}e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}<K\right\}} \\
&= KP^{t,\sigma W_t=0}\left(e^{\sigma W_T-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)} < \frac{K}{\overline{S}}\right) \\
&= KP^{t,\sigma W_t=0}\left(\sigma W_T < (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t) + \ln\left(\frac{K}{\overline{S}}\right)\right) \\
&= KP^{t,\sigma W_t=0}\left(\sigma W_T > \ln\left(\frac{\overline{S}}{K}\right) - (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)\right) \\
&\leq KP^{t,\sigma W_t=0}\left(\tau^{t,\sigma W_t=0}_{]-\infty,\ln\left(\frac{\overline{S}}{K}\right)-(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)]} < T\right) ,
\end{aligned}$$

par le *Lemme du miroir* [92] . Or, comme on l'a déjà vu plus haut, cette dernière probabilité est majorée par $e^{-\frac{f^2}{2}}$, où

$$f = \frac{\ln\left(\frac{\overline{S}}{K}\right) - (\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} =: f(t) \ .$$

D'où par (3.22), si $\overline{S}$ assez grand pour que f^2 soit croissant en t sur $[\underline{t},T[$ [2] :

$$|\Pi(t_0,S_0) - \Pi^{\overline{S}}(t_0,S_0)| \leq Ke^{-\frac{f(t_0)^2}{2}} \leq Ke^{-\frac{f(\underline{t})^2}{2}}$$

2. $ff'(t)$ est du signe de $(\ln(\overline{S}/K))^2 - (\sigma^2/2-r)^2(T-t)^2$, pour tout $t<T$.

si $(t_0,S_0) \in [\underline{t},T[\times]0,\overline{S}]$. D'où la convergence uniforme annoncée quand $\overline{S} \to +\infty$.

Remarque 3.7 On a vu au passage que $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ tend vers $S_0 - Ke^{-r(T-t_0)}$ quand $S_0/K \to +\infty$, uniformément en $t_0 \in [\underline{t},T]$. Un calcul analogue montre que $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ tend vers 0 quand $K/S_0 \to +\infty$, uniformément en $t_0 \in [\underline{t},T]$. Idem pour un *call* sur sous-jacent avec dividende $q \geq 0$, — r remplacé par $r-q$ dans la dynamique du sous-jacent (2.1), — la limite quand $S_0/K \to +\infty$ devenant $S_0e^{-q(T-t_0)} - Ke^{-r(T-t_0)}$.

Ainsi, dans tous les cas de figure, et quelle que soit la technique d'analyse envisagée, la quantité critique eu égard à l'erreur de troncature en $S = \overline{S}$ est $\exp(-f^2/2)$, où

$$f = \frac{\ln\left(\frac{\overline{S}}{S^*}\right)}{\sigma\sqrt{T-t^*}} ,$$

pour $(t^*,S^*) = (t_0,S_0e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})^+(T-t_0)})$ — point en lequel on recherche de la précision, convenablement actualisé — ou

$$(t^*,S^*) = (\underline{t},Ke^{(\frac{\sigma^2}{2}-r)(T-\underline{t})})$$

— pour une précision uniforme sur le domaine localisé, dans le cas du *call* ci-dessus.

Enfin, on pourrait tenir des discussions analogues, aboutissant à la même conclusion générale, dans le cas d'une condition au bord de type Neumann bien choisie.

En pratique, on choisira de localiser le domaine en espace suivant

$$\overline{S} = S_0e^{f\sigma\sqrt{T-t_0}+(r-\frac{\sigma^2}{2})^+(T-t_0)} ,$$

et de manière analogue

$$\underline{S} = S_0e^{-f\sigma\sqrt{T-t_0}} ,$$

pour un facteur f suffisamment grand.

De même, en variables centrées x ou logarithmiques y, des justifications contenues dans les précédentes conduisent aux choix par défaut suivants :

$$\overline{x} = e^{f\sigma\sqrt{T-t_0}} \quad , \quad \underline{x}\overline{x} = 1$$
$$\overline{y} = \ln(S_0) + f\sigma\sqrt{T-t_0} + (r-\frac{\sigma^2}{2})^+(T-t_0) \quad , \quad \underline{y} = \ln(S_0) - f\sigma\sqrt{T-t_0} .$$

Numériquement, on prendra f de l'ordre de quelques unités, comme s'il s'agissait de régler l'intervalle de confiance pour un Brownien — en général $f = 4.5$. Mais par exception, on prendra $f = \sqrt{2N_T}$ pour les résolutions à l'aide d'un θ-schéma explicite ($\theta = 0$), ou arbre trinômial. Ceci est en effet conforme au paramétrage classique en vigueur sur les arbres, qui se complète habituellement en $N_Y = 2N_T$, d'où par exemple si $r = \sigma^2/2$ (équation de la chaleur, en variables logarithmiques) :

$$\lambda = \frac{\sigma^2\Delta t}{(\Delta y)^2} = \frac{\sigma^2(T-t_0)N_Y^2}{8\sigma^2N_T^2(T-t_0)} = \frac{1}{2} \in [0,1] ,$$

et stabilité du schéma pour ces paramètres sur l'équation de la chaleur (voir §3.2). La motivation de ce choix est la priorité accordée au fait que les utilisateurs d'arbres puissent mieux apprécier les résultats numériques correspondants — ceux-ci devenant en contrepartie plus difficiles à comparer avec les résultats obtenus par les autres schémas, puisqu'on utilise des domaines différents pour le θ-schéma explicite d'une part, et les θ-schémas pour $\theta \neq 0$ d'autre part, toutes choses égales par ailleurs.

Chapitre 4

Expériences numériques

Le Tableau 4.1 recense les valeurs par défaut des paramètres d'ores et déjà introduits, utilisés pour les expériences numériques par différences finies présentées dans la suite de cette Partie.

r	σ	t_0	S_0	T	K
10%	20%	0	100	1	100

TAB. 4.1 – *Valeurs par défaut des paramètres courants*

De plus, l'Annexe E récapitule toutes nos conditions d'expériences numériques par différences finies, en matière de valeurs numériques des paramètres, comme de choix correspondant aux points a, b et c du §2.2.

Enfin, on notera :
— $\hat{x}$, l'estimée numérique d'une quantité x ;
— $\delta(\hat{x},x) := \log_{10}\left(100\frac{|\hat{x}-x|}{|x|}\right)$, le logarithme à base 10 de l'erreur relative en % de $\hat{x}$ par rapport à x.

Par exemple, $\delta \equiv 0$ et $\delta \equiv -1$ correspondent à des erreurs relatives respectives de 1% et 0.1% ; plus généralement, une augmentation d'un facteur 10 en erreur relative correspond à un incrément de 1 en δ.

4.1 Évaluation d'un *call* européen

Illustrons maintenant les généralités précédentes, sur l'exemple élémentaire du calcul numérique du prix $\Pi_{T,K}(t,S)$ d'un *call* européen, d'échéance T et prix d'exercice K — fonction de gain terminale

$$\varphi(S_T) = \varphi_K(S_T) := (S_T - K)^+, \tag{4.1}$$

dans le modèle de Black-Scholes du §2.3. $\Pi_{T,K}(t,S)$ est alors connu explicitement, sous le nom de *formule de Black-Scholes* (voir Annexe C).

Commentaire 4.1 (Erreurs à la date t_0) *La Figure 4.1 représente l'erreur commise en calculant numériquement $\Pi_{T,K}(t,S)$ à l'aide de différents θ-schémas, après un changement de variables centrant. On a représenté les erreurs à la date $t = t_0$, pour diverses valeurs de S.*
Au voisinage de la monnaie $S_0 = 100$[1] le schéma de Crank-Nicholson conduit comme prévu aux meilleurs résultats, — les schémas implicites et explicites obtenant pour leur

1. Qui a servi à dimensionner le domaine localisé, voir $3.3.

part des résultats comparables entre eux. De plus, loin dans la monnaie, c'est-à-dire pour les grandes valeurs de S, le schéma explicite obtient les meilleurs résultats. Ces bonnes performances du schéma explicite, par ailleurs plus léger à calculer (voir §3.2), peuvent s'expliquer par les propriétés de structure extrêmement fortes de la nappe des prix de call *: décroissance en t, croissance et convexité en S de la nappe $(\Pi_{T,K}(t,S))_{t\leq T,S>0}$.*

Commentaire 4.2 (Effets de bords) *La Figure 4.2 présente par ailleurs les résultats obtenus avec le schéma de Crank-Nicholson, sur des domaines localisés*[2] *de plus en plus grands. Le domaine dans lequel l'erreur relative commise est inférieure au pour cent (partie de la courbe située en-dessous du niveau $\delta \equiv 0$ d'erreur) croît conjointement. On est en présence d'un mauvais effet de bord, cause d'une erreur plus importante lorsqu'on s'approche du bord du domaine localisé. On a vu plus haut (§3.3) que l'erreur de troncature convergeait uniformément vers 0 sur le domaine localisé lorsque ce dernier tendait vers $\mathbb{R}_+^*$. Mais c'etait pour une condition de Dirichlet transparente bien choisie au bord d'un domaine localisé supérieurement en espace. Il n'eût été guère plus difficile de le faire sur un bord inférieur et/ou pour des conditions aux bords de Neumann adéquates, puis pour des conditions aux bords transparentes mixtes, alternativement Neumann sur les $\theta\Delta t$ premiers instants, puis Dirichlet sur les $(1-\theta)\Delta t$ instants suivants de chaque pas de temps rétrograde, comme implémenté dans nos θ-schémas. En revanche, le choix de conditions aux bords naturelles (voir §3.3), plus génériques mais non spécifiquement les mieux adaptées au cas du* call*, introduit a contrario une erreur de troncature, à laquelle vient peut-être s'ajouter une erreur numérique.*

Remarque 4.3 Le schéma explicite ne semble pas donner lieu à ce mauvais effet de bord (Figure 4.1). Néanmoins, il faut noter que le domaine localisé choisi pour les expériences correspondantes est plus grand que ceux utilisés pour les deux autres méthodes. Pour ce schéma explicite, on a en effet voulu se rapprocher le plus possible des pratiques en vigueur sur les arbres, pour lesquels l'usage habituel est de prendre N_X de l'ordre de $2N_T$, sur un maillage exponentiel. La condition de stabilité $\lambda \leq 1$ du schéma explicite se retrouve alors sous la forme d'une condition d'ouverture des branches que l'arbre doit satisfaire : à taille du domaine en temps fixée, égale à $T-t_0$, il faut prendre un domaine en espace suffisamment grand. La Figure 4.1 ne représente que la portion d'espace commune au domaine utilisé pour le schéma implicite et de Crank-Nicholson d'une part, et d'autre part au domaine utilisé pour le schéma explicite. On ne voit donc pas sur la Figure les bords de ce dernier domaine.

Commentaire 4.4 (Pics) *Les pics descendants observables sur les courbes des Figures 4.1 et 4.2, correspondent à des points du maillage où l'erreur change de signe. Avec le schéma de Crank-Nicholson, l'erreur relative vaut ainsi* $-4.8\ 10^{-4}\%$ *en* $S = 109.043745$, *contre* $4.1\ 10^{-5}\%$ *en* $S = 110.342729$. *La Figure 4.3 montre que ces pics ne tendent pas à disparaître si l'on augmente la densité du maillage, — pas plus qu'il n'apparaît alors de nouveaux pics. Il semble donc que ces pics, phénomènes isolés, ne doivent pas orienter outre mesure l'analyse des résultats. Il paraît ainsi plus juste d'apprécier ces résultats en ne tenant pas compte de ces pics, considérant des enveloppes supérieures de ces graphes d'erreurs calculées à l'aide de quantités du type :*

$$\delta_\varepsilon(\hat{x},x) := \sup_{|y-x|\leq\varepsilon} \delta(\hat{y},y) .$$

2. Facteurs f, voir §3.3.

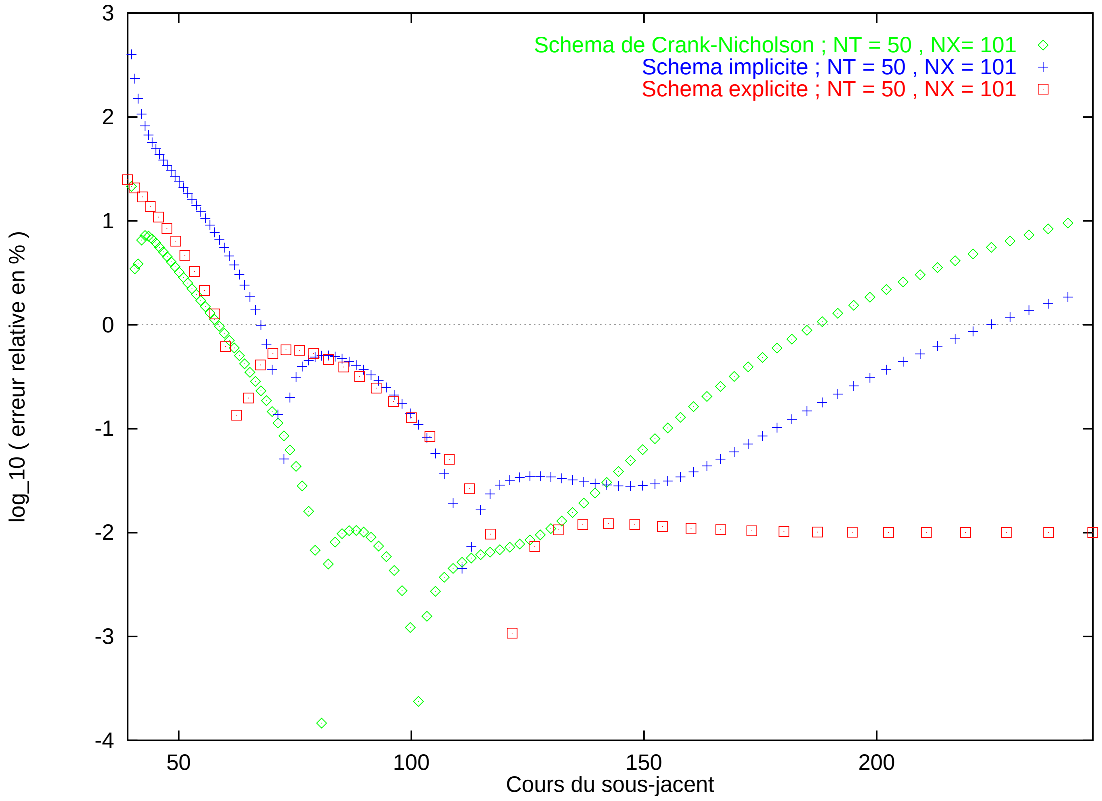


FIG. 4.1 – Évaluation d'un *call* européen

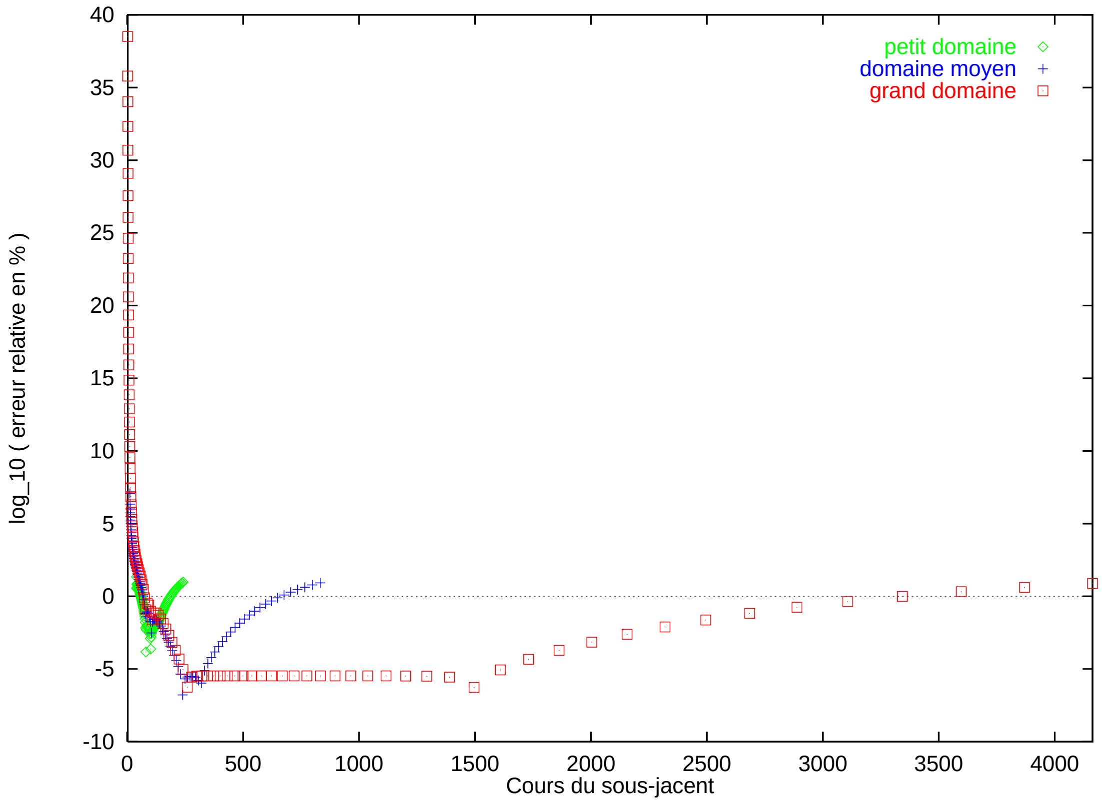


FIG. 4.2 – Effets de bord — Schéma de Crank-Nicholson

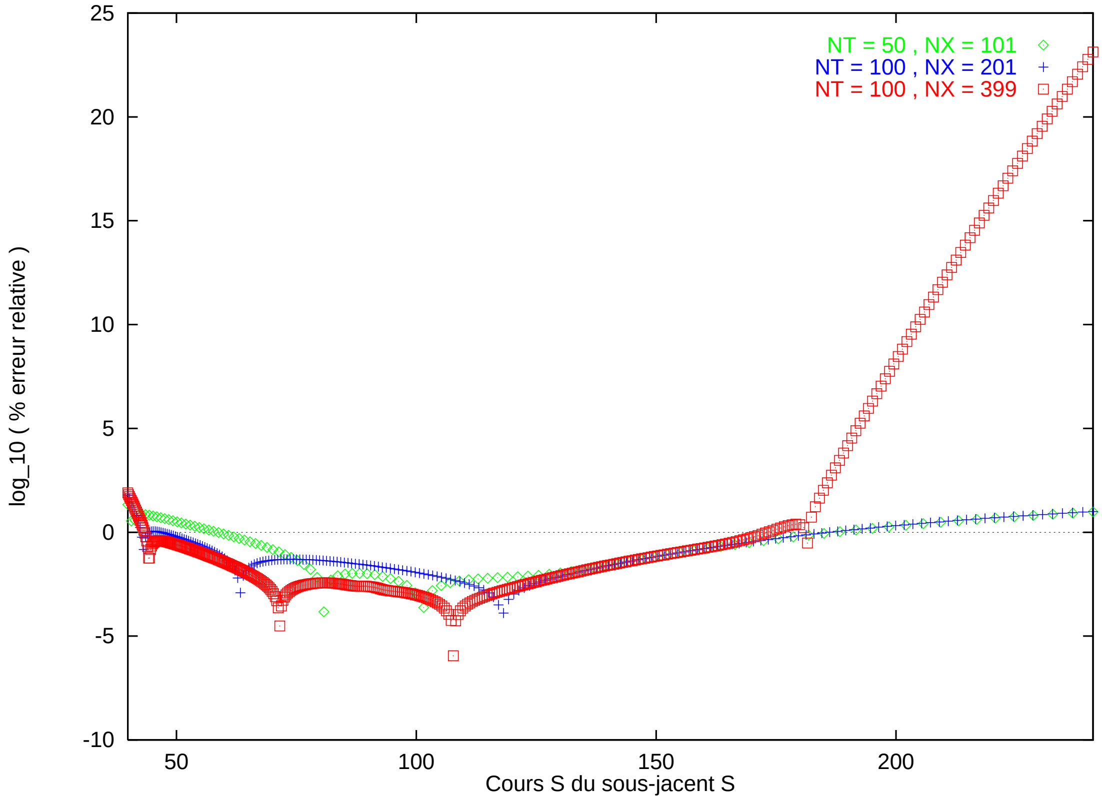


FIG. 4.3 – Pics — Schéma de Crank-Nicholson

4.2 Évaluation d'un *call* européen à barrière *up out*

Le *call* européen à barrière *up out*, à fonction de gain terminale 4.1 précédente, ne peut être exercé si le cours S du sous-jacent a atteint la barrière H — fonction régulière $t \to H_t$, qui peut être constante à un niveau $\overline{H}$, ou variable en temps. Dans ce dernier cas, on parle de *problème à barrière courbe*. On renvoie à [6] pour le détail d'une telle application, correspondant à l'évaluation d'une option sur obligation.

Les options à barrière sont abondamment utilisées, notamment sur le marché des changes. La présence de la barrière provoque une discontinuité de la couverture, source de difficultés sur le plan numérique. On renvoie à El Karoui, Carr-Ellis, Ritchken [69, 50, 119] pour les aspects théoriques. Le prix $\Pi_{T,K,H}(t,S)$ de cette option à barrière dans le modèle de Black-Scholes, vu comme fonction de la phase courante (t,S), est solution du problème de Cauchy en temps rétrograde (2.4) pour la condition terminale (4.1), assorti d'une condition de Dirichlet homogène sur la barrière H, bord supérieur du domaine en espace. Alternativement, ce prix admet par la formule de Feynman-Kac la représentation probabiliste suivante :

$$\Pi_{T,K,H}(t,S) \quad = \quad e^{-r(T-t)} E_P^{(t,S)} (S_T - K)^+ \mathbf{1}_{\{S \leq H\}},$$

où $\{S \leq H\}$ est une notation abrégée pour $\bigcap_{t \leq s \leq T} \{S_s \leq H_s\}$. Le gain de l'option dépend donc non seulement de la valeur finale atteinte par le cours S du sous-jacent, mais également de toute sa trajectoire. On parle d'option *path dependent* (dépendant du chemin).

4.2.1 Différences finies adaptées à la barrière

Dans le cas d'une barrière constante $H \equiv \overline{H}$, le gain de l'option peut être rendu Markovien, *via* l'extension de l'état du système à l'aide d'une variable supplémentaire "maximum courant de S". La valeur de l'option est alors connue explicitement (Proposition C.2). On peut par ailleurs procéder numériquement par *edp*, comme pour le *call* européen du §4.1, en imposant de surcroît une condition de Dirichlet homogène au bord supérieur $\overline{H}$ du domaine discrétisé.

Commentaire 4.5 (Barrière constante) *La Figure 4.4 compare les résultats obtenus pour $H \equiv \overline{H} = 120$, à l'aide des θ-schémas explicite, implicite et de Crank-Nicholson, après changement de variable logarithmique. Les maillages sont calés à la barrière — $\ln(\overline{H})$ correspond au niveau en espace supérieur du maillage.*

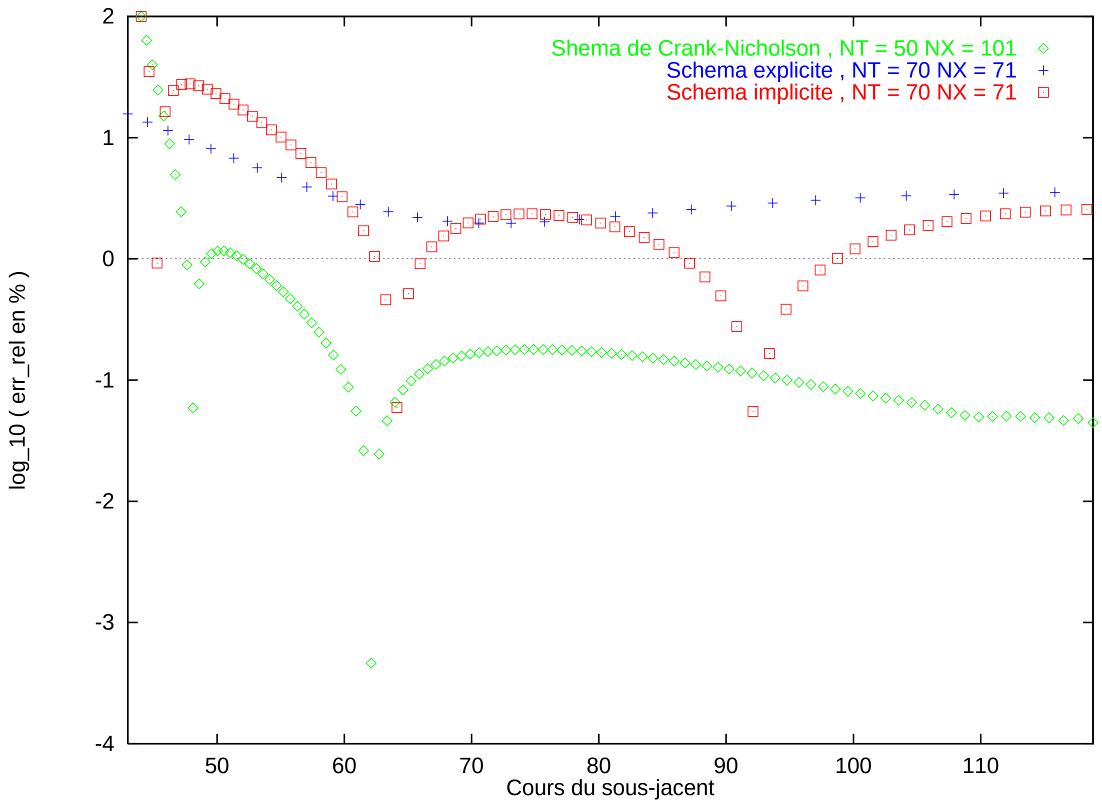


FIG. 4.4 – *Call* à barrière constante — Évaluation par θ-schémas calés à la barrière

Dans le cas d'une barrière courbe, une première approche consiste à adapter les calculs précédents — en espérant que le bord courbe ne déteriore pas trop la stabilité du schéma. Les θ-schémas peuvent en effet s'adapter à ces problèmes, moyennant la prise en compte de quelques exceptions dans l'évaluation des différences finies, pour gérer la condition de Dirichlet homogène sur le bord courbe.

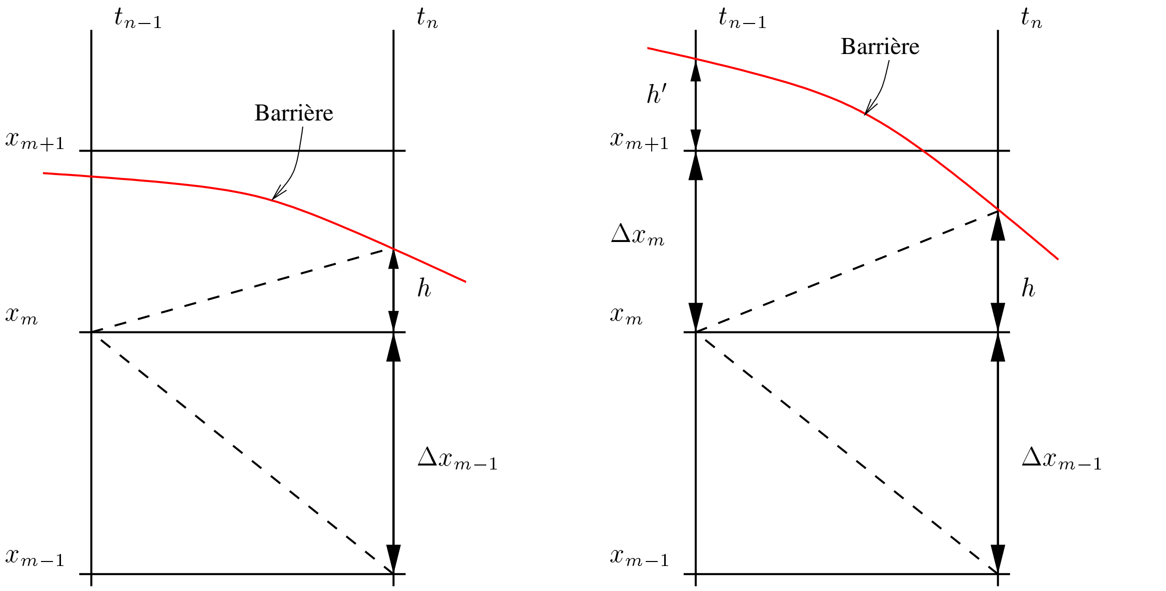
Considérons par exemple le problème 3.11 introduit au §3.1.2, exprimé en variables centrées (3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t \hat{\Pi} + \mathcal{L}_x \hat{\Pi} = r\hat{\Pi} \ ; \ t < T, \ \ x \leq H_t = \frac{\overline{H}}{H_0} e^{-r(t-t_0)} \\ \hat{\Pi}(T,x) = (xS_0 \exp(r(T-t_0)) - K)^+ = \hat{\varphi}_K(x) \\ \hat{\Pi}(t,H_t) = 0 \ . \end{array} \right.$$

Ce problème résultant par changement de variable centrant du problème de l'évaluation du *call* européen à barrière constante *up out* au niveau $\overline{H}$, on en connaît la solution explicitement, ce qui permet de valider les résultats numériques.

La diffusion exprimée dans la variable x étant lognormale, on choisit un maillage exponentiel en x — i.e. à $\Delta \ln(x)$ constant, — pour une meilleure stabilité des (parties explicites des) schémas, voir §3.2. On choisit de plus $\Delta t/\Delta \ln(x)$ assez petit pour qu'en un pas de temps la barrière ne puisse franchir plus d'un pas d'espace.

On peut alors utiliser les θ-schémas pour ce problème sur notre maillage exponentiel, moyennant la prise en compte de quatre exceptions liées au bord courbe, qui reviennent à introduire (fictivement) un nœud de maillage là où passe la barrière, à chaque pas de temps, comme on le fait avec les arbres — voir Figures 4.5 et 4.6 (à chaque pas de temps n, on considère un système linéaire prenant en compte les rangs d'espace de 0 à m inclus, m dépendant de n), et les références [6, 119, 112].



$$\delta^2_{x^2}\pi^{n-1}_m = \frac{2}{h+\Delta x_{m-1}}\left(\frac{0-\pi^n_m}{h} - \frac{\pi^n_m-\pi^n_{m-1}}{\Delta x_{m-1}}\right)$$

$$\delta^2_{x^2}\pi^{n-1}_m = \frac{2}{h+\Delta x_{m-1}}\left(\frac{0-\pi^n_m}{h} - \frac{\pi^n_m-\pi^n_{m-1}}{\Delta x_{m-1}}\right)$$

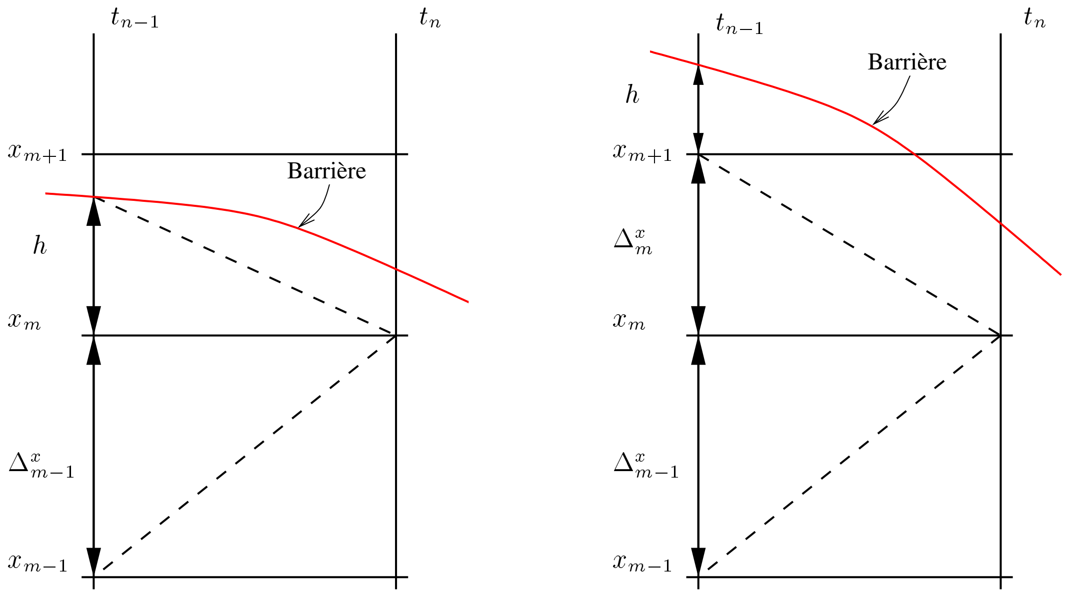
$$\pi^{n-1}_{m+1} = \frac{h'}{h'+\Delta x_m}\pi^{n-1}_m$$

FIG. 4.5 – θ-schémas et bords courbes — parties explicites

Plus généralement, on peut faire de même avec toute barrière régulière, monotone par morceaux, quitte à mettre en œuvre des traitements analogues sur les morceaux où la barrière est croissante.

Commentaire 4.6 (Barrière courbe — Différences finies adaptées) *La Figure 4.7 compare les résultats ainsi obtenus à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson, utilisant* $N_T = 100$ *pas de temps fois* $N_X = 151$ *pas d'espace : d'abord pour* $r = 0$, *— barrière en variables centrées constante au niveau* $\frac{H}{S_0} = 1.2$, *— puis pour* $r = 20\%$ *— barrière courbe.*

Dans le premier cas, on a représenté les résultats pour une grille calée à la barrière d'une part, et d'autre part pour une grille décalée par rapport à la barrière (voir fin §3.2).



$$\pi^{n-1}_{m+1} = \frac{h}{h+\Delta x_m}\pi^{n-1}_m$$

$$\delta^2_{x^2}\pi^n_m = \frac{2}{h+\Delta x_{m-1}}\left(\frac{0-\pi^{n-1}_m}{h} - \frac{\pi^{n-1}_m - \pi^{n-1}_{m-1}}{\Delta x_{m-1}}\right) \qquad \delta^2_{x^2}\pi^n_m = \frac{2}{\Delta x_m+\Delta x_{m-1}}\left(\frac{\pi^{n-1}_{m+1}-\pi^{n-1}_m}{\Delta x_m} - \frac{\pi^{n-1}_m-\pi^{n-1}_{m-1}}{\Delta x_{m-1}}\right)$$

FIG. 4.6 – θ-schémas et bords courbes — parties implicites

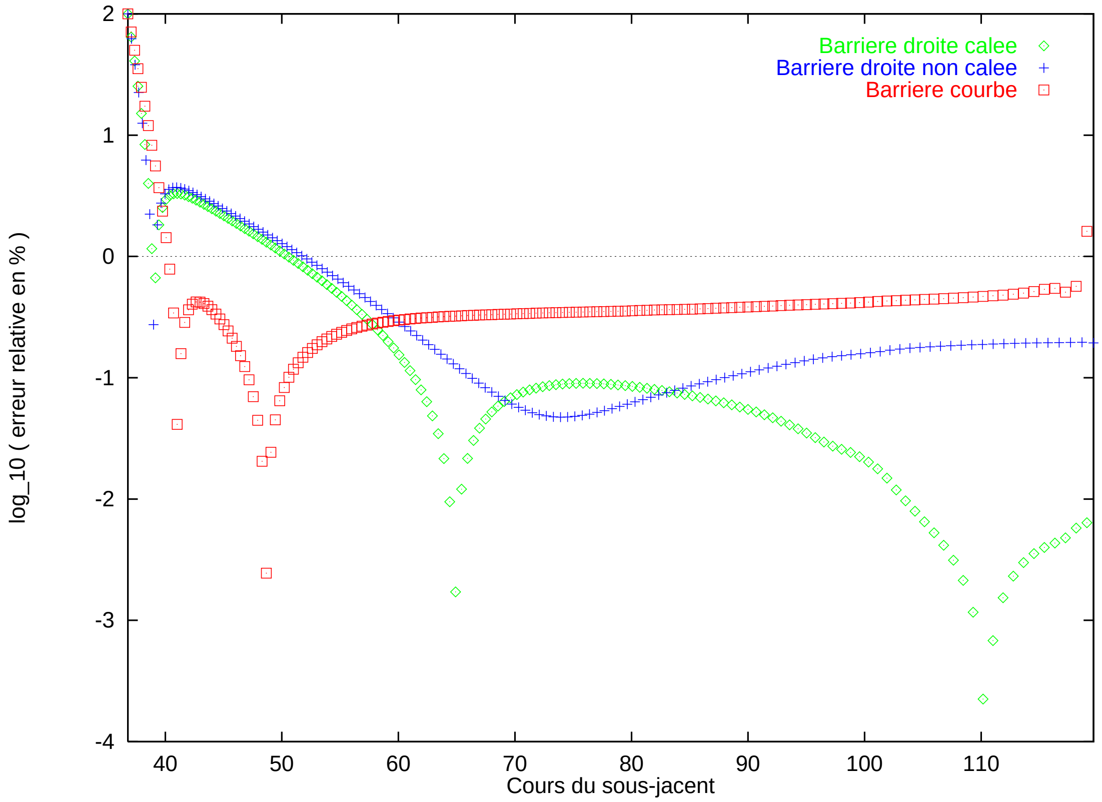


FIG. 4.7 – *Call* à barrière courbe — Évaluation par schéma de Crank-Nicholson calé à la barrière

4.2.2 Prolongement par antisymétrie

Afin de contourner les difficultés numériques liées au bord courbe, une approche alternative consiste à prolonger le problème à l'espace tout entier, par antisymétrie. C'est une "version *edp*" du *Lemme du miroir*, suivant lequel le Brownien et son opposé ont même loi, initialisés à l'origine [92].

Après changement de fonction inconnue, le problème (3.11) se ramène au problème (3.14) pour $\tilde{\Pi}$:

$$\left\{\begin{array}{c} \partial_t\tilde{\Pi} + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\tilde{\Pi} = 0 \ ; \ t < T, \, y \leq h_t = \ln(H_t) = \ln(\frac{\overline{H}}{S_0}) - r(t-t_0), \\ \tilde{\Pi}(T,y) = \tilde{\varphi}_K(y) = \hat{\varphi}_K(e^y)e^{-\frac{y}{2}} \\ \tilde{\Pi}(t,h_t) = 0 \ . \end{array}\right.$$

Définissons par imparité, pour $y > h_t$:

$$\tilde{\Pi}(t,y) := -\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \ .$$

En particulier :

$$\tilde{\Pi}(T,y) = -\tilde{\varphi}_K(2h_T - y). \tag{4.2}$$

Les dérivées en espace d'ordre pair et impair de la fonction ainsi prolongée sont antisymétriques et symétriques par rapport à la barrière, respectivement. Ainsi, dans tout l'espace :

$$\left\{\begin{array}{l} \tilde{\Pi}(t,y) = -\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \\ \partial_t\tilde{\Pi}(t,y) = -\partial_t\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) - 2h'_t\partial_y\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \\ \partial_y\tilde{\Pi}(t,y) = \partial_y\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \\ \partial_{y^2}\tilde{\Pi}(t,y) = -\partial_{y^2}\tilde{\Pi}(t,2h_t - y). \end{array}\right. \tag{4.3}$$

D'après l'équation (3.14) rappelée ci-dessus vérifiée par $\tilde{\Pi}$ pour $y \leq h_t$, et les formules de dérivation (4.3), $\tilde{\Pi}$ est solution de l'équation suivante dans tout l'espace :

$$\partial_t\tilde{\Pi}(t,y) + 2h'_t\partial_y\tilde{\Pi}(t,y)\mathbf{1}_{\{y>h_t\}} + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\tilde{\Pi}(t,y) = 0 \ . \tag{4.4}$$

En effet, (4.4) n'est autre que (3.14) pour $y \leq h_t$, tandis que pour $y > h_t$ on a d'après (4.3) :

$$\begin{aligned} &\partial_t\tilde{\Pi}(t,y) + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\tilde{\Pi}(t,y) \\ &\quad = -\partial_t\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) - 2h'_t\partial_y\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) - \frac{\sigma^2}{2}\partial_{y^2}\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \\ &\quad = -2h'_t\partial_y\tilde{\Pi}(t,2h_t - y) \\ &\quad = -2h'_t\partial_y\tilde{\Pi}(t,y) \ , \end{aligned}$$

d'après l'équation (3.14) appliquée en $2h_t - y < h_t$, et (4.3).

$\tilde{\Pi}$ vérifie donc bien (4.4) sur tout l'espace, ainsi que la condition terminale prolongée par antisymétrie de $\tilde{\varphi}_K$.

Commentaire 4.7 (Barrière courbe — Prol. par antisymétrie) *La Figure 4.8 représente les résultats obtenus par résolution numérique du problème 3.14 ainsi prolongé par antisymétrie. L'algorithme utilisé pour cette résolution numérique est le suivant.* $\tilde{\pi}^n$ *désignant les valeurs calculées pour l'étape n, à commencer par la condition terminale rendue* *antisymétrique si* $n = N_T$ *— équation (4.2), —* $\tilde{\pi}^{n-1}$ *est* l'antisymétrisée *(voir ci-dessous) de* $\tilde{\pi}^{n-\frac{1}{2}}$, *où* $\tilde{\pi}^{n-\frac{1}{2}}$ *est le résultat d'une itération (3.18) d'un schéma de Crank-Nicholson à partir de* $\tilde{\pi}^n$ *:*

$$\tilde{\pi}^{n-\frac{1}{2}} = (Id - \frac{\lambda A}{2})(Id + \frac{\lambda A}{2})^{-1}\tilde{\pi}^n.$$

Remarque 4.8 Par *antisymétrisée* d'une fonction f, on entend ici (trace sur le maillage en espace de la) prolongée par antisymétrie au-dessus de la barrière de la restriction de f en dessous — ou plutôt de l'interpolation linéaire de cette restriction (et 0 sur la barrière), si f n'est définie que sur le maillage en espace. Une telle antisymétrisation après chaque pas de diffusion discrétisée semble nécessaire pour obtenir des résultats numériques corrects par cette approche.

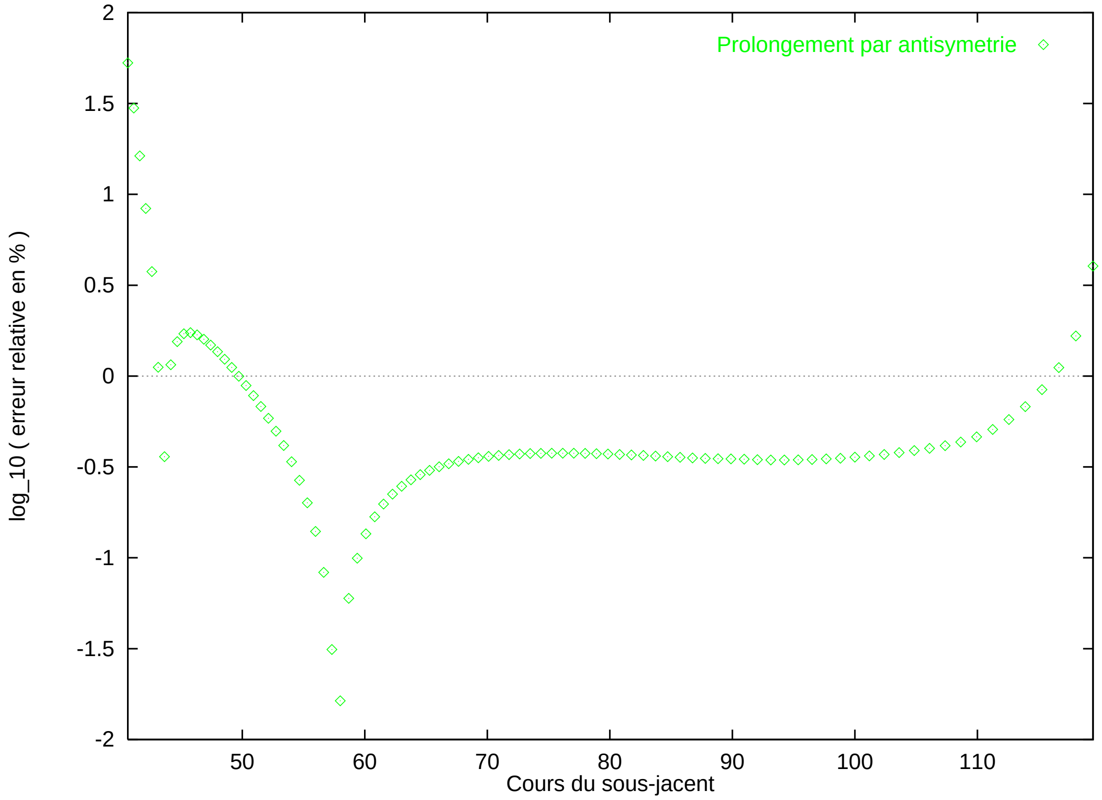


FIG. 4.8 – *Call* à barrière courbe — Schéma de Crank-Nicholson et prolongement par antisymétrie

On pourrait imaginer encore d'autres approches par différences finies, par exemple en passant en variables $(t, \frac{S}{H_t})$, dans lesquelles la barrière devient constante au niveau 1, moyennant l'introduction de termes du premier ordre supplémentaires dans l'*edp*. Cependant, la dégradation des résultats, observée dans les deux approches précédentes lorsqu'on "tord" la barrière, invite à aborder le problème des bords courbes plus frontalement, à l'aide d'éléments finis. Ainsi, à titre de comparaison avec ce qui précède, on présente maintenant une méthode d'éléments finis due à Jerôme Busca [43], pour l'évaluation du *call* européen à barrière *up out*.

4.2.3 Une méthode d'éléments finis

La méthode dont nous esquissons la présentation ici s'inspire de travaux concernant la résolution du *problème de Stefan* (Bonnerot-Jamet,Crank [38, 63]). Nous renvoyons à

Busca [43] pour des énoncés et des tests numériques plus détaillés.

Le principe est le suivant : on introduit la grille formée des trapèzes dont les sommets sont régulièrement distribués (en variables logarithmiques) entre les valeurs $\underline{y}$ et h_t pour $t = t_0,\ t_0+\Delta t, \cdots ,T$. Dans toute la suite, N_T et N_Y désignent respectivement le nombre de pas de temps et de pas d'espace. On note alors $t^n = t_0 + n\Delta t$, $y^n_m = \underline{y} + \frac{m}{N_Y} h_{t^n}$ pour $0 \leq n \leq N_T$ et $0 \leq m \leq N_Y$. On désigne par P^n_m le point de coordonnées (t^n,y^n_m), et par K^n_m le quadrilatère de sommets P^n_m, P^n_{m+1}, P^{n+1}_{m+1}, P^{n+1}_m (Figure 4.9). Tout point $P = (t,y) \in K^n_m$ est repéré par ses coordonnées barycentriques (ξ,η), i.e.

$$\begin{aligned} t &= (1-\xi)t^n + \xi t^{n+1} = t^n + \xi\Delta t, \\ y &= (1-\eta)\left((1-\xi)y^n_m + \xi y^{n+1}_m\right) + \eta\left((1-\xi)y^n_{m+1} + \xi y^{n+1}_{m+1}\right) \ . \end{aligned}$$

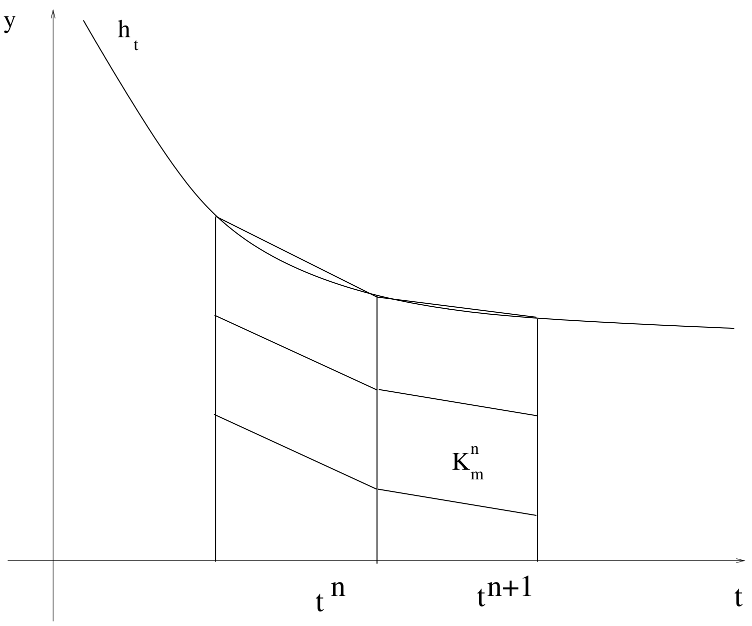


FIG. 4.9 – Eléments finis trapézoïdaux.

À toute fonction Φ définie sur K^n_m, on associe $\hat{\Phi}$ définie sur $[0,1] \times [0,1]$ telle que $\hat{\Phi}(\xi,\eta) = \Phi(t,x)$.

Après localisation, moyennant (mettons) une conditon de Neumann homogène au bord inférieur en espace du domaine, le problème d'évaluation de l'option à barrière courbe H_t s'écrit en variables logarithmiques :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \check{\Pi} + \left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)\partial_y \check{\Pi} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \partial^2_{y^2}\check{\Pi} & = & r\check{\Pi} \\ \check{\Pi}(t,h_t) & = & 0 \\ \partial_y \check{\Pi}(t,\underline{y}) & = & 0 \\ \check{\Pi}(T,\underline{y}) & = & (e^y - K)^+ \ . \end{array} \right. \qquad (4.5)$$

Ce problème admet la formulation faible suivante :

$$
\begin{aligned}
&\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\underline{y}}^{h_t} \check{\Pi}\partial_t\Phi + \frac{\sigma^2}{2}\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\underline{y}}^{h_t} \partial_y\check{\Pi}\partial_y\Phi \\
&+ \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\underline{y}}^{h_t} \check{\Pi}\partial_y\Phi + r\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\underline{y}}^{h_t} \check{\Pi}\Phi \\
&- \int_{\underline{y}}^{h_{t^{n+1}}} \check{\Pi}(t^{n+1},y)\Phi(t^{n+1},y)dy + \int_{\underline{y}}^{h_{t^n}} \check{\Pi}(t^n,y)\Phi(t^n,y)dy \ = \ 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

pour toute fonction-test Φ régulière s'annulant en $y = \overline{y}$ et $y = h_t$.

On cherche alors $\check{\Pi}$ dans l'espace des fonctions dont la restriction à chaque trapèze est un polynôme de degré un par rapport à chaque variable barycentrique. Pour chaque m, on teste la relation (4.6) sur la fonction $\Phi^{(m)}$ de cet espace qui vérifie $\Phi^{(m)}(P_l^n) = \delta_{m,l}$. En utilisant la formule de quadrature

$$
\int\int_{[0,1]\times[0,1]} \hat{\Psi}(\eta,\xi)d\eta d\xi \simeq \frac{1}{4}\sum_{s=1}^{4} \hat{\Psi}(\hat{P}_s) \ ,
$$

où $\{\hat{P}_s\}$, $s = 1, \cdots 4$ désigne les sommets du carré unité $[0,1]\times[0,1]$, on montre facilement que (4.6) conduit au schéma suivant :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{4}\left(\left(y_{m+1}^{n+1} - y_{m+1}^n\right)\left(\pi_{m+1}^n + \pi_{m+1}^{n+1}\right) - \left(y_{m-1}^{n+1} - y_{m-1}^n\right)\left(\pi_{m-1}^n + \pi_{m-1}^{n+1}\right)\right) \\
&\quad -\frac{1}{2}\left(\left(y_{m+1}^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}\right)\pi_m^{n+1} - \left(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n\right)\pi_m^n\right) \\
&-\frac{\sigma^2\Delta t}{4}\left(\frac{\pi_{m+1}^n - \pi_m^n}{y_{m+1}^n - y_m^n} - \frac{\pi_m^n - \pi_{m-1}^n}{y_m^n - y_{m-1}^n} + \frac{\pi_{m+1}^{n+1} - \pi_m^{n+1}}{y_{m+1}^{n+1} - y_m^{n+1}} - \frac{\pi_m^{n+1} - \pi_{m-1}^{n+1}}{y_m^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}}\right) \\
&\quad + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(-\frac{\Delta t}{4}\right)\left(\left(\pi_{m+1}^n - \pi_{m-1}^n\right) + \left(\pi_{m+1}^{n+1} - \pi_{m-1}^{n+1}\right)\right) \\
&\quad + \frac{r\Delta t}{4}\left(\pi_m^n\left(y_{m+1}^n - y_{m-1}^n\right) + \pi_m^{n+1}\left(y_{m+1}^{n+1} - y_{m-1}^{n+1}\right)\right) = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Dans le cas d'une grille droite, on a $y_m^{n+1} = y_m^n$, $y_{m+1}^{n+1} = y_{m+1}^n = y_m^n + \Delta y$ et $y_{m-1}^{n+1} = y_{m-1}^n = y_m^n - \Delta y$. Le schéma (4.7) ci-dessus se réduit alors à :

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\pi_m^{n+1} - \pi_m^n}{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{4}\left(\frac{\pi_{m+1}^n - 2\pi_m^n + \pi_{m-1}^n}{(\Delta y)^2} + \frac{\pi_{m+1}^{n+1} - 2\pi_m^{n+1} + \pi_{m-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2}\right) \\
&\quad + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\left(-\frac{1}{4\Delta y}\right)\left(\left(\pi_{m+1}^n - \pi_{m-1}^n\right) + \left(\pi_{m+1}^{n+1} - \pi_{m-1}^{n+1}\right)\right) \\
&\quad + \frac{r}{2}\left(\pi_m^n + \pi_m^{n+1}\right) = 0 \ ,
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

qui n'est autre que le schéma de Crank-Nicholson. On voit ainsi que la prise en compte du bord courbe se traduit simplement par l'introduction de termes correctifs. Le caractère tridiagonal du schéma de Crank-Nicholson est préservé. On résout alors (4.7) par la méthode du pivot de Gauss, ce qui donne un coût de résolution linéaire, en N_Y par pas de temps.

Busca [43] valide cette méthode sur plusieurs types d'options. Nous présentons à titre d'exemple une comparaison des erreurs relatives obtenues pour l'évaluation d'un *call* européen à barrière *up out* constante[3] à l'aide des deux méthodes suivantes :

3. Pour lequel on dispose de formules explicites, voir plus haut.

— la méthode de différences finies pour (4.5) ;
— la méthode d'éléments finis pour l'équation transformée en variables "chaleur" (pour laquelle la barrière est une fonction affine du temps).

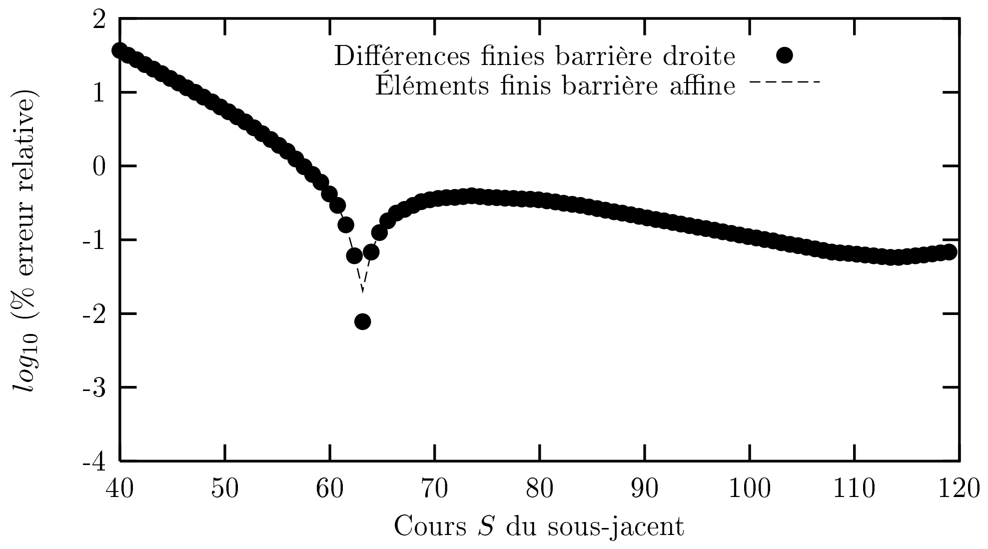


FIG. 4.10 – *Call* à barrière courbe *up out* — Évaluation par une méthode d'éléments finis.

On n'observe pratiquement aucune dégradation de l'erreur due à la présence du bord variable en temps (Figure 4.10). Des tests effectués sur d'autres types de barrières (polynômes, fonctions exponentielles) montrent que l'erreur due au bord courbe est faible, et croît bien sûr en fonction de la courbure du bord [43].

4.3 Détermination de la frontière d'exercice d'un *put* américain

L'exercice anticipé du *call* américain d'échéance T et prix d'exercice K est toujours sous-optimal. En effet, C désignant le prix de ce *call* à une date fixée $t < T$, tandis que c et p désignent respectivement les prix des *call* et *put* européens de même échéance et prix d'exercice, on a par positivité de p avant T :

$$C \geq c > c - p = S - Ke^{-r(T-t)} \geq S - K ,$$

par parité *call-put*. L'étude du *call* américain se confond donc avec celle de son homologue européen. Ainsi passe-t-on directement à l'étude du *put* américain.

4.3.1 Calcul par différences finies

Le *put* américain correspond au problème (2.5), (2.7), pour la fonction de gain et obstacle :

$$\varphi(S) = \varphi^K(S) := (K - S)^+ .$$

Pour une étude détaillée de ce problème, non linéaire et beaucoup plus difficile que son analogue européen, on renvoie à Jaillet-Lamberton-Lapeyre et Bensoussan-Lions [91, 24]. En particulier il n'y a pas de formule explicite. On sait seulement que la valeur recherchée est l'unique solution de viscosité (continue, mais même ici $\mathcal{C}^1$ en espace) de l'inéquation variationnelle associée, à croissance polynomiale (en S, localement uniformément en t) [18, 108].

Commentaire 4.9 *Les Figures 4.11, 4.12 et 4.13 représentent les frontières d'exercice calculées sur divers maillages, à l'aide de différents θ-schémas, utilisés dans des méthodes de Trotter (§3.2). Sur ce problème particulier du* put *américain, ces méthodes sont mieux connues sous le nom d'algorithmes de type* Brennan-Schwartz *[91, 40]. En l'absence de formule explicite pour ce problème, la courbe ainsi obtenue à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson — $\theta = \frac{1}{2}$ dans la méthode ci-dessus, — pour $N_T = 500$ fois $N_Y = 1001$ points de discrétisation, sert de référence pour les autres calculs. Le schéma explicite Figure 4.13 montre les limites que l'on prévoyait (§1) lorsqu'on sort du cadre de la linéarité : le résultat correspondant est extrêmement grossier, même avec $N_T = 500$ fois $N_Y = 1001$ nœuds de discrétisation.*

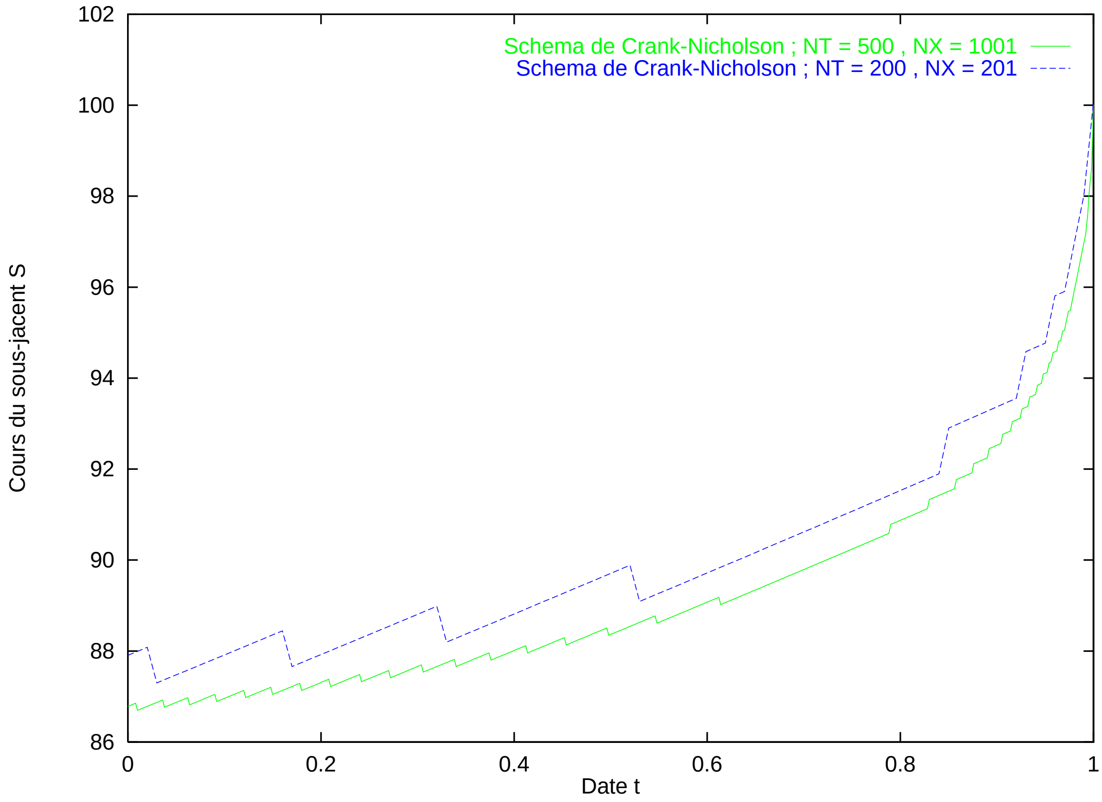


FIG. 4.11 – *Put* américain — Frontière d'exercice calculée à l'aide d'une méthode de Trotter utilisant un schéma de Crank-Nicholson

L'irrégularité de la frontière d'exercice ainsi calculée (quel que soit le θ-schéma impliqué) invite à envisager d'autres méthodes. Par différences finies, il existe des approches plus performantes : itération sur les politiques, ou *algorithme d'Howard-Bellman* [109]. Évoquons plutôt une approche par éléments finis.

4.3.2 Une méthode d'éléments finis pour le *put* américain

L'utilisation d'éléments finis pour la finance à déjà fait l'objet d'une discussion générale (§2.1) et d'une tentative pour l'évaluation du *call* à barrière courbe *up out* (méthode de J. Busca [43] d'après Bonnerot-Jamet [38], voir §4.2.3). Or, l'algorithme de type éléments finis utilisé pour ce calcul peut s'adapter au problème du calcul d'une frontière d'exercice.

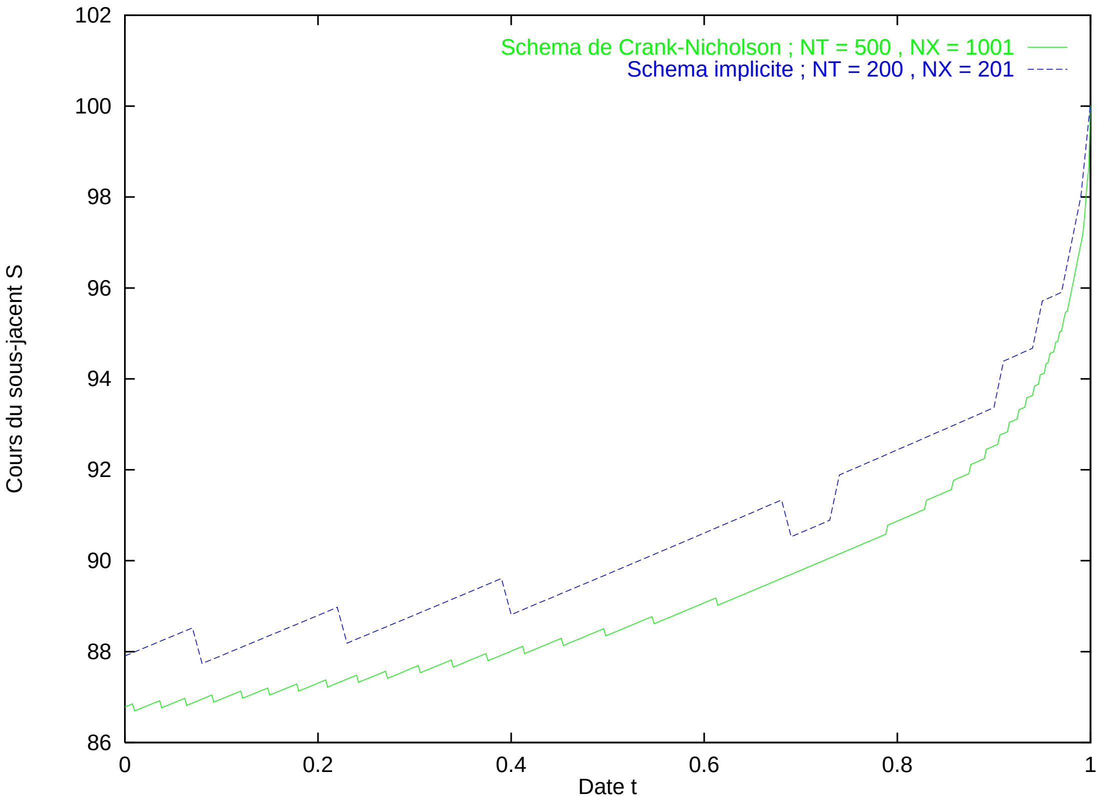


FIG. 4.12 – *Put* américain — Frontière d'exercice calculée à l'aide d'une méthode de Trotter implicite

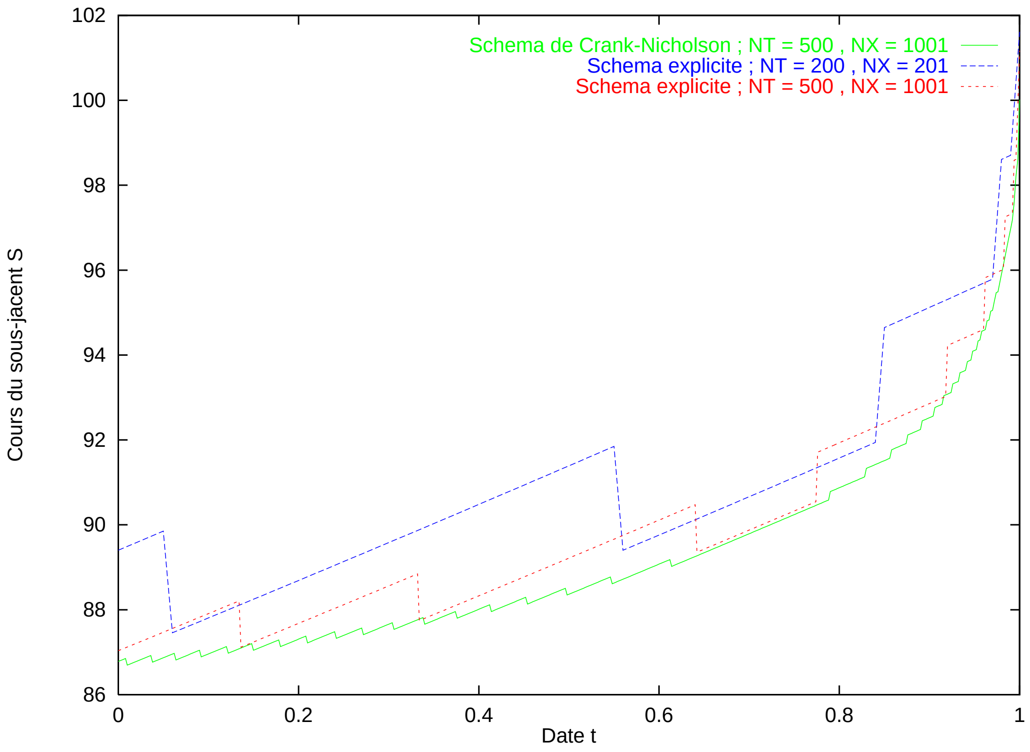


FIG. 4.13 – *Put* américain — Frontière d'exercice calculée à l'aide d'une méthode de Trotter explicite

On profite alors de ces éléments finis pour resserrer la grille au voisinage de la frontière d'exercice, dont la position approximative aura été calculée au préalable par un algorithme aux différences finies. Pour plus de détails, voir Busca [43].

À titre d'exemple, on peut observer Figure 4.14 la frontière d'exercice donnée par cette méthode d'éléments finis pour $N_Y = 450$ fois $N_T = 200$ points de discrétisation.

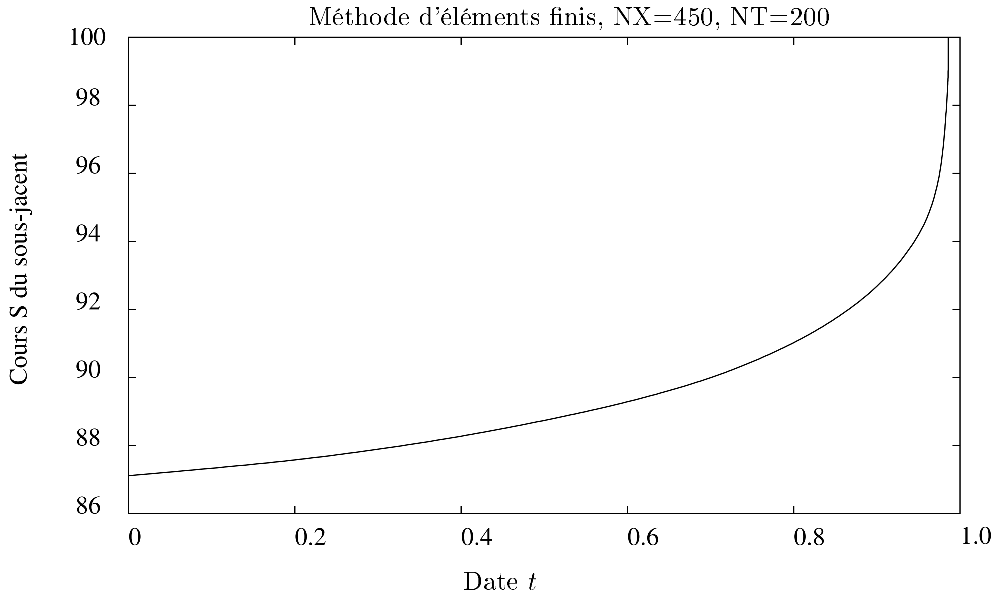


FIG. 4.14 – *Put* américain — Frontière d'exercice calculée par une méthode d'éléments finis

4.4 Évaluation d'une digitale

On considère à présent une option digitale *up in*, d'échéance T et prix d'exercice K, dont le prix $D_{T,K}(t,S)$ dans le modèle de Black-Scholes, explicitement connu (voir Annexe C), est la solution du problème de Cauchy (2.4) en temps rétrograde, admettant pour condition terminale la *fonction de Heaviside* en K :

$$\varphi(S_T) = H_K(S_T) := \mathbf{1}_{\{S_T \geq K\}} \ . \tag{4.9}$$

Rapportant tout ou rien suivant que le cours du sous-jacent se situe de part ou d'autre du prix d'exercice à l'échéance, une telle option est particulièrement spéculative. Elle a aussi à voir avec le *delta* d'un *call*.

4.4.1 Calcul direct

La discontinuité de la condition terminale (4.9) fait apparaître une nouvelle difficulté sur le plan numérique. En effet, voici (Tableau 4.2) les erreurs obtenues lors de la résolution numérique de (2.4) pour la condition terminale 4.9, à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson, et pour les valeurs par défaut des paramètres — sauf $r = 0$, le prix de la digitale s'interprétant alors comme une probabilité, voir Annexe C : dans ces conditions la valeur de l'option fournie par la formule explicite vaut 0.460127 à 10^{-6} près.

Pour diminuer ces erreurs, on propose deux améliorations successives :
— on peut tout d'abord résoudre un problème approché correspondant à une condition terminale H_K^ε lissée de H_K ;

$N_T \times N_Y$	50×101	100×399
% erreur relative	9.1	2.3

TAB. 4.2 – *Évaluation d'une digitale — Calcul direct*

— on peut aussi procéder à des intégrations par parties, s'inspirant de certains usages du Calcul de Malliavin pour les méthodes de Monte-Carlo [78].

Dans un cas comme dans l'autre, on est ainsi ramené à une condition terminale continue. Ces idées présentent un caractère générique. Nous les présentons ici sur un exemple; elles ont fait par ailleurs à la CAR l'objet d'un travail spécifique (M. Benchekroun, sous la direction de H. Berestycki [23]).

4.4.2 Lissage

Confronté à l'erreur numérique liée à la discontinuité de H_K, on peut tout d'abord penser à résoudre l'équation (2.4) pour une condition terminale régulière H_K^ε qui approche H_K. On introduit alors une erreur systématique, mais on diminue l'erreur numérique. Pour donner une idée du bilan possible d'une telle opération, on a calculé numériquement $D_{T,K}^\varepsilon$, solution de (2.4) pour la condition terminale H_K^ε coïncidant avec H_K à l'extérieur d'un intervalle $I := [K-\varepsilon, K+\varepsilon]$, tandis que pour $S \in I$:

$$H_K^\varepsilon(S) \ := \ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\frac{(S-K)}{\varepsilon} - \frac{1}{4}\frac{(S-K)^3}{\varepsilon^3} \ ,$$

ε étant fixé de façon heuristique à 50.

Le Tableau 4.3 donne l'erreur relative en % de $D_{T,K}^\varepsilon(t_0,S_0)$, évalué numériquement à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson, par rapport à la valeur pour $D_{T,K}(t_0,S_0)$, calculée à l'aide de la formule explicite.

$N_T \times N_Y$	$\mathbf{50 \times 101}$	$\mathbf{100 \times 399}$
% erreur relative	6.8	6.7

TAB. 4.3 – *Évaluation d'une digitale — Lissage*

La comparaison des Tableaux 4.2 et 4.3 montre qu'avec peu de points de discrétisation, la résolution pour la condition terminale H_K^ε a déjà convergé. Cependant, l'erreur systématique place la valeur numérique ainsi obtenue à environ 7% de la valeur exacte pour la condition terminale non lissée H_K.

4.4.3 Intégration par parties

Comme évoqué plus haut, une deuxième technique s'inspire de certains usages du Calcul de Malliavin pour améliorer le calcul des Grecs par méthode de Monte-Carlo [78]. L'idée est d'intégrer par parties la condition limite singulière par rapport à un noyau approprié, après une éventuelle localisation des singularités. En procédant ainsi, on résorbe en grande partie l'imprécision numérique liée à la présence de ces singularités.

Ainsi, notons

$$h_{t_0,S_0}(T,S) \ := \ -\frac{\partial_S l_{t_0,S_0}(T,S)}{l_{t_0,S_0}(T,S)} \ ,$$

où l est la densité de la loi de S dans le modèle de Black-Scholes (2.1) (voir Annexe C). Soit $D^{t_0,S_0}_{T,K}$ la solution de (2.4), pour la condition terminale — continue :

$$\varphi(S) = h_{t_0,S_0}(T,S)\varphi_K(S) \ .$$

Alors, $D^{t_0,S_0}_{T,K}$ et $D_{T,K}$ coïncident en (t_0,S_0). En effet, par parties :

$$\begin{aligned}
D_{T,K}(t_0,S_0) &= e^{-r(T-t_0)} E^{t_0,S_0}_P H_K(S_T) \\
&= e^{-r(T-t_0)} \int_{S=0}^{+\infty} H_K(S) l_{t_0,S_0}(T,S)\, dS \\
&= -e^{-r(T-t_0)} \int_{S=0}^{+\infty} \varphi_K(S) \partial_S l_{t_0,S_0}(T,S)\, dS \\
&= e^{-r(T-t_0)} E^{t_0,S_0}_P h_{t_0,S_0}(T,S_T)\varphi_K(S_T) = D^{t_0,S_0}_{T,K}(t_0,S_0) \ ,
\end{aligned}$$

par une formule de type Feynman-Kac supposée valide pour ce problème.

À titre d'illustration, on a calculé numériquement à l'aide d'un schéma de Crank-Nicholson l'erreur obtenue pour $D^{t_0,S_0}_{T,K}(t_0,S_0) = D_{T,K}(t_0,S_0)$ (Tableau 4.4).

$N_T \times N_Y$	50×101	100×399
% erreur relative	-1.8	-0.012

TAB. 4.4 – *Évaluation d'une digitale — Intégration par parties*

4.4.4 Localisation des singularités

Si $\Delta_{T,K}$ désigne la solution de (2.4) pour la condition terminale (discontinue) $H_K - H^\varepsilon_K$, on a par linéarité :

$$D_{T,K} \quad \equiv \quad D^\varepsilon_{T,K} + \Delta_{T,K} \ .$$

De plus, avec les notations du §4.4.3 :

$$\Delta_{T,K}(t_0,S_0) \quad = \quad \Delta^{t_0,S_0}_{T,K}(t_0,S_0) \ .$$

En évaluant le terme correctif $\Delta^{t_0,S_0}_{T,K}(t_0,S_0)$ par parties, comme au §4.4.3, et en ajoutant le résultat à la valeur numérique obtenue pour $D^\varepsilon_{T,K}(t_0,S_0)$ au §4.4.2, on obtient une nouvelle valeur approchée pour $D_{T,K}(t_0,S_0)$.

Le Tableau 4.5 synthétise les pourcentages d'erreurs relatives obtenues par les quatre approches exposées ci-dessus. Les erreurs obtenues par localisation des singularités sont extrêmement faibles.

Il faut cependant apporter deux réserves concernant les techniques d'intégration par parties des §4.4.3 et §4.4.4. Premièrement, il s'agit de techniques locales, qui fournissent un bon résultat en un point de la grille fixé d'avance, supposé nous intéresser particulièrement, par exemple la phase courante, au détriment de la précision ailleurs qu'en ce point. Deuxièmement, on utilise la connaissance explicite des lois de probabilité dans le modèle.

Remarque 4.10 Ces astuces de calcul ne dispensent pas d'une analyse de l'erreur due à la singularité de la condition terminale H_K (§4.4.1), ou $h\varphi_K$ / son analogue localisé (§4.4.3 / 4.4.4). Une telle analyse peut de fait être menée, en reprenant des arguments de Thomée [131] (voir fin §3.2).

$N_T \times N_Y$	50×101	100×399
Calcul direct	9.1	2.3
Lissage	6.8	6.7
Intégration par parties	-1.8	-0.012
Localisation	- 0.16	$6.5\ 10^{-4}$

TAB. 4.5 – *Évaluation d'une digitale — Localisation des singularités*

Remarque 4.11 Pour toutes les expériences numériques présentées dans cette section, on a utilisé un schéma de Crank-Nicholson, après changement de variables logarithmique. Le choix d'un tel schéma, pour résoudre des équations pouvant comporter des conditions terminales discontinues — fonction de gain d'une digitale, — n'est pas forcément le plus judicieux. En effet, on a vu (Remarque 3.3.b) que ce schéma était à la limite de la stabilité vis-à-vis des modes de fréquences élevées — du moins l'avait-on alors constaté sur l'équation de la chaleur, pour les grandes valeurs de $\lambda = \sigma^2 \frac{\Delta t}{(\Delta y)^2}$. Or une condition terminale discontinue comporte nécessairement de tels modes.

4.5 Évaluation d'un *call* européen dans un modèle à volatilité stochastique

Cette section vise à donner une idée du comportement du solveur SNOOΠ, dans un cadre bidimensionnel. Comme on l'a déjà vu au §3.2, SNOOΠ utilise alors une méthode de directions alternées, implicite dans les directions successives d'espaces.

On considère le modèle de Black-Scholes à volatilité stochastique suivant :

$$\begin{cases} dS_s = S_s(rds + \sigma(Y_s)dW_s), \quad S_t = S \\ dY_s = \eta(Y_s)ds + \gamma dW_s^Y, \quad Y_t = Y \\ d < W,W^Y >_s = \rho ds \ , \end{cases}$$

où

$$\sigma(y) \ := \ \exp(y)\ \mathbf{1}_{\{y \le M\}}\ , \qquad \eta(y) \ := k\ (c-y)\ ,$$

— M constante "grande". Dans ce modèle, introduit dans Fournié-Lasry-Touzi [80] et motivé par des travaux empiriques de la littérature financière, k, c et γ désignent respectivement le coefficient de rappel, la valeur moyenne et la volatilité de la volatilité ; ρ est la corrélation entre le prix du sous-jacent et la volatilité.

L'équation de Kolmogorov d'évaluation du *call* européen[4] s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t \Pi + rS\partial_S \Pi + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{S^2}\Pi + \eta(Y)\partial_Y \Pi + \frac{1}{2}\gamma^2\partial^2_{Y^2}\Pi + \rho\gamma S\sigma(Y)\partial^2_{SY}\Pi = r\Pi, \ t < T \\ \Pi(T,S) = (S-K)^+. \end{cases}$$

On n'a pas de formule explicite pour ce problème. On a résolu numériquement pour $N_T = 52$ pas de discrétisation en temps, fois $N_Y = 140$ pas dans la première direction d'espace (après changement de variables centrant), fois $N_Y = 40$ dans la deuxième direction en espace. On a obtenu par une méthode de directions alternées la valeur 13.5407, pour les valeurs autres que par défaut des paramètres fournies au Tableau 4.6.

Pour ces mêmes spécifications, le prix de l'option, calculé dans [80, §5.2] par une méthode de Monte-Carlo mettant en œuvre des accélérateurs appropriés, a convergé vers

4. On n'approfondira pas ici les liens existants entre la valeur du *call* dans un tel modèle, de marché qui n'est plus complet, et "la" solution — dans un sens qui resterait a préciser — de cette "*edp* d'évaluation"; voir Hull-White [86].

$\sigma(Y_0)$	k	c	ρ	γ
20%	0.7	-1.6	0.3	0.5

TAB. 4.6 – *Modèle à volatilité stochastique*

la valeur 13.625 à 10^{-4} près au bout de 10^4 trajectoires. Pour comparaison, la valeur correspondante dans un modèle de Black-Scholes à volatilité constante $\sigma \equiv \sigma(Y^0)$ serait de 13.270.

Chapitre 5

Évaluation d'un *put* asiatique

Le gain des options asiatiques dépend du cours moyen du sous-jacent, et non plus seulement de son cours terminal. Ce sont donc des options *path dependent*. Elles ont été introduites pour lutter contre la manipulation des cours au voisinage de l'échéance. Elles sont donc moins spéculatives et souvent moins chères que les options régulières (même si le prix d'un *call* asiatique européen de prix d'exercice K suffisamment faible peut être inférieur au prix du *call* européen standard, dans le cas d'un sous-jacent avec dividende $q > r$, voir Geman-Yor [84]). Elles sont en outre une réponse plus adaptée à certains besoins. Ainsi, à l'échéance T, une entreprise dotée d'un *call* asiatique (européen) approprié, peut choisir de payer $K(T - \underline{t})$, plutôt que le cours cumulé de S entre $\underline{t}$ et T, en échange d'un flux rentrant d'une unité de sous-jacent par unité de temps pendant la période $[\underline{t},T]$. Les options asiatiques sont en revanche plus difficiles à évaluer que les options régulières. En particulier, elles admettent rarement une formule explicite. On dispose par exemple d'une expression analytique pour la transformée de Laplace du prix du *call* asiatique européen, mais cette expression est difficile à inverser numériquement [84]. Les options asiatiques font donc partie des options exotiques et sont souvent échangées sur des marchés de gré à gré.

Le but principal de ce Chapitre est l'étude mathématique du *put* asiatique (à prix d'exercice fixé, le plus courant) américain. Cette étude débouche sur la nécessité de calculer une limite distinguée dans la solution d'une inéquation variationnelle d'évolution à deux dimensions d'espace. En préliminaire, on étudie tout d'abord le problème du *put* asiatique européen, en rappelant l'approche de Rogers-Shi [120].

Dans toute cette section, $\underline{t}$ désigne la date de souscription de l'option. On considère alors un point courant (t_0,S_0), correspondant à une date t_0 intermédiaire entre la date de souscription $\underline{t}$ et la date d'échéance T de l'option.

5.1 *Put* asiatique européen

C'est l'option européenne générant à la date d'exercice T le flux suivant :

$$\varphi((S_t)_{\underline{t}\leq t\leq T}) = \left(K - \frac{\int_{\underline{t}}^T S_t dt}{T-\underline{t}}\right)^+ . \tag{5.1}$$

Par prix du *put* asiatique européen à la phase courante (t_0,S_0), on entendra

$$e^{-r(T-t_0)} E_P^{t_0,S_0} \left(K - \frac{\int_{\underline{t}}^{t_0} S_t dt + \int_{t_0}^T S_t dt}{T-\underline{t}}\right)^+ . \tag{5.2}$$

5.1.1 *Edp* bidimensionnelle

Le flux φ défini par (5.1) dépendant de toute la trajectoire du processus $(S_t)_{\underline{t}\leq t\leq T}$, il semble nécessaire, pour rendre le système Markovien et exprimer le prix du *put* en termes d'*edp*, d'introduire une variable d'espace supplémentaire. Cette variable, que nous noterons I, correspond, dans un sens qui sera précisé par l'*edp* d'évaluation (5.5), au processus *intégrale de* S, noté $(I_t)_{t\geq t_0}$, tel que par définition :

$$dI_t \;=\; S_t dt, \quad t \geq t_0 \;; \qquad I_{t_0} \;=\; I_0 > 0. \tag{5.3}$$

Avec cette notation, le flux terminal (5.1) se réécrit :

$$\varphi(I_T) = \left(K - \frac{I_T}{T - \underline{t}}\right)^+ ,$$

pour la condition initiale :

$$I_0 = \int_{\underline{t}}^{t_0} S_t dt \;. \tag{5.4}$$

Considérons alors le problème de Cauchy suivant, sur $[\underline{t},T] \times \mathbb{R}_+^{\star 2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Pi + \mathcal{L}_{S,I}\Pi = r\Pi, \;\; \underline{t} \leq t < T \\ \Pi(T,S,I) = \varphi(I) \;, \end{array} \right. \tag{5.5}$$

où par définition :

$$\mathcal{L}_{S,I} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial^2_{S^2} + rS\partial_S + S\partial_I \equiv \mathcal{L}_S + S\partial_I. \tag{5.6}$$

On n'aurait pas de mal (en raisonnant comme à la Proposition 5.8 à venir, en plus simple, pour la continuité a priori, et en invoquant les résultats généraux de Ishii-Lions [89] pour l'unicité) à établir directement la Proposition suivante — mais on a plus vite fait d'appliquer une formule de Feynman-Kac généralisée disponible dans la théorie des équations différentielles stochastiques rétrogrades (voir El Karoui *et al.* [70]).

Proposition 5.1 *Lorsque* (t_0,S_0,I_0) *varie dans* $[\underline{t},T] \times \mathbb{R}_+^{*\,2}$,

$$\Pi(t_0,S_0,I_0) \;\equiv\; e^{-r(T-t_0)}\; E_P^{t_0,S_0}\left(K - \frac{I_T}{T-\underline{t}}\right)^+$$

(= le prix de l'option si $I_0 = \int_{t=\underline{t}}^{t_0} S_t dt$*) est l'unique solution de viscosité bornée du problème de Cauchy en temps rétrograde (5.5).*

Preuve Sauf le caractère borné qui est évident sur la représentation probabiliste, cet énoncé rentre en effet dans le champ du Théorème 4.2 *in* El Karoui *et al.* [70].

□

5.1.2 *Scaling*

D'après Rogers-Shi [120], on peut tirer parti d'une propriété d'*invariance par changement d'échelle* (*scaling*), pour ramener le calcul du *put* asiatique européen à celui d'une *edp* unidimensionnelle. Reprenons ceci dans nos notations.

I_t^T désignant le processus intégrale de S initialisé à $-K(T-\underline{t}) + \int_{\underline{t}}^{t_0} S_t dt$ en t_0, $\mathcal{F}_t$ désignant "l'information disponible à la date t" (supposée complète), le prix (non actualisé) de l'option est une martingale,

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}_t &:= E_P\{(K - \frac{1}{T-\underline{t}}\int_{\underline{t}}^T S_u du)^+ | \mathcal{F}_t\} \\
&= S_t E_P\left\{\left(\frac{K(T-\underline{t}) - \int_{\underline{t}}^t S_u du}{(T-\underline{t})S_t} - \frac{1}{T-\underline{t}}\int_t^T \left(\frac{S_u}{S_t}\right) du\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right\} \\
&= S_t E_P\left\{\left(\frac{-I_t^T}{(T-\underline{t})S_t} - \frac{1}{T-\underline{t}}\int_t^T \left(\frac{S_u}{S_t}\right) du\right)^+ \middle| \mathcal{F}_t\right\} \\
&=: S_t \; \Phi(t,\eta_t^T) \;,
\end{aligned}$$

où

$$\eta_t^T = \frac{-I_t^T}{(T-\underline{t})S_t} \;, \qquad d\eta_t^T = -\,\eta_t^T(\sigma dW_t + (r-\sigma^2)dt) - \frac{dt}{T-\underline{t}} \;, \quad t > t_0 \;.$$

Appliquant la formule de Itô à la fonctionnelle — supposée suffisamment régulière — $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}(]\underline{t},T[\times\mathbb{R}_+^*)$, on obtient à une martingale locale près ($\doteq$), en notations multiplicatives (voir Annexe B) et en "oubliant" l'indice supérieur T, pour alléger les notations :

$$\begin{aligned}
d\tilde{\Pi} &= \Phi dS + S\left(\partial_t\Phi dt + \partial_\eta\Phi d\eta + \frac{1}{2}\partial_{\eta^2}^2\Phi\sigma^2\eta^2 dt\right) + dS\; d\Phi \\
&\doteq \Phi r S dt + S dt\left(\partial_t\Phi + \partial_\eta\Phi\left(\frac{-1}{T-\underline{t}} - r\eta + \sigma^2\eta\right) + \frac{\sigma^2\eta^2}{2}\partial_{\eta^2}^2\Phi\right) - S\sigma^2\eta\partial_\eta\Phi dt \\
&= S dt\left(r\Phi + \partial_t\Phi - \left(r\eta + \frac{1}{T-\underline{t}}\right)\partial_\eta\Phi + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2\partial_{\eta^2}^2\Phi\right) \;,
\end{aligned}$$

qui est donc identiquement nul, puisque $\tilde{\Pi}$ est une martingale. D'où le prix de l'option (dûment actualisé) :

$$e^{-r(T-t)}\tilde{\Pi}_t = S_t e^{-r(T-t)}\Phi(t,\eta_t) =: S_t\Psi(t,\eta_t) \;,$$

où

$$\left\{\begin{array}{lcl}
\partial_t\Psi - \left(r\eta + \frac{1}{T-t}\right)\partial_\eta\Psi + \frac{1}{2}\sigma^2\eta^2\partial_{\eta^2}^2\Psi &=& 0 \\
\Psi(T,\eta) &=& \eta^+ \;.
\end{array}\right.$$

On est ainsi ramené à une équation unidimensionnelle non dégénérée pour calculer le prix du *put* asiatique européen en toute phase (t,S), où t est compris (au sens large) entre $\underline{t}$ et T.

Remarque 5.2 Plus généralement, sur la possibilité (au moins théorique) de ramener une *edp* dégénérée à une *edp* non dégénérée en dimension inférieure d'espace, on renvoie à Barraquand [19].

5.2 *Put* asiatique américain

Le *put* asiatique américain est identique au *put* américain du §4.3, à ceci près que le flux correspondant à un temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t_0,T]$ est maintenant le suivant :

$$\varphi((S_t)_{\underline{t}\leq t\leq T}) = \left(K - \frac{\int_{\underline{t}}^{\tau} S_t dt}{\tau - \underline{t}}\right)^+ . \tag{5.7}$$

Par prix de cette option au point d'intérêt (t_0,S_0), on entendra :

$$\sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[t_0,T]}} E_P^{(t_0,S_0)} \left\{ e^{-r(\tau-t_0)} \left(K - \frac{\int_{\underline{t}}^{t_0} S_t dt + \int_{t_0}^{\tau} S_t dt}{\tau - \underline{t}}\right)^+ \right\} . \tag{5.8}$$

Comme on l'avait déjà évoqué au §4.3, la présence du temps d'arrêt τ, ou encore la possibilité d'exercice anticipé de l'option, complique considérablement le problème mathématique et numérique.

Remarque 5.3 Pour tout τ entre t_0 et T,

$$\frac{\int_{\underline{t}}^{\tau} S_t dt}{\tau - \underline{t}} \tag{5.9}$$

se réécrit $S_{\tau'}$ pour un τ' entre $\underline{t}$ et τ, par la formule des accroissements limités. D'où une analogie entre ce *put* asiatique américain et le *put* américain standard.

Mais le fait que τ soit un temps d'arrêt n'entraîne pas la même propriété pour τ'. A fortiori il est encore moins vrai que τ' décrit l'ensemble des temps d'arrêts avec τ. De plus il faut faire attention à la singularité en $\tau = t_0$ lorsque $t_0 = \underline{t}$.

5.2.1 *Edp* bidimensionnelle

De même que dans le cas européen, le flux (5.7) se réécrit à l'aide du processus intégrale de S (5.3), et de la condition initiale (5.4) :

$$\varphi(\tau,I_\tau) = \left(K - \frac{I_\tau}{\tau - \underline{t}}\right)^+ . \tag{5.10}$$

Considérons le problème suivant, sur $]\underline{t},T] \times {\mathbb{R}_+^\star}^2$:

$$\begin{cases} (-\partial_t\Pi - \mathcal{L}_{S,I}\Pi + r\Pi) \ \wedge\ (\Pi - \varphi(t,I)) = 0\ , & \underline{t} < t < T \\ \Pi(T,S,I) \ = \ \varphi(T,I)\ , & \end{cases} \tag{5.11}$$

où comme en (5.6) :

$$\mathcal{L}_{S,I} \ \equiv\ \mathcal{L}_S + S\partial_I\ .$$

Remarque 5.4 (5.11) est une inéquation variationnelle bidimensionnelle, arrêtée en T. Cette inéquation est posée sur $]\underline{t},T] \times {\mathbb{R}_+^\star}^2$, l'intervalle $]\underline{t},T]$ étant ouvert en $\underline{t}$. En effet, l'obstacle (5.10) explose pour $t_0 = \underline{t}$ quand le temps d'arrêt τ tend vers t_0, ce qui empêche de définir l'inéquation variationnelle sur tout l'intervalle $[\underline{t},T]$.

Proposition 5.5 *Notons pour tout* $(t_0,S_0,I_0) \in]\underline{t},T] \times {\mathbb{R}_+^\star}^2$ *:*

$$\Pi(t_0,S_0,I_0) = \max_{\tau\in\mathcal{T}_{[t_0,T]}} E_P^{(t_0,S_0,I_0)} \left\{ e^{-r(\tau-t_0)} \left(K - \frac{I_\tau}{\tau - \underline{t}}\right)^+ \right\} \tag{5.12}$$

— en particulier, le prix du put *asiatique américain en* (t_0,S_0) $(t_0 > \underline{t})$ *n'est autre que* $\Pi(t_0,S_0,I_0)$*, où* $I_0 = \int_{t=\underline{t}}^{t_0} S_t dt$*. La fonction* Π *ainsi définie est l'unique solution de viscosité bornée de (5.11).*

Remarque 5.6 En écho de la Remarque 5.4, notons que le second membre de (5.12) n'est pas défini si $t_0 = \underline{t}$.

Preuve de la Proposition 5.5

D'après Krylov [94, Theorems 3.1.8 et 3.1.11] (appliqués sur des domaines $]t,T[$ où t décroît vers $\underline{t}$), Π est continue, et vérifie entre toute date $t_0 \in]\underline{t},T]$ et temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}_{[t_0,T]}$ (par exemple, constante $t_1 > t_0$), un principe d'optimalité. Ce dernier peut être vu comme un schéma en temps discret vérifié par Π, monotone et consistant vis-à-vis de l'équation limite (5.11) — la borne sur $|\Pi|$ garantissant la stabilité. La fonction continue Π est alors solution de viscosité bornée de (5.11), en vertu des résultats généraux de Barles-Souganidis [17] — l'unicité d'une telle solution résultant par ailleurs des arguments de Lions *et al.* [108, 59].

□

5.2.2 Passage à la limite distinguée quand t_0 tend vers $\underline{t}^+$

La Proposition 5.5 ne fournit aucun renseignement sur le prix du *put* asiatique américain à la date d'émission $\underline{t}$. La Proposition 5.8, conjuguée à la Proposition 5.5, vise à combler cette lacune.

Lemme 5.7 *σ constante positive. La solution,*

$$x_t \; = \; e^{\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2}(t-s)} \; , \qquad t \geq s$$

de

$$dx_t \; = \; \sigma \; x_t \; dW_t, \quad t > s \; ; \quad x_s \; \equiv \; 1$$

(W Brownien standard initialisé en s), est une martingale continue positive. De plus, ($s \leq t$)

$$E^{s,x_s\equiv 1} x_t^2 \; = \; e^{\sigma^2(t-s)} \; , \quad E^{s,x_s\equiv 1}(x_t-1)^2 \; = \; e^{\sigma^2(t-s)} \; - \; 1 \; , \tag{5.13}$$

$$\left(E^{s,x_s\equiv 1} \max_{u\in[s,t]} |X_u| \right)^2 \; \leq \; E^{s,x_s\equiv 1} \max_{u\in[s,t]} X_u^2 \; \leq \; 4 \; E^{s,x_s\equiv 1} X_t^2 \tag{5.14}$$

($X \equiv x$ ou $x-1$).

Preuve Jusqu'à (5.13), le Lemme est bien connu. D'où (5.13), par application à $x_t^2 = e^{\sigma^2(t-s)} \; e^{(2\sigma)W_t - \frac{(2\sigma)^2}{2}(t-s)}$. (5.14) résulte alors de Cauchy-Schwarz, suivi de l'inégalité de sous-martingale continue $|X| \geq 0$ (inégalité de Doob, voir par exemple Karatzas-Shreve [92, Chapter 1, Theorem 3.8.iv]). En effet, pour $s \leq t \leq u$, $X_t = E^{t,X_t} X_u$, d'où $(0 \leq)|X_t| \leq E^{t,X_t}|X_u|$.

□

Proposition 5.8 *Notant*

$$\Pi(t,S,I) \; \equiv \; \max_{\tau\in\mathcal{T}_{[t,T]}} E_P^{(t,S)} \left\{ e^{-r(\tau-t)} \left(K - \frac{I + \int_t^\tau S_u du}{\tau - \underline{t}} \right)^+ \right\} \qquad (t > \underline{t}) \; ,$$

le prix (5.8) du put *asiatique américain en $(\underline{t},S_{\underline{t}})$ (i.e. à l'émission) n'est autre que la limite radiale :*

$$\lim_{t_0\to\underline{t}^+} \Pi(t_0,S_{\underline{t}},(t_0-\underline{t})S_{\underline{t}}) \; .$$

Preuve Introduisons la notation $\underline{I}_0 \equiv (t_0-\underline{t})S_{\underline{t}}$. Le prix de l'option en $(\underline{t},S_{\underline{t}})$ vaut d'après (5.8) :

$$\underline{\Pi} \;:=\; \sup_{\tau\in\mathcal{T}_{[\underline{t},T]}} E_P^{(\underline{t},S_{\underline{t}})}\left\{e^{-r(\tau-\underline{t})}\left(K-\frac{\int_{\underline{t}}^{\tau}S_t dt}{\tau-\underline{t}}\right)^+\right\} .$$

On va montrer que pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[\underline{t},T]$, il existe $\tau_0 \equiv \tau\vee t_0$ temps d'arrêt à valeurs dans $[t_0,T]$, tel que

$$\begin{aligned} & E_P^{(\underline{t},S_{\underline{t}})}\left\{e^{-r(\tau-\underline{t})}\left(K-\frac{\int_{\underline{t}}^{\tau}S_t dt}{\tau-\underline{t}}\right)^+\right\} \\ \leq\;\; & E_P^{(t_0,S_{\underline{t}})}\left\{e^{-r(\tau_0-t_0)}\left(K-\frac{\underline{I}_0+\int_{t_0}^{\tau_0}S_t dt}{\tau_0-\underline{t}}\right)^+\right\}+O(t_0-\underline{t})\;; \end{aligned} \tag{5.15}$$

on montrerait de manière analogue (en plus simple) que pour tout temps d'arrêt τ à valeurs dans $[t_0,T]$:

$$E_P^{(t_0,S_{\underline{t}})}\left\{e^{-r(\tau-t_0)}\left(K-\frac{\underline{I}_0+\int_{t_0}^{\tau}S_t dt}{\tau-\underline{t}}\right)^+\right\} \leq E_P^{(\underline{t},S_{\underline{t}})}\left\{e^{-r(\tau-\underline{t})}\left(K-\frac{\int_{\underline{t}}^{\tau}S_t dt}{\tau-\underline{t}}\right)^+\right\}+O(t_0-\underline{t})\;, \tag{5.16}$$

où O est une fonction continue nulle en 0, indépendante des temps d'arrêts.

D'où par passage au sup sur les temps d'arrêts concernés dans (5.15)-(5.16) :

$$\begin{aligned} &\underline{\Pi} \leq \Pi(t_0,S_{\underline{t}},\underline{I}_0)+O(t_0-\underline{t})\;, \\ &\Pi(t_0,S_{\underline{t}},\underline{I}_0) \leq \underline{\Pi}+O(t_0-\underline{t})\;. \end{aligned}$$

Puis par passage à la limite :

$$\underline{\Pi} = \lim_{t_0\to\underline{t}^+}\Pi(t_0,S_{\underline{t}},\underline{I}_0)\;,$$

qui est le résultat désiré.

Prouvons (5.15). On note

$$I \;\equiv\; \left(K-\frac{\int_{\underline{t}}^{\tau}S_t dt}{\tau-\underline{t}}\right)^+ , \qquad II \;\equiv\; \left(K-\frac{\underline{I}_0+\int_{t_0}^{\tau_0}S_t dt}{\tau_0-\underline{t}}\right)^+ , \qquad A \;\equiv\; 1-e^{-r(\tau_0-t_0-\tau+\underline{t})}\;;$$

$0\leq I(II)\leq K$, $0\leq A$. Alors

$$\begin{aligned} |I\;e^{-r(\tau-\underline{t})}-II\;e^{-r(\tau_0-t_0)}| \;&\leq\; |I-II|\;e^{-r(\tau_0-t_0)} \;+\; I\;|e^{-r(\tau-\underline{t})}-e^{-r(\tau_0-t_0)}| \\ &\leq\; |I-II| \;+\; I\;|1-e^{-r(\tau_0-t_0-\tau+\underline{t})}|\;e^{-r(\tau-\underline{t})} \\ &\leq\; |I-II| \;+\; KA\;, \end{aligned}$$

où

$$A \;=\; \mathbf{1}_{\{\tau\geq t_0\}}\left(e^{r(t_0-\underline{t})}-1\right) \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau<t_0\}}\left(e^{r(\tau-\underline{t})}-1\right) \;\leq\; e^{r(t_0-\underline{t})}-1\;,$$

et

$$\begin{aligned} |I-II| \;&\leq\; \mathbf{1}_{\{\tau\geq t_0\}}\frac{|\int_{\underline{t}}^{t_0}(S_t-S_{\underline{t}})dt|}{\tau-\underline{t}} \;+\; \mathbf{1}_{\{\tau<t_0\}}\frac{|\int_{\underline{t}}^{\tau}(S_t-S_{\underline{t}})dt|}{\tau-\underline{t}} \\ &\leq\; \max_{[\underline{t},t_0]}|S_t-S_{\underline{t}}|\;, \end{aligned}$$

par la formule des accroissements limités. D'où, par passage aux espérances :

$$
\begin{aligned}
|E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}I\ e^{-r(\tau-\underline{t})}\ -\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}II\ e^{-r(\tau_0-t_0)}| &\leq E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}\ |I\ e^{-r(\tau-\underline{t})} - II\ e^{-r(\tau_0-t_0)}| \\
&\leq KA\ +\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}\ |I-II| \\
&\leq KA\ +\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}\ \max_{[\underline{t},t_0]}|S_t - S_{\underline{t}}| \\
&=: KA\ +\ S_{\underline{t}}B\ ,
\end{aligned}
$$

où, par changement de variables centrant en $\underline{t}$: $S_t \equiv x_t S_{\underline{t}} e^{r(t-\underline{t})}$, — inégalité de Cauchy-Schwarz, et inégalité $(a-b)^2 \leq 2a^2+2b^2$:

$$
\begin{aligned}
B^2 &= \left(E^{\underline{t},x_{\underline{t}}\equiv 1}\max_{t\in[\underline{t},t_0]}|x_t e^{r(t-\underline{t})}-1|\right)^2 \ \leq\ E^{\underline{t},x_{\underline{t}}\equiv 1}\max_{t\in[\underline{t},t_0]}(x_t e^{r(t-\underline{t})}-1)^2 \\
&\leq 2\ E^{\underline{t},x_{\underline{t}}\equiv 1}\max_{t\in[\underline{t},t_0]}x_t^2\ \left(e^{r(t-\underline{t})}-1\right)^2\ +\ 2\ E^{\underline{t},x_{\underline{t}}\equiv 1}\max_{t\in[\underline{t},t_0]}(x_t-1)^2 \\
&\leq 8\ \left(e^{r(t_0-\underline{t})}-1\right)^2\ e^{\sigma^2(t_0-\underline{t})}\ +\ 8\left(e^{\sigma^2(t_0-\underline{t})}-1\right)\ ,
\end{aligned}
$$

par application du Lemme 5.7.

En outre, par espérances conditionnelles imbriquées :

$$
E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}IIe^{-r(\tau_0-t_0)}\ =\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}E^{t_0,S_0}IIe^{-r(\tau_0-t_0)}\ =:\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}III\ +\ (E^{\underline{t},S_{\underline{t}}})E^{t_0,S_{\underline{t}}}IIe^{-r(\tau_0-t_0)}\ ,
$$

où, par changements de variables centrants en t_0 :

$$
\begin{aligned}
|III| &= |E^{t_0,S_0}IIe^{-r(\tau_0-t_0)}\ -\ E^{t_0,S_{\underline{t}}}IIe^{-r(\tau_0-t_0)}| \\
&= \Bigg|E^{t_0,x_{t_0}\equiv 1}e^{-r(\tau_0-t_0)}\left(K-\frac{\underline{I}_0+S_0\int_{t_0}^{\tau_0}x_t e^{r(t-t_0)}dt}{\tau_0-\underline{t}}\right)^+ \\
&\qquad -E^{t_0,x_{t_0}\equiv 1}e^{-r(\tau_0-t_0)}\left(K-\frac{\underline{I}_0+S_{\underline{t}}\int_{t_0}^{\tau_0}x_t e^{r(t-t_0)}dt}{\tau_0-\underline{t}}\right)^+\Bigg| \\
&\leq E^{t_0,x_{t_0}\equiv 1}e^{-r(\tau_0-t_0)}\frac{|S_0-S_{\underline{t}}|\int_{t_0}^{\tau_0}x_t e^{r(t-t_0)}dt}{\tau_0-\underline{t}} \\
&\leq |S_0-S_{\underline{t}}|\ E^{t_0,x_{t_0}\equiv 1}\max_{t\in[t_0,T]}x_t \\
&\leq 2\ |S_0-S_{\underline{t}}|\ e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t_0)}\ ,
\end{aligned}
$$

par formule des accroissements limités et application du Lemme 5.7. Finalement,

$$
\begin{aligned}
&|E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}I\ e^{-r(\tau-\underline{t})}\ -\ E^{t_0,S_{\underline{t}}}II\ e^{-r(\tau_0-t_0)}| \\
&\leq |E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}I\ e^{-r(\tau-\underline{t})}\ -\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}II\ e^{-r(\tau_0-t_0)}|\ +\ |E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}III| \\
&\leq KA\ +\ S_{\underline{t}}B\ +\ 2e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t_0)}\ E^{\underline{t},S_{\underline{t}}}|S_0-S_{\underline{t}}| \\
&\leq KA\ +\ S_{\underline{t}}B(1+2e^{\frac{\sigma^2}{2}(T-t_0)})\ ,
\end{aligned}
$$

qui tend vers 0 quand $t_0 \to \underline{t}^+$, indépendemment des temps d'arrêt.

□

Remarque 5.9 La principale difficulté du cas américain par rapport au cas européen : le fait d'avoir à considérer à la date d'émission une limite distinguée, tient à la possibilité d'exercice instantané de l'option américaine. Or il est clair financièrement qu'un tel exercice est toujours sous-optimal : mieux vaut alors ne pas acquérir l'option. Il y a là une apparence de paradoxe, peut-être due à une maladresse dans la formalisation mathématique : on pourrait en fait réduire la dimension du problème, tout au moins dans un cadre Black-Scholes — même si on n'y arrive pas par adaptation immédiate de l'astuce de Rogers-Shi [120] décrite au paragraphe §5.1.2. En effet, il faudrait poser :

$$\eta_t^\tau \equiv \frac{K(\tau - \underline{t}) - \int_{\underline{t}}^t S}{(\tau - \underline{t}) S_t} \ .$$

Autrement dit, η dépend de τ, ce qui empêche de prendre η comme nouvelle variable indépendante.

Remarque 5.10 Pour des techniques et expériences numériques relatives à ce *put* asiatique, on renvoie à Zvan *et al.* [136]. Le cas américain est particulièrement délicat. On est en effet ramené à la situation de l'équation du transport (avec la difficulté supplémentaire d'avoir à identifier numériquement une limite distinguée dans la solution d'une inéquation variationnelle à deux dimensions d'espace).

Chapitre 6

Conclusion

Ce travail met en évidence l'intérêt de recourir à des techniques numériques d'*edp* plus sophistiquées, lorsqu'augmente la complexité des problèmes envisagés. En particulier, les méthodes arborescentes les plus répandues sur les marchés d'options, correspondant à des schémas explicites bi- ou tri-nômiaux, montrent rapidement leurs limites lorsqu'on augmente la complexité du modèle utilisé. Or, aujourd'hui, on observe par exemple un recours de plus en plus fréquent à des modèles calibrés sur données de marché (voir par exemple Partie IV de cette thèse). Pour calculer dans ces modèles, il est certainement prudent d'introduire une partie implicite dans les schémas numériques utilisés.

Il semble néanmoins que les opérateurs de marché préfèrent souvent rester dans le cadre des arbres, ou schémas explicites d'*edp* à deux ou trois points, plutôt que de passer aux *edp* à proprement parler, avec utilisation d'algèbre linéaire et de composantes implicites dans les schémas. On peut en donner trois raisons :
— la première est historique : c'est d'abord dans ce cadre que les différences finies ont été introduites en finance ;
— la deuxième est qu'en finances on a en général besoin de la solution du problème d'*edp* en un seul point d'intérêt : la monnaie aujourd'hui. Or en utilisant des arbres à deux ou trois branches, on se limite précisément à ce résultat, évitant ainsi tout calcul inutile ;
— la troisième réside dans la simplicité et la souplesse de mise en œuvre des techniques d'arbres.

Tout en restant dans le cadre des arbres, on peut cependant améliorer les algorithmes en introduisant des techniques d'*edp*. Ainsi, de même qu'un arbre trinômial peut s'interpréter comme un schéma explicite d'*edp* (voir §3.2), réciproquement un schéma implicite d'*edp* peut être vu comme un arbre avec un nombre infini de branches, dont les poids se calculent par inversion de la matrice tridiagonale de l'opérateur discrétisé. Dans cet esprit on peut introduire des arbres avec davantage de branches, en vue d'améliorer les propriétés de stabilité ou de précision des méthodes numériques correspondantes.

À titre d'illustration, voici un exemple de schéma explicite à cinq points, ou *arbre pentanômial*, précis à l'ordre deux en espace comme en temps, pour l'équation de la chaleur, sous la condition de stabilité déjà rencontrée au §3.2, dont on reprend les notations. Par rapport au θ-schéma explicite du §3.2, ou arbre trinômial, on gagne donc un ordre de précision en temps, moyennant la prise en compte de deux nœuds supplémentaires en espace. Ce schéma pentanômial peut ensuite s'adapter sans difficulté à l'équation de Black-Scholes (2.3), *via* les changements de variables ou de fonctions inconnues décrits aux §3.1.1 et §3.1.2.

Théorème 6.1 *Sous la condition de stabilité $\lambda \leq 1$, le schéma explicite à cinq points* *suivant :*

$$\delta_t^- \pi + \frac{\lambda}{2}\delta_{y^2}^2 \pi + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \delta_{y^4}^4 \pi = 0$$

($\lambda = \sigma^2 \Delta t/(\Delta y)^2$), *est une approximation stable, consistante, précise à l'ordre au moins deux en espace comme en temps, de l'équation de la chaleur (3.16) :*

$$\partial_t \Pi \; + \; \frac{\sigma^2}{2}\partial_{y^2}^2 \Pi \; = \; 0 \; .$$

Preuve Voir Annexe D.

$\square$

Il ne s'agit là que d'un exemple, une alternative possible étant d'utiliser les degrés de liberté supplémentaires accordés par les nouvelles branches de l'arbre pour améliorer la stabilité du schéma.

Quatrième partie

Sur un algorithme de Calibration de la volatilité locale

Ce travail porte sur une procédure numérique de détermination d'une fonction de volatilité locale, permettant de répliquer les prix observés sur les marchés d'options, et ensuite de réaliser des calculs de nouveaux prix ou de couverture. Nous suivons la méthode de contrôle optimal proposée par R. Lagnado et S. Osher [99], utilisant une technique de régularisation. Cette procédure met en jeu des méthodes d'équations aux dérivées partielles et d'optimisation. L'objectif du présent travail est de préciser certains points de cette méthode, notamment le calcul de la fonction de Green. Après une présentation succincte de divers problèmes de finance, nous examinons des aspects théoriques. L'implémentation des algorithmes fait ensuite l'objet d'une discussion spécifique. Enfin nous présentons plusieurs expériences numériques, dont des tests sur données réelles.

Cette recherche a été développée à partir des travaux réalisés dans le cadre d'un "Stage industriel pour doctorant INRIA" à la CAR (Caisse Autonome de Refinancement, Groupe Caisse des Dépots, Paris), sous la direction de Henri Berestycki (alors consultant à la CAR et Professeur d'Analyse Numérique à l'Université Paris VI), en collaboration avec Jerôme Busca (alors stagiaire à la CAR et doctorant au laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI). Merci aux autres permanents et consultants de la CAR qui ont suivi l'évolution de ce travail, en particulier É. Fournié pour son initiation à ces problèmes, P.-L. Lions pour de nombreuses discussions sur les aspects aussi bien mathématiques que numériques de la calibration, et N. El Karoui pour son approche mathématique et financière de ces problèmes.

Chapitre 1

Introduction

Il est bien connu que le modèle stochastique le plus utilisé sur les marchés d'options, le modèle de Black-Scholes à volatilité constante [36], ne rend pas compte des prix observés sur ces marchés. Pour y remédier, plusieurs modifications de ce modèle ont été proposées :
— modèles à volatilité stochastique (voir par exemple [80]) ;
— modèles à sauts (voir par exemple [79, 2]) ;
— modèles à volatilité variable (voir notamment Dupire, Lagnado-Osher, Avellaneda *et al.*, Bouchouev-Isakov [68, 99, 3, 39] et références *loc. cit.*).

On considère ici des modèles à volatilité variable. Contrairement aux deux autres types de modèles, et même s'il représentent un cas (très) particulier de modèles à volatilité stochastique, les modèles à volatilité variable présentent l'intérêt de toujours préserver la complétude du marché [68]. Comme dans le modèle de Black-Scholes à volatilité constante, toute option y est équivalente à un portefeuille de numéraire et d'actions, ce qui permet d'en évaluer le prix par arbitrage.

Si l'on veut rendre compte à l'aide d'un tel modèle des prix d'options observés sur le marché, on est alors confronté au problème inverse de trouver une fonction de volatilité compatible avec ces prix. B. Dupire [68] a montré qu'il existe une telle fonction de volatilité, moyennant des hypothèses raisonnables sur la famille des prix de marché. Il propose de plus une technique de calcul de cette fonction de volatilité fondée sur la technique des arbres. Cependant, cette technique est instable et délicate à mettre en œuvre en pratique. Pour pallier cette instabilité, Avellaneda *et al.* [3] ont étudié une méthode de lissage entropique visant à déterminer une nappe de volatilité compatible avec les prix de marchés, minimisant une entropie relative par rapport à une nappe de volatilité locale préalablement fixée. Plus récemment, R. Lagnado et S. Osher [99] ont présenté une technique alternative de calcul, fondée sur une approche de contrôle optimal d'équation aux dérivées partielles d'évaluation des options. Parmi les développements les plus nouveaux sur ce sujet, J. Bodurtha et M. Jermakyan [37] proposent une approche de type perturbations singulières, fondée sur un développement en série de la nappe de volatilité locale recherchée ; N. Jackson et E. Süli [90] développent une approche paramétrique ; I. Bouchouev et V. Isakov [39] étudient la stabilité dans le cas $\sigma(t,S) \equiv \rho(t)\sigma(S)$ et proposent des méthodes numériques.

Notre travail précise mathématiquement un certain nombre de points de l'approche de calibration de Lagnado et Osher, met en œuvre une implémentation de cette méthode, et présente divers résultats d'expériences numériques. Au plan théorique, les principaux éléments nouveaux apportés par ce travail sont :
• d'une part, des résultats loisibles dans un modèle de Black-Scholes à volatilité variable : Théorème 3.8 (propriétés qualitatives de Π, dans le cas σ bornée non dégénérée continue), Lemme 3.9 (L_p-bornes sur la densité de probabilité de transition du sous-jacent),

Théorèmes 3.10 et 3.11 (et la généralisation immédiate de ce dernier, comme précisé dans le commentaire qui le précède ; bornes sur les Grecs), ainsi que les Corollaires 8.1 et 8.2 (dépendance continue de Π par rapport à σ ou (t_0,S_0,T,K)) ;
• d'autre part, des précisions sur la méthode de Lagnado et Osher [99, 1997] : Théorème 5.2 (le problème de calibration pure est sous-déterminé), Théorème 9.11 (le problème de minimisation de Lagnado-Osher est bien posé, du moins en se limitant à minimiser parmi des nappes σ telles que $\partial_t\sigma \leq 0$, et pour λ suffisamment grand ; seul résultat de cette nature à notre connaissance pour un problème de type calibration) et son Corollaire 10.1 (convergence vers la solution d'un algorithme de gradient projeté...), ainsi que le Théorème 10.4 (...algorithme qui s'apparente à la méthode de Lagnado et Osher (1997)).

Notre propos dans cette Partie est donc la reconstruction d'une nappe de volatilité locale supposée rendre compte de la dynamique d'un sous-jacent, mais non pas, il convient de le préciser, d'évaluer la pertinence d'un tel modèle au plan financier. Il est en réalité vraisemblable que celle-ci ne prévaut que dans certaines conditions de marché. Pour rendre compte du cas général, il faudrait envisager un modèle dynamique d'évolution d'une telle nappe de volatilité locale. Sur ces questions, on renvoie aux études empiriques de Dumas *et al.* [67] ou à l'ouvrage de synthèse de Rebonato [118].

Chapitre 2

Modèle de Black-Scholes, effet *smile* et structure par terme des volatilités

2.1 Modèle de Black-Scholes

Le modèle d'évolution du prix d'un d'actif le plus simple utilisé par les marchés pour évaluer et couvrir les options sur un facteur est le modèle de Black-Scholes à volatilité constante [36], décrit par l'équation différentielle stochastique (*eds*) suivante, sous la probabilité risque-neutre P :

$$dS_t = S_t((r-q)dt + \sigma dW_t) \ , \quad t > t_0 \ ; \quad S_{t_0} = S_0 \ , \tag{2.1}$$

où :
— S_t est le cours du sous-jacent, W_t le Brownien standard initialisé en t_0,
— le dividende du sous-jacent, $q \geq 0$, le taux court de l'économie, $r \geq 0$, et la volatilité du sous-jacent, $\sigma > 0$, sont constants.

Dans toute cette partie de thèse, on suppose les hypothèses habituelles (même si grossièrement irréalistes) de marchés financiers liquides, sans opportunité d'arbitrage et parfaits [69]. D'où notamment l'existence de la probabilité risque-neutre P.

On appelle *call* européen d'échéance $T \geq t_0$ et prix d'exercice $K > 0$, l'option correspondant à la fonction de gain terminale en T :

$$\varphi_K(S_T) := (S_T - K)^+.$$

Son prix $\Pi_{T,K}(t_0,S_0;q,r,\sigma)$ (abrév. $\Pi_{T,K}(t_0,S_0;\sigma)$, voire $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$) vaut alors :

$$\Pi_{T,K}(t_0,S_0) = e^{-r(T-t_0)}\mathrm{E}_P^{t_0,S_0}\varphi_K(S_T),$$

par absence d'opportunité d'arbitrage dans le modèle de Black-Scholes (2.1), sous la probabilité risque-neutre P [100, 69]. À (T,K) fixé, ce prix, vu comme une fonction de (t_0,S_0), est solution (classique) de l'équation parabolique *backward* de Kolmogorov, dite *équation de Black-Scholes* [36] :

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t\Pi + (r-q)S\partial_S\Pi + \frac{1}{2}\sigma^2S^2\partial^2_{S^2}\Pi = r\Pi, \ t < T \\ \Pi(T,S) = (S-K)^+. \end{array} \right. \tag{2.2}$$

L'usage que font les marchés d'options du modèle de Black-Scholes est en fait inverse. Il s'agit de retrouver, pour un prix observé, la constante σ, dite de *volatilité implicite*, qui redonne le prix observé dans le modèle de Black-Scholes (2.1).

$K \times T$	mars 98	sept. 98	mars 99
2800	236.1 / 0.332202	307.7 / 0.247175	394.25 / 0.237276
2950	156.85 / 0.310332	233.7 / 0.242630	319.2 / 0.233912
3100	95.68 / 0.290567	172.15 / 0.237709	253.9 / 0.230180
3250	52.55 / 0.272654	123.2 / 0.233190	198.4 / 0.226433
3400	25.5 / 0.256777	85.43 / 0.228816	152.5 / 0.222979

TAB. 2.1 – *Prix (en francs) et volatilité implicite correspondante* — $q = 0$, $r = 5\%$

2.2 Effet *smile* et structure par termes des volatilités

On observe alors que les prix de marché ne sont pas compatibles avec le modèle de Black-Scholes à volatilité constante précédent. Ainsi les volatilités implicites correspondant aux prix de marché des *call* européens de diverses échéances T et prix d'exercices K présentent-elles des fluctuations, tant en T qu'en K. À titre d'illustration, on présente Tableau 2.1 des prix (milieux des fourchettes de cotations recueillies sur Reuters) de *call* européens du MONEP sur le CAC40 ($q = 0$) à la date t_0 du vendredi 21 Novembre 1997, le CAC40 valant alors $S_0 = 2807.26$ francs. À côté de chaque prix en francs, on a indiqué la volatilité implicite correspondante pour un taux constant $r = 5\%$, arbitraire mais d'ordre de grandeur raisonnable. Ces volatilités implicites comportent donc une part d'arbitraire. Néanmoins, on les présente car leur structure d'ensemble est significative, et intéressante qualitativement. On s'est limité pour chaque échéance T aux cotations correspondant à des options ayant réellement donné lieu à des transactions. En particulier, on a exclu les *call* d'échéance septembre 1999, qui n'ont donné lieu à aucune transaction à la date t_0.

On constate Tableau 2.1 les fluctuations annoncées, tant en T qu'en K.

D'une part, les volatilités varient avec la date d'échéance T. Ce phénomène est connu sous le nom de structure par termes des volatilités implicites. Il a été montré par Merton [111] qu'il suffit pour en rendre compte d'autoriser la volatilité locale σ à dépendre du temps dans (2.1).

D'autre part, ces volatilités varient avec le prix d'exercice. Ce phénomène, connu sous le nom d'effet *smile*, est incompatible avec un modèle de Black-Scholes dont la volatilité est une constante, ou même une fonction déterministe du temps. En d'autres termes, le problème de la détermination d'une dynamique de la forme (2.1), pour une constante ou une fonction du temps σ, telle que les prix $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ des *call* pour divers T et K reproduisent les prix observés sur le marché, est sur-déterminé. Il n'existe pas, en règle générale, de constante ou fonction du temps σ, rendant compte simultanément de ces prix.

Les marchés continuent néanmoins à utiliser le modèle de Black-Scholes (2.1) à volatilité constante, calculant à la phase courante (t_0,S_0) les volatilités implicites correspondant aux produits cotés. Ils en déduisent sur les produits restants un *smile* de volatilité implicite — par exemple calculé à partir de deux points de chaque côté de la monnaie S_0, et complété ensuite d'une façon régulière, mais arbitraire, qui ne fait pas intervenir d'information financière particulière.

Chapitre 3

Solutions fortes des problèmes paraboliques

3.1 Espaces fonctionnels et injections de Sobolev

On appelle *bande* Q, tout produit d'un intervalle borné non vide fois $\mathbb{R}$, dans le plan $\mathbb{R}^2$. On note alors $Q_{t_0} \equiv Q \cap \{t > t_0\}$, $Q^T \equiv Q \cap \{t < T\}$ (fermeture $\overline{Q}_{t_0}$, $\overline{Q}^T$), $t_0,T \in \mathbb{R}$; $\mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{Q}$, comprises entre les bornes $(0 <)\underline{\sigma} \leq \overline{\sigma}$; $BUC_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma}(;\omega))$, l'ensemble des fonctions sur $\overline{Q}$, équibornées aux bornes $(0 <)\underline{\sigma} \leq \overline{\sigma}$, (équi-)uniformément continues (module ω).

Étant donné un ouvert Ω du plan, de point courant (t,z), on a la donnée usuelle des espaces de Hilbert (et versions locales, Fréchet) $H^2_{(loc)}(\Omega) \subset H^1_{(loc)}(\Omega) \subset L_{2(,loc)}(\Omega)$. En particulier,

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} \;=\; \| u \|^2_{L_2(\Omega)} \;+\; \| \nabla u \|^2_{L_2(\Omega)} \;,$$

où le deuxième terme est l'*intégrale de Dirichlet* de u appartenant à l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$. On note également $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$, l'espace usuel des (traces sur Ω de) fonctions régulières à support compact dans le plan. Plus généralement, étant donné $p \in [+1, +\infty[$, $\alpha > 0$, on a les espaces de Banach usuels $\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{\Omega})$, $W^1_p(\Omega)$, $W^{1,2}_p(\Omega)$, tels que

$$\| u \|_{W^{1,2}_p(\Omega)} \;=\; \| u \|_{L_p(\Omega)} \;+\; \| \partial_t u \|_{L_p(\Omega)} \;+\; \| \partial_z u \|_{L_p(\Omega)} \;+\; \| \partial_{z^2} u \|_{L_p(\Omega)}$$

(et la version locale, ou Fréchet, $W^{1,2}_{p,loc}(\Omega)$) ;

$$\| u \|_{W^1_p(\Omega)} \;=\; \| u \|_{L_p(\Omega)} \;+\; \| \partial_t u \|_{L_p(\Omega)} \;+\; \| \partial_z u \|_{L_p(\Omega)} \;;$$

$$\| u \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{\Omega})} \;=\; \sup_{(t,z)\in\overline{\Omega}} |u| \;+\; \sup_{(t,z)\neq(t',z')\in\overline{\Omega}} \frac{|u(t,z) - u(t',z')|}{|t - t'|^\alpha + |z - z'|^\alpha} \;.$$

On dispose alors des injections de Sobolev suivantes (voir par exemple Larrouturou-Lions [102]) :

$$W^1_p(\Omega) \hookrightarrow C^0_\alpha(\overline{\Omega}) \;, \qquad \alpha \equiv 1 - \frac{2}{p} > 0 \tag{3.1}$$

(Ω ouvert régulier par morceaux du plan, — borné ou demi-plan), entraînant notamment la continuité et l'existence d'un (unique) prolongement continu au bord pour toutes les solutions introduites Définitions 3.1 plus bas, où $p > 2$; on notera alors parfois $\overset{\circ}{W}{}^{1,2}_p(\Omega)$ l'ensemble des (classes de) fonctions $u \in W^{1,2}_p(\Omega)$, telles que (le représentant continu) $u|_{\partial_p\Omega} \equiv 0$ (bord parabolique $\partial_p\Omega$) ;

$$W^1_p(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega) \;, \qquad p \geq 1 \tag{3.2}$$

(Ω ouvert borné régulier par morceaux du plan), injection compacte (Rellich-Kondrakov) ;

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega) \ , \qquad p \geq 2 \tag{3.3}$$

(bande Ω), voir l'Annexe F pour la preuve de cette injection, ainsi que d'autres propriétés (dont on aura un usage plus occasionnel) des espaces de Sobolev sur bande Ω.

3.2 Équations de Black-Scholes, Dupire et dérivées

Pour tout produit $\mathcal{Q} = \mathcal{R} \times \mathbb{R}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}$), on notera $\mathcal{Q}_+$ ou $Q^+ \equiv \mathcal{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Définition 3.1 (Ladyzhenskaya *et al.*, Caffarelli *et al.*, Wang [98, 45, 135]) *Étant donnés $p \in]2, +\infty[$, $Q \equiv]\underline{t}, \overline{T}[\times\mathbb{R}$, $t_0, T \in [\underline{t}, \overline{T}]$, et un problème de Cauchy en temps* backward *sur $\overline{Q}^T$, de point courant (t,y) ($\overline{Q}^T_+$, de point courant (t,S)) :*

$$\check{F}(t,y,\check{\Pi},\partial_t\check{\Pi},\partial_y\check{\Pi},\partial^2_{y^2}\check{\Pi}) \ = \ \check{\Gamma}, \quad \check{\Pi}|_T \equiv \check{\varphi} \ ,$$

$\check{F}/\check{\varphi}$ continues, $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$

$$(F(t,S,\Pi,\partial_t\Pi,\partial_S\Pi,\partial^2_{S^2}\Pi) \ = \ \Gamma, \quad \Pi|_T \equiv \varphi \ ,$$

F/φ continues, $\Gamma \in L_p(Q_+)$).

a. *On appelle* solution forte dans $W^{1,2}_p(Q^T_{(+)})$, *ou* $W^{1,2}_p(Q^T_{(+)})$-solution, *toute fonction continue sur $\overline{Q}^T_{(+)}$, vérifiant la condition terminale, (et dont la restriction à $Q^T_{(+)}$ est) solution $Q^T_{(+)}$-presque partout de l'équation, appartenant à $W^{1,2}_p(Q^T_{(+)})$. — Définition analogue avec $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T_{(+)})$.*
b. *On appelle* $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T_{(+)})$-solution de viscosité, *toute fonction continue sur $\overline{Q}^T_{(+)}$, vérifiant la condition terminale, (et dont la restriction à $Q^T_{(+)}$ est) solution de viscosité (continue) de l'équation, au sens habituel (voir par exemple Crandall-Ishii-Lions [59], ou Annexe A), si ce n'est que les fonctions-tests sont prises dans (le sur-ensemble) $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T_{(+)})$, au lieu de (mettons) $\mathcal{C}^{1,2}(Q^T_{(+)})$.*
c. *Définitions analogues à a et b pour un problème de Cauchy en temps* forward *sur Q_{t_0}, de point courant (T,k) ($Q^+_{t_0}$, de point courant (T,K)).*

Remarque 3.2 Dans le contexte de la Définition précédente, et en cas de second membre (Γ ou $\check{\Gamma}$) continu (nul notamment), toute solution de viscosité est en fait $W^{1,2}_{p,loc}$-solution de viscosité (donc les deux notions de solutions de viscosité coïncident).

Définition 3.3 *Étant donnés une bande $Q =]\underline{t}, \overline{T}[\times\mathbb{R}$; $q,r \in [0,R]$; $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$; $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$ ($p \in]2, +\infty[$) .*

a. *On définit le problème de Cauchy en temps* backward $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$ *(+, par défaut), ou équation de Black-Scholes du* call/put *(*call*, par défaut) (respectivement $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$, ou équation de Black-Scholes dérivée) en variables logarithmiques $(t,y) \in \overline{Q}^T$, paramétrée par $(T,k) \in \overline{Q}$, $k = ln(K)$,*

$$\begin{cases} -\partial_t\check{\Pi} - \left(r - q - \dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\right)\partial_y\check{\Pi} - \dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\partial^2_{y^2}\check{\Pi} + r\check{\Pi} \ = \ 0 \quad sur\ Q_T \ , \\ \check{\Pi}|_T = (e^y - e^k)^{+/-} \ , \end{cases}$$

respectivement

$$\begin{cases} -\partial_t(\delta\check{\Pi}) - \left(r - q - \dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\right)\partial_y(\delta\check{\Pi}) - \dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\partial^2_{y^2}(\delta\check{\Pi}) + r\check{\Pi} \;=\; \check{\Gamma} \quad sur\ Q_T \ , \\ \delta\check{\Pi}|_T \;\equiv\; 0 \ , \end{cases}$$

— *$\check{\Pi}(t,y)$ étant $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$, si et seulement si $\Pi(t,S) \equiv \check{\Pi}(t,y)$ ($S = e^y$, voir Annexe H) est $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T_+)$-solution de l'équation de Black-Scholes du* call/put *suivante, en variables financières $(t,S) \in \overline{Q}^T_+$:*

$$\begin{cases} -\partial_t\Pi - (r-q)S\partial_S\Pi - \dfrac{(\sigma(t,S))^2}{2}S^2\partial^2_{S^2}\Pi + r\Pi \;=\; 0 \quad sur\ Q^T_+ \ , \\ \Pi|_T \;\equiv\; (S-K)^{+/-} \ , \end{cases} \tag{3.4}$$

b. Variations et considérations analogues relatives à l'équation de Dupire en variables financières forward $(T,K) \in Q^+_{t_0}$, *à la phase courante $(t_0,S_0) \in \overline{Q}_+$,*

$$\begin{cases} \partial_T\Pi_{T,K} - (q-r)K\partial_K\Pi_{T,K} - \dfrac{(\sigma(T,K))^2}{2}K^2\partial^2_{K^2}\Pi_{T,K} + q\Pi_{T,K} \;=\; 0 \quad sur\ Q^+_{t_0} \ , \\ \Pi|_{t_0} \;\equiv\; (S_0-K)^+ \ . \end{cases} \tag{3.5}$$

Soit, en variables logarithmiques forward *(T,k), $k \equiv ln(K)$; $y_0 = \ln(S_0)$,*

$$\begin{cases} \partial_T\check{\Pi}_{T,k} - (q - r - \dfrac{(\check{\sigma}(T,k))^2}{2})\partial_k\check{\Pi}_{T,k} - \dfrac{(\check{\sigma}(T,k))^2}{2}\partial^2_{k^2}\check{\Pi}_{T,k} + q\check{\Pi}_{T,k} \;=\; 0 \quad sur\ Q_{t_0} \ , \\ \check{\Pi}|_{t_0} \;\equiv\; (e^{y_0} - e^k)^+ \ . \end{cases} \tag{3.6}$$

Remarque 3.4 Changeant en outre le sens du temps T, via $\tau \equiv \overline{T} + t_0 - T$, $\widetilde{\phi}(\tau,k) \equiv \check{\phi}(T,k)$ pour toute fonction $\check{\phi}$, alors le problème (3.6) n'est autre que $BS^-_{Q_{t_0}}(\overline{T},y_0;r,q,\tilde{\sigma})$ (exprimé en variables τ,k).

3.3 Théorie de la régularité $W^{1,2}_p$

On dispose des estimations a priori $W^{1,2}_p$ suivantes.

Proposition 3.5 (Wang [135], Crandall *et al.* [58, 60]) *Soient $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$; $q,r \in [0,R]$, $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0<)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$; $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$ ($p \in]+2,+\infty[$).*

a. (Estimations intérieures) Soit une solution de viscosité $\check{\Pi}$ de $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$, respectivement $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de viscosité $\delta\check{\Pi}$ de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$. Alors pour tous ouverts $Q' \subset\subset Q'' \subseteq Q^T$:

$$\parallel \check{\Pi} \parallel_{W^{1,2}_p(Q')} \;\leq\; C \;\parallel \check{\Pi} \parallel_{L_\infty(Q'')} \ , \tag{3.7}$$

respectivement

$$\parallel \delta\check{\Pi} \parallel_{W^{1,2}_p(Q')} \;\leq\; C \;\left(\parallel \check{\Gamma} \parallel_{L_p(Q'')} \;+\; \parallel \delta\check{\Pi} \parallel_{L_\infty(Q'')}\right) \ , \tag{3.8}$$

$C \equiv C_p(Q',Q''; R; \underline{\sigma},\overline{\sigma})$.

b. *(Estimation globale) Soit une $W^{1,2}_{p,loc}(Q_\varepsilon)$-solution de viscosité $\delta_\varepsilon\check{\Pi}$, du problème $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$ localisé à $Q_\varepsilon \equiv Q^T \cap \{|y| \leq Y_\varepsilon\}$ ($Y_\varepsilon \nearrow +\infty$ quand $\varepsilon \to 0^+$), moyennant une condition de Dirichlet homogène au bord en espace.*
Notant $\check{\Gamma}_\varepsilon \equiv \check{\Gamma} - (r - q - (\check{\sigma}(t,y))^2/2)\partial_y(\delta_\varepsilon\check{\Pi}) - r\delta_\varepsilon\check{\Pi}$:

$$\| \partial_t(\delta_\varepsilon\check{\Pi}) \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \; + \; \| \partial^2_{y^2}(\delta_\varepsilon\check{\Pi}) \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \; \leq \; C \; \| \check{\Gamma}_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;, \tag{3.9}$$

$C \equiv C_p(\varepsilon,\underline{t},T;\underline{\sigma},\overline{\sigma})$.

Preuve Voir Wang [135, Theorem 5.9 et la Remark 2 qui lui fait suite, et commentaires p. 65 et §6], Crandall *et al.* [58, Theorems 1.4 et 2.1], [60].

□

Lemme 3.6 $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$; *$q_{(n)},r_{(n)} \in [0,R]$, $\check{\sigma}_{(n)} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0<)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$; $\check{\Gamma}_{(n)} \in L_p(Q)$ ($p \in]+2,+\infty[$, $\alpha \equiv 1 - 2/p > 0$). On suppose que quand $n \to +\infty$, q_n,r_n tend vers q,r/ $\check{\sigma}_n$ tend vers $\check{\sigma}$, localement uniformément sur $\overline{Q}$/$\check{\Gamma}_n$ $L_p(Q)$-converge vers $\check{\Gamma}$.*

a. *(Équations de Black-Scholes et Dupire) Toute solution de viscosité $\check{\Pi}$ de $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$, en est une solution forte dans $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$, et il existe au plus une telle solution $\check{\Pi}$ majorée (en valeur absolue) par $K \vee S$. De plus, si S, respectivement K, majore $|\check{\Pi}|$, alors pour toute $B_{2\varepsilon}(t,y) \subset Q^T$,*

$$\| \check{\Pi} \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{B}_\varepsilon(t,y))} \; \leq \; C' \; \| \check{\Pi} \|_{W^{1,2}_p(B_\varepsilon(t,y))} \; \leq \; C'C \; S \;,\; \textit{resp. } C'C \; K \;, \tag{3.10}$$

$C \equiv C_p(\varepsilon;R;\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, $C' \equiv C'_p(\varepsilon)$.
Enfin, lorsque $n \to +\infty$, toute limite localement uniforme sur $\overline{Q}^T$ de $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions de $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q_n,r_n,\check{\sigma}_n)$ est $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de $BS^{+/-}_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$.

b. *(Équations dérivées) Il existe au plus une $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$ tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$. De plus, pour toute $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution $\delta\check{\Pi}$,*

$$\| \delta\check{\Pi} \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)} \; \leq \; C' \; \| \delta\check{\Pi} \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \;, \tag{3.11}$$

$C' \equiv C'_p$, et $\delta\check{\Pi}$ est aussi l'unique $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$ tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$. Enfin, lorsque $n \to +\infty$, toute limite localement uniforme sur $\overline{Q}^T$ de $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions de $BS'_{Q^T}(T;q_n,r_n,\check{\sigma}_n;\check{\Gamma}_n)$, est $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$.

Preuve

a. D'après l'estimation intérieure (3.7), une telle solution de viscosité $\check{\Pi}$ est en fait une $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution, et on a, si de plus $|\check{\Pi}| \leq S$, resp. K, la partie droite dans (3.10) — la partie gauche provenant de l'injection de Sobolev (3.1) sur $\Omega \equiv B_\varepsilon(t,y)$.
Montrons l'unicité d'une solution $\check{\Pi}$ majorée (en valeur absolue) par $K \vee S$. $\check{\Pi} - \check{\Pi}'$ désignant la différence entre deux telles solutions, alors, par linéarité, $\widetilde{\Pi} \equiv e^{-2y+\mu t}(\check{\Pi} - \check{\Pi}')$ ($\mu = r + \overline{\sigma}^2$) est $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution (de viscosité, a fortiori) de

$$\begin{cases} -\partial_t\widetilde{\Pi} - \left(r - q + 3\dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\right)\partial_y\widetilde{\Pi} - \dfrac{(\check{\sigma}(t,y))^2}{2}\partial^2_{y^2}\widetilde{\Pi} + (2q + \overline{\sigma}^2 - (\check{\sigma}(t,y))^2)\check{\Pi} \;=\; 0 \\ \widetilde{\Pi}|_T \;\equiv\; 0 \;, \end{cases}$$

$|\widetilde{\Pi}(t,y)| \leq 2e^{-2y+\mu t}(K \vee e^y) \leq \varepsilon$ pour $|y| \geq Y_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$. Alors, $|\widetilde{\Pi}| \leq \varepsilon$ sur $Q_\varepsilon \equiv Q^T \cap \{|y| \leq Y_\varepsilon\}$, par principe du maximum faible pour les $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions de viscosité de nos équations sans second membre (Wang [135, Corollary 3.20]). D'où $\widetilde{\Pi} \equiv 0$ sur Q^T, par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$. Enfin, vu ce qui précède, le passage à la limite quand $n \to +\infty$ n'est autre que la stabilité, bien connue, des solutions de viscosité habituelles.

b. Par principe du maximum comme en a (en plus simple), on a unicité dans la classe des $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\breve{\sigma};\breve{\Gamma})$ tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en t. Par ailleurs, pour une $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution $\delta\breve{\Pi}$ de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\breve{\sigma};\breve{\Gamma})$, l'estimation (3.11) résulte de l'injection de Sobolev (3.1), sur le demi-plan $\Omega \equiv]\underline{t},+\infty[\times\mathbb{R}$ ($\delta\breve{\Pi}$, continue sur $\overline{Q}^T$ et nulle en T, étant en effet assimilable à un élément de $W^1_p(\Omega)$, en la prolongeant par 0 à droite de T). $\delta\breve{\Pi} \in \mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T) \cap L_p(Q^T)$ tend alors vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$.
Enfin, vue l'estimation intérieure (3.8), le passage à la limite quand $n \to +\infty$ n'est autre que la stabilité des $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions de viscosité.

□

3.4 Existence, unicité, représentations probabilistes des solutions

On énonce à présent les Théorèmes 3.8, 3.10 et 3.11, dont les preuves font l'objet des Chapitres 4, 6 et 7 — les Chapitres 5 et 8 tirant respectivement des conséquences du seul Théorème 3.8 et des Théorèmes 3.8 et 3.10.

Lemme 3.7 $\overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$*;* $(t_0,S_0) \in \overline{Q}_+$*;* $q,r \in [0,R]$*;* $\breve{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0<)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$*. Alors*

*a. l'*eds *(2.1), à volatilité variable* $\sigma \equiv \sigma(t,S)$*, admet une solution faible unique en loi sur* $[t_0,\overline{T}]$*, telle que*

$$S_t \;=\; S_0\; e^{(r-q)(t-t_0)}\; \exp\left(\int_{t_0}^t \sigma(s,S_s)dW_s - \frac{1}{2}\int_{t_0}^t \sigma^2(s,S_s)ds\right) \;,\quad t \in [t_0,\overline{T}]$$

où la dernière exponentielle est une martingale sous la probabilité risque-neutre P*, en particulier* $E^{t_0,S_0}_P S_t = S_0 e^{(r-q)(t-t_0)}$ *pour* $t \in [t_0,\overline{T}]$*. De plus,*

$$E^{t_0,S_0}_P \int_{u=s}^t \mathbf{1}_{\{S_u \geq K\}}\sigma(u,S_u)S_u dW_u \;=\; 0 \;,\quad t_0 \leq s \leq t \leq \overline{T}\;.$$

b. Pour tout $(T,K) \in \overline{Q}^+_{t_0}$ $(t_0 \leq T)$*, le prix* $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ *du* call *européen d'échéance* T *et prix d'exercice* K*, à la phase courante* (t_0,S_0)*, dans le modèle de Black-Scholes à volatilité variable* $\sigma \equiv \sigma(t,S)$*, s'écrit bien comme espérance actualisée du gain du* call *en* T*:*

$$\Pi_{T,K}(t_0,S_0) = e^{-r(T-t_0)} E^{t_0,S_0}_P\,(S_T - K)^+ \;\;,$$

sous la probabilité risque-neutre P*; en particulier,* $0 \leq \Pi_{T,K}(t_0,S_0) \leq S_0$*.*

Preuve

a. Voir Strook-Varadhan [127] (après passage en variable logarithmique), puis (de retour en variables financières t,S) Karatzas-Shreve [92, Problem 5.6.15 et Corollary 3.5.13] — la borne $\overline{\sigma}$ sur la nappe admissible σ garantissant la condition de Novikov:

$$E^{t_0,S_0}_P\;\exp\frac{1}{2}\int_{t_0}^t \sigma^2(s,S_s)ds \;<\; +\infty\;,\quad \forall t \in [t_0,\overline{T}]\;.$$

De plus,

$$E_P^{t_0,S_0}\int_{u=s}^t \mathbf{1}_{\{S_u\geq K\}}\sigma(u,S_u)S_u dW_u \;=\; E_P^{t_0,S_0}E_P^{s,S_s}\int_{u=s}^t \mathbf{1}_{\{S_u\geq K\}}\sigma(u,S_u)S_u dW_u \;.$$

Il suffit alors de vérifier que $E_P^{s,S_s}\int_{u=s}^t \sigma^2(u,S_u)S_u^2 du$ est fini, pour tout $t\geq s$. Or,

$$\int_{u=s}^t \sigma^2(u,S_u)S_u^2 du \;\leq\; \overline{\sigma}^2 S_s^2 e^{2(r-q)(t-s)}(t-s)\max_{u\in[s,t]} x_u^2 \;,$$

où, par inégalité de (sous-)martingale (d'après ce qui précède) continue x_u:

$$E_P^{s,x_s\equiv 1}\max_{u\in[s,t]} x_u^2 \;\leq\; 4\; E_P^{s,x_s\equiv 1}x_t^2 \;,$$

$$x_t^2 \;=\; e^{\int_{u=s}^t \sigma^2(u,S_u)du}e^{\int_{u=s}^t 2\sigma(u,S_u)dW_u-\frac{1}{2}\int_{u=s}^t(2\sigma(u,S_u))^2du} \;.$$

Et donc

$$E_P^{s,x_s\equiv 1}x_t^2 \;\leq\; e^{(t-s)\overline{\sigma}^2} \;.$$

b. Voir Karatzas-Shreve [92, §5.8.A], sachant a. Alors,

$$0 \;\leq\; e^{-r(T-t_0)}E_P^{t_0,S_0}(S_T-K)^+ \;\leq\; e^{-r(T-t_0)}E_P^{t_0,S_0}S_T \;=\; S_0e^{-q(T-t_0)} \;\leq\; S_0 \;,$$

d'après a.

□

Le Théorème suivant précise des résultats de Dupire [68]; voir également El Karoui [69].

Théorème 3.8 (Voir Dupire [68], El Karoui [69]) *$p\in]2,+\infty[$; $\overline{Q}=[\underline{t},\overline{T}]\times\mathbb{R}$; $q,r\in[0,R]$; $\breve{\sigma}\in\mathcal{C}_{\overline{Q}}((0<)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$. Alors,*

a. Pour tout $(T,K)\in\overline{Q}_+$, le prix, $\overline{Q}_+^T\ni(t,S)\mapsto\Pi_{T,K}(t,S)$ est l'unique $W^{1,2}_{p,loc}(Q_+^T)$-solution comprise entre 0 et S[1], de l'équation de Black-Scholes backward *(3.4) du* call, *à volatilité variable $\sigma\equiv\sigma(t,S)$. De plus, Π est convexe croissante en S, non décroissante par rapport à la nappe σ, et tend vers 0 ($Se^{-q(T-t)}-Ke^{-r(T-t)}$) quand $S\to 0^+$ ($+\infty$), uniformément en $t\in[\underline{t},T]$.*

b. Pour tout $(t_0,S_0)\in\overline{Q}_+$, la nappe des prix de call *courante, $\overline{Q}_{t_0}^+\ni(T,K)\to\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$, est l'unique $W^{1,2}_{p,loc}(Q_{t_0}^+)$-solution, comprise entre 0 et S[2], de l'équation de Dupire* forward *(3.5), à volatilité variable $\sigma\equiv\sigma(T,K)$.*
Cette nappe est en outre décroissante convexe en K, non décroissante par rapport à la nappe σ, tendant vers $S_0e^{-q(T-t_0)}-Ke^{-r(T-t_0)}$ (0) quand $K\to 0^+$ ($+\infty$), uniformément en $T\in[t_0,\overline{T}]$.
De plus, pour presque tout T, $\partial^2_{K^2}\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ n'est autre que la densité de transition de probabilité continûment actualisée au taux r ($e^{-r(T-t_0)}\times$ la densité), $G_{t_0,S_0}(T,K)$, du processus S initialisé en (t_0,S_0).

Preuve Chapitre 4.

□

On n'a pas trouvé de référence dans la littérature pour le Théorème 3.10 suivant, même si Fabes ou Fabes-Rivière [73, 74] contient beaucoup d'éléments. Ce qui manque est

1. Donc à croissance linéaire en S, uniformément en t.
2. Donc bornée en T,K.

l'estimation (3.16), avec les dépendances indiquées pour la constante C. On l'obtiendra par des estimations probabilistes de Stroock-Varadhan [126] et une analyse de perturbations au voisinage de la nappe constante σ_0.

Lemme 3.9 *(t,y), $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$ $(t < T)$; $q,r \in [0,R]$; $\breve{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma};\omega)$. Soit $g_{\breve{\sigma}}(t,y;s,x)$ $(t < s)$, la densité de probabilité de transition continûment actualisée au taux r ($g_{\breve{\sigma}} \equiv e^{-r(s-t)}\times$ la densité) du processus $y = \ln(S)$ correspondant aux données $q,r,\breve{\sigma}$ (densité qui existe, pour presque tout $s > t$; Stroock-Varadhan [127, Section 8]). On a*

$$\| g_{\breve{\sigma}}(t,y;\cdot,\cdot) \|_{L_A(]\frac{t+T}{2},T[\times\mathbb{R})} \leq C_A(\underline{t},T,R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega) , \qquad 1 \leq A < +\infty ; \tag{3.12}$$

$$\| g_{\breve{\sigma}}(t,y;\cdot,\cdot) \|_{L_\rho(]t,T[\times\mathbb{R})} \leq C_\rho(\underline{t},T,R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega) , \qquad 1 \leq \rho < 3 . \tag{3.13}$$

Enfin, pour tout $1 \leq \rho < 3$, et Y fixé > 0,

$$\| g_{\breve{\sigma}}(t,y;\cdot,\cdot) \|_{L_\rho(]t,T[\times]-Y,Y[)} = O_\rho\left[(|y| - Y)^{-1}\right] , \tag{3.14}$$

$O_\rho \equiv O_\rho(\underline{t},T,R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega)$.

Preuve §6.1.

□

Théorème 3.10 *(t,y), $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$ $(t \leq T)$; $q,r \in [0,R]$; $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$, $p \in I = [7/3,8/3]$, $\alpha \equiv 1 - 2/p > 0$. Alors il existe $0 < \varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0) \leq \sigma_0/2$, tel que pour toute $\breve{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}(\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0)$,*

$$\delta\check{\Pi}(t,y) = E^{t,y}_{\check{P}} \int_{s=t}^{T} e^{-r(s-t)}\check{\Gamma}(s,y_s)\, ds , \tag{3.15}$$

— indépendant du représentant de (la classe de fonctions) $\check{\Gamma}$ considéré, — est lorsque (t,y) varie dans $\overline{Q}^T$ l'unique $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution, ou $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$, de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\breve{\sigma};\check{\Gamma})$.

De plus,

$$\| \delta\check{\Pi} \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)} \leq C' \ \| \delta\check{\Pi} \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \leq C'C \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} , \tag{3.16}$$

$C' \equiv C'_p$ comme dans (3.11), $C \equiv C(\underline{t},\overline{T}; R,\sigma_0)$.

Preuve Chapitre 6.

□

Le Théorème 3.10 précédent peut être vu comme un cas particulier du Théorème 3.11 suivant, qui tire des conclusions plus fortes d'hypothèses plus faibles — mais au prix d'une preuve utilisant des arguments plus techniques et indépendante, n'utilisant pas Fabes *et al.* [73, 74]. Le Théorème 3.10 est suffisant pour l'essentiel des besoins du présent travail, aussi est-ce à lui qu'on préfère recourir dans la suite. L'utilisation alternative du Théorème 3.11 permet néanmoins d'obtenir plus loin un espace $\mathcal{K}$ exogène, indépendant des données du problème, voir Remarque 10.2. Le Théorème 3.11 est par ailleurs un résultat autonome, intéressant en lui-même, qui s'étend de manière immédiate (on s'en convaincra en relisant sa Preuve) à toute équation parabolique linéaire du second ordre à coefficients mineurs (resp. principaux) mesurables (resp. continus) bornés non dégénérée, en dimension quelconque d d'espace (en prenant $p \in]d, +\infty[$ dans ce Théorème ; R désignant alors une borne sur les coefficients d'ordre 0 et 1, et $\underline{\sigma}/\overline{\sigma}$ un module de parabolicité/une borne sur le coefficient de diffusion).

Théorème 3.11 *(t,y), $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$ $(t \leq T)$; $q,r \in [0,R]$; $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$; $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$ $(p \in]2,+\infty[)$. Alors*

$$\delta\check{\Pi}(t,y) \;=\; E^{t,y}_{\check{P}} \int_{s=t}^{T} e^{-r(s-t)}\check{\Gamma}(s,y_s)\; ds \;, \tag{3.17}$$

— indépendant du représentant de (la classe de fonctions) $\check{\Gamma}$ considéré, — est, lorsque (t,y) varie dans $\overline{Q}^T$, l'unique $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution, ou $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en t, de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$.

De plus,

$$\| \, \delta\check{\Pi} \, \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)} \;\leq\; C' \;\; \| \, \delta\check{\Pi} \, \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \;\leq\; C'C \;\; \| \, \check{\Gamma} \, \|_{L_p(Q^T)} \;\;, \tag{3.18}$$

$C' \equiv C'_p$ comme dans (3.11), $C \equiv C_p(\underline{t},\overline{T};R,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$.
Preuve Chapitre 7.

□

Dans les Preuves, on procèdera souvent par densité à partir de la situation où $\check{\sigma}$ est en outre Lipschitzienne (d'où existence d'une densité de probabilité de transition continue hors de la diagonale pour la diffusion, et d'une solution fondamentale au sens classique pour l'équation de Black-Scholes), à l'aide du Lemme standard suivant.

Lemme 3.12 *Bande Q, $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, resp. $BUC_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma};\omega)$. Alors, il existe $\check{\sigma}_n$ Lipschtzienne $\in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, resp. $BUC_{\overline{Q}}(\underline{\sigma},\overline{\sigma};\omega)$, $\check{\sigma}_n$ tendant vers $\check{\sigma}$ quand $n \to +\infty$, localement uniformément sur $\overline{Q}$, resp. uniformément.*

Preuve On prolonge $\check{\sigma}$ par constance en temps dans une sur-bande Ω $(\overline{Q} \subset \Omega)$. Par convolution (à l'aide d'une suite régularisante ρ_n à support $\subset \overline{B}_\delta$, $\delta \equiv d(\Omega,Q)$) on construit $\check{\sigma}_n \equiv \rho_n \star \check{\sigma}$ ($\check{\sigma}$ ainsi prolongée), $\check{\sigma}_n$ Lipschitzienne $\in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, resp. $BUC_{\overline{Q}}(\underline{\sigma},\overline{\sigma};\omega)$, tendant vers $\check{\sigma}$ quand $n \to +\infty$, localement uniformément sur $\overline{Q}$, resp. uniformément.

□

Chapitre 4

Équations de Black-Scholes et Dupire

4.1 Preuve du Théorème 3.8 (cas Lipschitzien)

Supposons de plus $\breve{\sigma}$ (uniformément) Lipschitzienne (constante de Lipschitz $\check{\lambda}$). Alors pour c, c' assez grands fixés positifs, on a existence et unicité d'une solution classique à croissance $\leq c\exp(c'y^2)$ (respectivement $\leq c\exp(c'k^2)$) de l'équation de Black-Scholes du *call* en variables logarithmiques *backward* $(t,y) \in \overline{Q}^T$ (respectivement Dupire en variables logarithmiques *forward* $(T,k) \in \overline{Q}_{t_0}$), par application de Friedman [82, Chapter 1, Theorem 12 et Chapter 2, Theorem 10].

En effet, par exemple en variables (t,y), on a le résultat si $\breve{\varphi}_K(y) \leq e^y \leq e^C e^{hy^2}$ $(y \in \mathbb{R})$, pour h fixé positif $< 1/(2\overline{\sigma}^2(T - \underline{t}))$, ce qui est réalisé en prenant C suffisamment grand — dépendant de h, sans inconvénient; et c'est analogue en variables (T,k).

De plus, (Friedman [81, Chapter 6, Theorems 4.6 et 5.4]) la solution de l'équation de Black-Scholes précédente en variables *backward* (t,S) n'est autre que

$$e^{-r(T-t)}\ E_P^{t,S}\ (S_T - K)^+ \ ,$$

convexe décroissante par rapport au paramètre K, et on a une représentation probabiliste analogue pour la solution de l'équation de Dupire précédente en variables *forward* (T,K) — qui est donc convexe croissante en S_0.

Enfin, la loi de transition du processus S admet (par rapport à la mesure de Lebesgue) la densité continûment actualisée au taux r

$$G_{t_0,S_0}(T,K) \ = \ \partial^2_{K^2}\Pi_{T,K}(t_0,S_0) \ , \tag{4.1}$$

continue par rapport aux quatre variables (t_0,S_0,T,K) $(t_0 < T)$. En effet, d'après les résultats généraux de Friedman [81, Chapitre 6, Theorems 5.4 et 4.5], seul (4.1) reste à justifier. Or, l'existence même de la densité $\widetilde{G}_{t_0,S_0}(T,K) := e^{r(T-t_0)}\ G_{t_0,S_0}(T,K)$ implique la continuité en K de $P^{t_0,S_0}(S_T \geq K)$, d'où, pour tout K:

$$P^{t_0,S_0}(S_T \geq K) \ = \ \partial_K\left(\int_{S=0}^K P^{t_0,S_0}(S_T \geq S)dS\right) \ .$$

Or, par Fubini:

$$\begin{aligned}
\int_{S=0}^K P^{t_0,S_0}(S_T \geq S)dS \ &= \ \int_{S=0}^K E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\{S_T\geq S\}}dS \\
&= \ E_P^{t_0,S_0}\int_{S=0}^K \mathbf{1}_{\{S_T\geq S\}}dS \\
&= \ E_P^{t_0,S_0}\left\{S_T - (S_T - K)^+\right\} \\
&= \ S_0e^{(r-q)(T-t_0)} \ - \ \widetilde{\Pi}_{T,K}(t_0,S_0)
\end{aligned}$$

($\widetilde{\Pi} \equiv e^{r(T-t_0)}\Pi$), d'après le Lemme 3.7.a. D'où en dérivant par rapport à K,

$$P^{t_0,S_0}(S_T \geq K) \;=\; -\,\partial_K \widetilde{\Pi}_{T,K}(t_0,S_0)\ , \tag{4.2}$$

et

$$\widetilde{G}_{t_0,S_0}(T,K) \;=\; -\,\partial_K P^{t_0,S_0}(S_T \geq K) \;=\; \partial^2_{K^2}\widetilde{\Pi}_{T,K}(t_0,S_0)\ ,$$

alias (4.1).

Remarque 4.1 Par les considérations analogues relatives à l'équation de Dupire, et changement de variables logarithmique, $e^{-y}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{T,k}(t,y)$ s'apparente à son tour à une densité continûment actualisée au taux q, (Friedman [82, Theorem 11, Chapter 1 et Theorems 1 et 2, Chapter 9]) majorée en tant que telle par $g_{T,k}(t,y) \equiv C(T-t)^{-1/2}\exp(\frac{-(y-k)^2}{4\overline{\sigma}^2(T-t)})$, $C \equiv C(R,\underline{\sigma},\overline{\sigma},\check{\lambda})$; $\| g_{T,k} \|_{L_\rho(Q^T)}$, $\| g_{T,k}e^y \|_{L_\rho(Q^T)} \leq C'_\rho, C_\rho$ si $1 \leq \rho < 3$; $C_\rho \equiv C_\rho(\underline{t},\overline{T},\overline{k};R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\check{\lambda})$ ($\overline{k}$ borne sur $|k|$) , $C'_\rho \equiv C'_\rho(\underline{t},\overline{T};R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\check{\lambda})$. En effet, pour $1 \leq \rho < 3$,

$$\begin{aligned}\int_{t=\underline{t}}^{T}\int_{y=-\infty}^{+\infty}(g_{T,k}(t,y))^\rho\ dt\ dy \;&=\; C^{\rho-1}\int_{t=\underline{t}}^{T}(T-t)^{\frac{1-\rho}{2}}\int_{y=-\infty}^{+\infty}(g_{T,k\sqrt{\rho}}(t,y\sqrt{\rho}))\ dt\ dy\\ &=\; 4\overline{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\ C^\rho\ \frac{(T-\underline{t})^{\frac{3-\rho}{2}}}{3-\rho}\ .\end{aligned}$$

De même,

$$e^y\ g_{T,k}(t,y) \;\leq\; C\ (T-t)^{-1/2}\ e^{k+2\overline{\sigma}^2(T-t)-\frac{(y-k)^2}{8\overline{\sigma}^2(T-t)}}$$

($y \in \mathbb{R}$, $C \equiv C(R,\underline{\sigma},\overline{\sigma},\check{\lambda})$ comme ci-dessus), d'où pour $1 \leq \rho < 3$

$$\begin{aligned}&\int_{t=\underline{t}}^{T}\int_{y=-\infty}^{+\infty}(e^y g_{T,k}(t,y))^\rho\ \ dt\ dy\\ &\leq\; C^\rho\ \frac{4\sqrt{2\pi}\overline{\sigma}}{\sqrt{\rho}}\ \frac{(T-\underline{t})^{\frac{3-\rho}{2}}}{3-\rho}\ e^{\rho(k+2\overline{\sigma}^2(T-\underline{t}))}\ .\end{aligned}$$

Ci-dessous, on vérifie directement, en utilisant la formule de Itô convexe, que $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ est solution classique, comprise entre 0 et S_0 d'après le Lemme 3.7.b, de l'équation de Dupire en variables *forward* (T,K). C'est donc par unicité la solution précédente, dont on avait vu qu'elle était convexe croissante en S_0. La non décroissance par rapport à la nappe σ s'obtient alors par principe du maximum classique, appliqué à la différence entre deux solutions à croissance $\leq e^y$ en variables (t,y), correspondant à des nappes $\check{\sigma}_1 \leq \check{\sigma}_2$.

Prouvons l'assertion ci-dessus. On a d'après la formule de Itô convexe, appliquée à la semi-martingale (d'après le Lemme 3.7.a) continue S_t (formule de Tanaka-Meyer [92, p. 220]) :

$$(S_{T+\varepsilon}-K)^+ \;=\; (S_T-K)^+ \;+\; \int_{t=T}^{T+\varepsilon}\mathbf{1}_{\{S_t\geq K\}}dS_t \;+\; \frac{1}{2}\int_{t=T}^{T+\varepsilon}\delta_K(S_t)\ \ \| dS_t \|^2\ \ , \tag{4.3}$$

où la dernière intégrale, aussi notée $\Lambda'_{T,S_T}(T+\varepsilon,K)$, est une notation pour le temps local passé par S_t en K, entre les instants T et $T+\varepsilon$, tel qu'en presque tout K (dépendant de ε et T) :

$$E_P^{t_0,S_0}\int_{t=T}^{T+\varepsilon}\delta_K(S_t)\ \ \| dS_t \|^2 \;=\; \int_{t=T}^{T+\varepsilon}\sigma^2(t,K)K^2\partial^2_{K^2}\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0)dt \tag{4.4}$$

— qui n'est autre que $\int_{t=T}^{T+\varepsilon} \widetilde{G}_{t_0,S_0}(t,K) \parallel dS_t(t,K) \parallel^2$, d'après (4.1).

Justifions (4.4). Par propriété [92, Theorem 3.7.1.iii] de Λ', presque sûrement :

$$\begin{aligned}\int_{S=K}^{K+\mu} \Lambda'_{T,S_T}(T+\varepsilon,S)dS &= \int_{S=0}^{\infty} \mathbf{1}_{[K,K+\mu]}(S)\ \Lambda'_{T,S_T}(T+\varepsilon,S)dS \\ &= \int_{t=T}^{T+\varepsilon} \mathbf{1}_{[K,K+\mu]}(S_t)\ S_t^2\ \sigma^2(t,S_t)dt\ .\end{aligned}$$

Or, on a vu que la loi de S_t conditionnelle à (t_0,S_0) admet la densité continue

$$\widetilde{G}_{t_0,S_0}(t,S) \ = \ \partial^2_{S^2}\widetilde{\Pi}_{t,S}(t_0,S_0) \quad (t_0 < t)\ .$$

D'où par Fubini (attendu que le second intégrande ci-dessous, positif, n'excède pas

$$\overline{\sigma}^2(K+\mu)^2 \max_{[T,T+\varepsilon]\times[K,K+\mu]} \widetilde{G}_{t_0,S_0} \ < \ +\infty$$

pour $t_0 < T \le t$)

$$\begin{aligned}&\int_{S=K}^{K+\mu} E_P^{t_0,S_0}\Lambda'_{T,S_T}(T+\varepsilon,S)dS \\ &= \int_{S=K}^{K+\mu}\int_{t=T}^{T+\varepsilon} \sigma^2(t,S)S^2\partial^2_{S^2}\widetilde{\Pi}_{t,S}(t_0,S_0)\ dt\ dS\ ,\end{aligned}$$

d'où (4.4), en presque tout (point de Lebesgue commun aux deux intégrandes) K (dépendant de ε et T).

On a en outre, en développant $S_t = S_t - K + K$:

$$E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\{S_t\ge K\}}S_t \ = \ \widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0) \ + \ KP^{t_0,S_0}(S_t\ge K)\ ,$$

où, d'après (4.2) :

$$P^{t_0,S_0}(S_t \ge K) \ = \ -\,\partial_K\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0)\ .$$

Fixant une suite $\varepsilon_n \to 0^+$ quand $n\to\infty$, il vient alors d'après le Lemme 3.7.a, par passage aux espérances dans (4.3) :

$$\begin{aligned}\widetilde{\Pi}_{T+\varepsilon_n,K}(t_0,S_0) &= \widetilde{\Pi}_{T,K}(t_0,S_0) \ + \ (r-q)\int_{t=T}^{T+\varepsilon_n}\left[\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0) - K\partial_K\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0)\right]\,dt \\ &\quad + \ \frac{1}{2}\int_{t=T}^{T+\varepsilon_n} \sigma^2(t,K)K^2\partial^2_{K^2}\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0)dt\ , \quad n\in\mathbb{N} \qquad (4.5)\end{aligned}$$

K-presque partout (dépendant de T), où la fonction $\widetilde{G}_{t_0,S_0}(t,K)$, alias $\partial^2_{K^2}\widetilde{\Pi}_{t,K}(t_0,S_0)$ est continue par rapport à ses quatres variables, hors de $t_0 \equiv t$. Les intégrandes sont donc continues par rapport à $t \ge T > t_0$ dans (4.5). D'où :

$$\partial_T\widetilde{\Pi} \ = \ (r-q)\widetilde{\Pi} - (r-q)K\partial_K\widetilde{\Pi} \ + \ \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\partial^2_{K^2}\widetilde{\Pi}\ ,$$

par passage à la limite quand $n\to\infty$ dans (4.5). Puis

$$\partial_T\Pi \ = \ (q-r)K\partial_K\Pi \ + \ \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\partial^2_{K^2}\Pi \ - \ q\Pi\ ,$$

pour $\Pi = e^{-r(T-t_0)}\widetilde{\Pi}$; ceci K-presque partout, dépendant de T. Enfin, on a vu que $\partial^2_{K^2}\Pi$, et donc a fortiori Π et $\partial_K\Pi$, sont continues sur $\overline{Q}^+_{t_0}$. $\Pi_{T,K}(t_0,S_0)$ est alors la (par l'unicité dans le Lemme 3.6.a, vue la Remarque 3.4) $W^{1,2}_{p,loc}(Q^+_{t_0})$-solution bornée de l'équation de Dupire, et donc sa solution classique bornée.

4.2 Preuve du Théorème 3.8 (Cas général)

On raisonne par densité à l'aide du cas précédent, appliquable à chaque terme $\check{\sigma}_n$ de la suite approximante du Lemme 3.12. En particulier, notant $\check{P}_n \equiv \check{P}(\check{\sigma}_n)$, il vient :

$$\check{\Pi}_{T,k}(t_n,y_n;\check{\sigma}_n) \;=\; e^{-r(T-t_n)}\; E^{t_n,y_n}_{\check{P}_n}(e^{y_T}-K)^+$$

$(n \in \mathbb{N})$, pour toute suite (t_n,y_n) à valeurs dans $\overline{Q}^T$.

De plus, si $\lim_{n\to+\infty}(t_n,y_n) = (t_0,y_0)$, alors $\check{P}^{t_n,y_n}_n$ tend en loi vers $\check{P}^{t,y}$ ($\check{P} \equiv \check{P}(\check{\sigma})$) quand $n \to +\infty$ (Stroock-Varadhan [127, Theorem 9.1], convergence en mesure de $\check{P}_n$ vers $\check{P}$, localement uniforme en la condition initiale $\in \overline{Q}^T$, par convergence localement uniforme sur $\overline{Q}^T$ des coefficients de la diffusion, coefficients continus, $0 < \underline{\sigma} \leq \check{\sigma}_n \leq \overline{\sigma}$). L'espérance, sous $\check{P}^{t_n,y_n}_n$, de tout gain continu borné en y_T, converge alors, quand $n \to +\infty$, vers l'espérance analogue sous $\check{P}^{t,y}$.

En particulier,

$$\begin{aligned}
\check{\Pi}_{T,k}(t_n,y_n;\check{\sigma}_n) &= e^{-r(T-t_n)}E^{(t_n,y_n)}_{\check{P}_n}(e^{y_T}-K)^+ \\
&= e^{-r(T-t_n)}E^{(t_n,y_n)}_{\check{P}_n}(K-e^{y_T})^+ \;+\; e^{-r(T-t_n)}E^{(t_n,y_n)}_{\check{P}_n}(e^{y_T}-K)\;,
\end{aligned}$$

où le dernier terme vaut $e^{y_n}e^{-q(T-t_n)} - Ke^{-r(T-t_n)}$ d'après le Lemme 3.7.a, converge quand $n \to +\infty$ vers $\check{\Pi}(t_0,y_0) := e^{-r(T-t_0)}E^{(t_0,y_0)}_{\check{P}}(e^{y_T}-K)^+$ ($\in [0,S_0]$, d'après le Lemme 3.7.b). D'après le Lemme 3.6.a, la limite $\check{\Pi}$ de $\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}_n)$ quand $n \to +\infty$, localement uniforme sur $\overline{Q}^T$, est alors $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution, comprise entre 0 et S, de $BS_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$. Et on raisonne de manière analogue (en plus simple) pour l'équation de Dupire.

La justification de (4.1) vaut indépendamment du caractère Lipschitzien de $\check{\sigma}$, pour tout T où la loi de transition de S entre t_0 et T admet une densité, donc (Stroock-Varadhan [127, Section 8]) pour presque tout T.

Les propriétés de monotonie et convexité s'obtiennent également par densité. Les propriétés asymptotiques, quand S ou K tend vers 0^+ ou $+\infty$, découlent alors, par monotonie en la nappe σ, des résultats connus quand $\sigma \equiv \underline{\sigma}$ ou $\overline{\sigma}$ (voir par exemple Partie III, Remarque 3.7).

Chapitre 5

Les problèmes de calibration

5.1 Le problème de calibration sur un *continuum* de prix

D'après l'équation de Dupire, la famille des prix de tous les *call* européens sur le sous-jacent S, à la phase courante (t_0,S_0), détermine entièrement (et permet de calculer) la nappe de volatilité $\sigma(t,S)$. La démarche de Dupire [68] consiste alors à rechercher une calibration sur les prix de *call* observés sur le marché, afin de trouver cette nappe $\sigma(t,S)$ correspondant à la "vraie" dynamique neutre au risque du sous-jacent, conditionnellement à la phase (t_0,S_0). On utilise ensuite $\sigma(t,S)$ pour évaluer des options plus exotiques, ou à des fins de couverture.

À la suite des travaux de Dupire, des techniques numériques utilisant la méthodologie des arbres ont de fait été développées ces dernières années pour calculer une nappe de volatilité locale $\sigma(t,S)$ compatible avec une famille de prix d'instruments financiers observée sur les marchés [66, 68, 122] — famille finie ou *système* par définition, complétée par inter-extrapolation des données.

Ces techniques consistent pour l'essentiel à utiliser les prix de marché des *call* et *future*, pour déterminer, en avançant en temps discret, des nœuds et des probabilités de transition de manière itérative *forward*. Les prix de *call* et de *future* liquides fournis sur l'arbre binômial ainsi calibré coïncident avec les prix de marché. On construit ainsi un arbre implicite qui servira aux calculs de tous les autres produits dérivés.

L'avantage de cette méthode est sa grande simplicité et sa cohérence avec les techniques arborescentes.

Son inconvénient le plus évident est que la probabilité risque-neutre ainsi déterminée est liée à la technique arbitraire d'inter-extrapolation des prix des instruments (ou de leur volatilité implicite de Black-Scholes). Cette procédure suppose en effet la donnée d'un *continuum* de prix de *call* et *future* pour chaque pas de temps. En pratique, on est donc amené à interpoler à chacune de ces dates à partir du panier des prix de *call* et *future* réellement cotés. L'inter-extrapolation utilisée comporte une part d'arbitraire, qui rend cette approche largement dépendante des choix effectués, d'autant que le problème résolu est mal posé[1]. Par rapport à ceci, un point technique (mais qui a son importance) est que le schéma explicite utilisé sur l'arbre conduit à retenir dans le calcul des points très éloignés de la monnaie, moyennant des hypothèses très fortes sur le *smile*. Les calculs deviennent alors difficiles, et ont tendance à faire apparaître des probabilités négatives. Une alternative possible est d'évaluer les *call* par une méthode de Monte-Carlo. En effet, les trajectoires de Monte-Carlo ont tendance à aller chercher des points d'espace beaucoup moins excentrés que dans les techniques d'arbre.

1. Il revient en effet à dériver numériquement une fonction à partir de données discrètes, voir formule de Dupire (5.2).

Un autre aspect de cette méthode, qui soulève une question peut-être plus profonde, est la contrainte d'ajustement total et déterministe aux données de marché, voire à leur extrapolation, loin de la monnaie. Cette contrainte conduit à surexploiter les possibilités d'un modèle simpliste, notamment lorsque la calibration est effectuée sur des données éloignées de la monnaie. En effet, la contrainte de coller indistinctement à tous les prix observés sur le marché donne trop d'importance aux cotations peu significatives des produits éloignés de la monnaie, et qui ne font pas réellement l'objet de transactions. Dans le même temps, on ne peut exclure ces données, puisque ce sont elles qui sont responsables du *smile*, et conduisent à ne pas se contenter pour σ d'une constante.

On peut adresser un reproche analogue à la méthode de calibration par minimisation d'entropie relative de Avellaneda *et al.* [3]. En effet, cette méthode débouche sur la détermination d'une nappe de volatilité locale reproduisant exactement les prix observés sur le marché, quitte à présenter des explosions au voisinage des points $(t,S) = (T,K)$ de prix de *call* utilisés pour calibrer — mais ce reproche doit être tempéré par le résultat de stabilité obtenu dans cette méthode, selon lequel le prix d'un *call* calculé dans le modéle calibré varie continûment avec les données utilisées pour calibrer [3, §6].

5.2 Le problème de calibration pure sur données de marché

En pratique, on dispose seulement d'un système (famille finie) de prix de marchés. On montre ici que le problème inverse de détermination d'une nappe de volatilité $\sigma(t,S)$ compatible avec ces seuls prix devient sous-déterminé : il existe plusieurs nappes de volatilité $\sigma(t,S)$ compatibles avec ce système.

5.2.1 Énoncé du problème mathématique

Soit donc $\pi = (\Pi^{obs}_{T,K})_{(T,K)\in\mathcal{F}}$ le système (fini par définition) des prix observés sur le marché des *call* (européens) sur un sous-jacent S (2.1), à la phase courante (t_0,S_0). Le problème de la calibration pure sur ces données consiste à trouver (en variables logarithmiques) $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$ $(\overline{Q}_+ = [t_0,\overline{T}] \times R^*_+ \supset \mathcal{F})$, telle que pour tout $(T,K) \in \mathcal{F}$:

$$\Pi^{obs}_{T,K} = \Pi_{T,K}(t_0,S_0; q,r,\sigma) \tag{5.1}$$

(q/r, dividende de S/taux court de l'économie, constantes exogènes ≥ 0).

Il s'agit de déterminer s'il existe une solution à ce problème, i.e. compatibilité d'une nappe σ avec les prix de *call* observés sur les marchés.

5.2.2 Nappes de volatilité locale compatibles avec des prix de marché — Existence

Étant données la phase courante (t_0,S_0), et une bande $Q =]t_0,\overline{T}[\times\mathbb{R}$, qualifions d'*admissible* sur Q en (t_0,S_0), toute nappe de prix continue, comprise entre 0 et S_0, $(\Pi_{T,K})_{T,K\in\overline{Q}_+} \in W^{1,2}_{p,loc}(Q_+)$ $(p \in]2, +\infty[)$, telle que $\Pi|_{t_0} \equiv (S_0 - K)^+$, et $\sigma \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, où, par définition, σ^2 désigne un représentant continu, supposé exister, de

$$2\,\frac{\partial_T\Pi - (q-r)K\partial_K\Pi + q\Pi}{K^2\partial^2_{K^2}\Pi}\ . \tag{5.2}$$

On a alors, d'après le Théorème 3.8.b (Unicité) :

$$\Pi_{T,K} \ \equiv\ \Pi_{T,K}(t_0,S_0;\sigma)\ .$$

En particulier, étant donné un système de prix π sur $\mathcal{F} \subset \overline{Q}_+$, la nappe σ ainsi définie est compatible avec π, pour tout prolongement admissible Π de π à $\overline{Q}_+$. De plus, σ régulière si Π régulière.

Remarque 5.1 L'existence d'un tel prolongement implique alors (par convexité de Π en K) la *convexité des données de marché*, au sens de la croissance en K des accroissements,

$$\frac{\Pi^{obs}_{T,K'} - \Pi^{obs}_{T,K}}{K' - K} \; ,$$

où K' désigne l'élément immédiatement supérieur à K (s'il en est) dans la section de π suivant T, pour $(T,K) \in \mathcal{F}$. Réciproquement, il n'est pas évident que cette convexité des données suffise à garantir l'existence d'un tel prolongement. Par exemple, en prenant pour données $\pi = (\Pi^{obs}_{T,K})_{T,K \in \mathcal{F}}$ des prix calculés dans un modèle de diffusion à sauts adéquat, alors π vérifie l'hypothèse de convexité des données précédente (le prix calculé dans un modèle de diffusion à sauts est convexe en K); mais la nappe Π de ces prix pour $T \in [t_0,\overline{T}]$, $K > 0$, n'est pas un prolongement admissible de π. En effet, on peut montrer que la nappe de volatilité locale σ calculée à partir de Π à l'aide de la formule de Dupire (5.2), explose quand $T \to t_0^+$.

5.2.3 Nappes de volatilité locale compatibles avec des prix de marché — Unicité

La question de l'unicité ou de la stabilité d'une telle nappe σ invite à considérer l'ensemble Λ formé par les nappes σ compatibles avec les prix de marché sur $\overline{Q}_+ \supset \mathcal{F}$ (bande Q).

Théorème 5.2 *Phase courante (t_0,S_0), bande $Q \equiv]t_0,\overline{T}[\times\mathbb{R}$; π, un système de prix sur $\mathcal{F} \subset \overline{Q}_+$; Λ, l'ensemble des nappes σ compatibles avec π sur Q en (t_0,S_0); $\mathcal{E}$, le cône des nappes $\Pi_{T,K}$ admissibles sur Q en (t_0,S_0); Im$(\mathcal{E})$, l'image de $\mathcal{E}$ dans l'application suivante (bien définie, injective, d'après le Théorème 3.8.b) :*

$$\mathcal{E} \ni \Pi \equiv \Pi_{T,K} \;\mapsto\; \sigma^2(T,K) \equiv 2\,\frac{\partial_T \Pi - (q-r)K\partial_K \Pi + q\Pi}{K^2 \partial^2_{K^2}\Pi} \; . \tag{5.3}$$

Alors, Λ est une variété régulière, de codimension dans $\mathrm{Im}(\mathcal{E})$ *égale à $|\mathcal{F}|$.*

Commentaire 5.3 *Ce Théorème présente bien sûr un caractère implicite, tant que la définition d'une nappe de prix admissible renvoie aux propriétés de σ garantissant l'unicité dans le Théorème 3.8.b — l'existence même ne va pas de soi. Il illustre néanmoins la sous-détermination du problème de calibration pure sur données de marché.*

Preuve du Théorème 5.2
L'ensemble Λ s'interprète comme l'image par (5.3) de :

$$\mathcal{E}' = \{\Pi \equiv \Pi_{T,K} \in \mathcal{E} \mid \forall (T,K) \in \mathcal{F} \;\; \Pi_{T,K} = \Pi^{obs}_{T,K}\} \; . \tag{5.4}$$

Les formes affines définissant les contraintes dans (5.4) étant clairement continues et linéairement indépendantes, $\mathcal{E}'$ est une sous-variété de codimension $|\mathcal{F}|$ dans $\mathcal{E}$.

□

Sur un plan mathématique, le problème de calibration pure sur données de marché (dans sa formulation originelle, c'est-à-dire dans sa version non régularisée) est donc loin d'être résolu. Il n' y a en particulier pas d'unicité de la solution. En fait, on sait de manière générale que les problèmes inverses sont particulièrement délicats (voir par exemple Tikhonov [132]). On ne dispose pratiquement d'aucun résultat rigoureux pour ce type de problèmes, du moins lorsque le contrôle est le coefficient du terme de diffusion.

5.3 Problème inverse de calibration et lissage sur données de marché

5.3.1 Contrôle d'équations aux dérivées partielles

Dans le cadre des méthodes numériques, une autre approche au problème de calibration a été proposée par R. Lagnado et S. Osher [99]. Suivant l'approche générale introduite par Tikhonov [132], elle consiste à envisager le problème de la calibration comme un problème de contrôle optimal, où le contrôle coïncide avec la fonction de volatilité; l'équation d'état est fournie par les équations aux dérivées partielles d'évaluation des options; le critère à minimiser est l'écart quadratique entre les résultats obtenus à partir des *edp* et les données de marché, plus un terme de régularisation.

5.3.2 Régularisation

Le problème de calibration en utilisant un panier fini de prix de marché étant sous-déterminé, l'idée de la régularisation est de sélectionner une solution particulière munie de bonnes propriétés — régularité et robustesse numérique de la nappe σ obtenue. Par exemple, une solution arbitraire du problème de calibration pure sur les données de marché peut très mal reproduire un prix observé sur le marché, extérieur au panier utilisé pour la calibration. Pour éviter de tels phénomènes, il faut tout d'abord rechercher une nappe de volatilité régulière, quitte à relaxer en partie la contrainte de calibration. Concernant la forme du terme de régularisation, le calcul des variations enseigne qu'on a intérêt à chercher la fonction "la plus harmonique" possible, compatible avec un niveau de résidus suffisamment faible. Ceci équivaut à ajouter au résidu quadratique entre les résultats obtenus à partir des *edp* et les données de marché une énergie égale à l'intégrale de Dirichlet (sur domaine localisé) de σ (à un facteur λ près).

Remarque 5.4 L'introduction du facteur est justifiée par des considérations de dimension. En effet le gradient de σ, qui intervient dans l'intégrale de Dirichlet, n'est pas homogène au résidu quadratique. On devrait même à ce titre introduire deux facteurs distincts pour les composantes temporelles et spatiales du gradient. En pratique on utilise ce(s) facteur(s) comme paramètre(s) de réglage dans les algorithmes de minimisation.

L'une des propriétés les plus simples que l'on est en droit d'attendre d'une telle version régularisée de la calibration est de conduire à une détermination unique de la solution. Dans les Chapitres qui suivent, nous allons établir que c'est bien le cas (Théorème 9.11), en nous limitant à des nappes de volatilité non croissantes en temps (voir Annexe G) et lorsque le paramètre de régularisation est suffisamment grand, c'est-à-dire lorsque λ tend vers plus l'infini.

Chapitre 6

Équations dérivées (Approche perturbative)

Ce Chapitre correspond à la preuve du Théorème 3.10. L'unicité dans ce Théorème a déjà été vue (par un argument indépendant de principe du maximum, en début de Preuve du Lemme 3.6.b). L'existence (comme d'ailleurs l'unicité) d'une $W_p^{1,2}(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$, pour toute $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}((0<)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, découle des résultats généraux de Fabes-Rivière [74]. Dans le cas Lipschitzien, on a également la représentation probabiliste (3.15) (Fabes [73]). Pour le reste, on procède par analyse de perturbations au voisinage de la nappe constante σ_0 (§6.2) et densité à partir du cas Lipschitzien (§6.3), en utilisant des estimations probabilistes (§6.1).

6.1 Estimations probabilistes

Cette section est la preuve du Lemme 3.9, dont on reprend les notations. (3.12) découle directement de Stroock-Varadhan [126, Theorem 9.1.9, équation (1.35)]. (3.13) puis (3.14) s'obtiennent par raffinements de Stroock-Varadhan [126, Theorem 9.1.9] loisibles dans le cas $1 < \rho < 3$, comme suit.

Pour (3.13), on procède comme dans la preuve de [126, Theorem 9.1.9, équation (1.35), haut p. 224], si ce n'est qu'on remplace $p \equiv (1-1/\rho)^{-1} > 3/2$ (alias q' *loc. cit.*) par $p' \equiv \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+p)$ (et non $p/2$, alias $q'/2$, *loc. cit.*), obtenant alors dans le cas où $\check{\Gamma}$ est continue à support compact sur $\overline{Q}^T$ (voir calcul analogue détaillé en fin de section)

$$\left| \int_{s=t}^{T} \int_{x\in\mathbb{R}} g_{\check{\sigma}}(t,y;s,x)\ \check{\Gamma}(s,x)\ dx\ ds \right| \ \leq\ C_\rho(\underline{t},T,R;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega)\ \ \|\ \check{\Gamma}\ \|_{L_p(]t,T[\times\mathbb{R})} \qquad (6.1)$$

(la constante ayant absorbé un facteur

$$\exp\left(\frac{(T-\underline{t})(A-1)R^2}{2\underline{\sigma}^2}\right)\ , \qquad A^{-1} = 1 - \frac{p'}{p}\ ,$$

qui majore $(E_{P^{t,y}}(X_t^T)^A)^{A^{-1}}$; X_t^T, l'exponentielle impliquée dans la transformation de Girsanov). Par Hahn-Banach (voir par exemple Brézis [41]), l'inégalité (6.1) valide pour toute $\check{\Gamma}$ continue à support compact sur $\overline{Q}^T$, garantit alors (3.13), ainsi que (6.1) pour toute $\check{\Gamma} \in L_p(Q^T)$.

Pour déduire (3.14), on se place d'abord sous la probabilité $\check{P}_0$, de densité associée $g_{0,\check{\sigma}}$, correspondant au processus y^0 privé de *drift* (transformation de Girsanov). Soit

$$G^Y_{0,\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y) \ \ :=\ \ \int_{s=t}^{T}\int_{x=-Y}^{Y} g_{0,\check{\sigma}}(t,y;s,x)\ \check{\Gamma}(s,x)\ dx\ ds\ .$$

On note toujours p $(> 3/2)$, le conjugué de $\rho \in]1,3[$; $p' \equiv \frac{1}{2}(\frac{3}{2}+p)$; $A^{-1} \equiv 1 - p'/p$. Comme forme linéaire sur $L_{p'}(Q^T)$, $\check{\Gamma} \mapsto G^Y_{0,\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)$ est bornée par $C_{\rho'}(\underline{t},T,0;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega)$, $\rho' = (1-1/p')^{-1}$ — par l'estimation (3.13) appliquée avec $q = r = 0$. Par ailleurs, pour $\check{\Gamma}$ appartenant à présent à $L_\infty(Q^T)$, et $|y| > Y$, on a en notant $\delta := |y| - Y$:

$$|G^Y_{0,\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)| \ \leq \ \| \check{\Gamma} \|_{L_\infty(Q^T)} \ (T-\underline{t}) \ P_0^{t,y}\left\{ \sup_{s\in[t,T]} |y_s^0 - y| \geq \delta \right\} ,$$

où cette dernière probabilité est majorée par $2e^{-\frac{\delta^2}{2\overline{\sigma}^2(T-\underline{t})}}$. D'où par interpolation, pour toute $\check{\Gamma}$ continue à support compact sur $\overline{Q}^T$:

$$|G^Y_{0,\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)| \ \leq \ (C_{\rho'}(\underline{t},T,0;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega))^{\frac{p'}{p}} \ \ [2(T-\underline{t})]^{1/A} \ e^{-\frac{\delta^2}{2A\overline{\sigma}^2(T-\underline{t})}} \ \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ .$$

Soit

$$|G^Y_{0,\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)| \ \leq \ O'_\rho\left[(|y|-Y)^{-1}\right] \ \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ , \tag{6.2}$$

$O'_\rho \equiv O'_\rho(\underline{t},T;\underline{\sigma},\overline{\sigma},\omega)$. Puis (Girsanov)

$$\begin{aligned} G^Y_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y) \ &:= \ \int_{s=t}^T \int_{x=-Y}^Y g_{\check{\sigma}}(t,y;s,x) \ \check{\Gamma}(s,x) \ dx \ ds \\ &= \ E_{\check{P}^{t,y}} \int_{s=t}^T \mathbf{1}_{[-Y,Y]}(y_s) \ \check{\Gamma}(s,y_s) \ e^{-r(s-t)} \ ds \\ &= \ E_{\check{P}_0^{t,y}}\left(X_t^T \int_{s=t}^T \mathbf{1}_{[-Y,Y]}(y_s^0) \ \check{\Gamma}(s,y_s^0) \ e^{-r(s-t)} \ ds \right) , \end{aligned}$$

d'où par inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |G^Y_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)| \ &\leq \ (T-\underline{t})^{\frac{1}{A}} \left(E_{\check{P}_0^{t,y}}(X_t^T)^A\right)^{\frac{1}{A}} \ \left(E_{\check{P}_0^{t,y}} \int_{s=t}^T \mathbf{1}_{[-Y,Y]}(y_s^0) \ |\check{\Gamma}(s,y_s^0)|^{\frac{p}{p'}} \ ds \right)^{\frac{p'}{p}} \\ &\leq \ (T-\underline{t})^{\frac{1}{A}} \ \exp\left(\frac{(T-\underline{t})(A-1)R^2}{2\underline{\sigma}^2} \right) \ \left(G^Y_{0,\check{\sigma}} |\check{\Gamma}|^{\frac{p}{p'}}(t,y) \right)^{\frac{p'}{p}} \ . \end{aligned}$$

On n'a plus qu'à appliquer (6.2) en p', $|\check{\Gamma}|^{\frac{p}{p'}}$, au lieu de $p,\check{\Gamma}$,

$$\| \, |\check{\Gamma}|^{\frac{p}{p'}} \, \|^{\frac{p'}{p}}_{L_{p'}(Q^T)} \ = \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ .$$

6.2 Analyse de perturbations

On se place à nouveau dans les hypothèses du Théorème 3.10. D'après les résultats connus dans le cas d'une volatilité constante σ_0 (voir par exemple Fabes [73]), l'équation $BS'_{Q^T}(T;q,r,\sigma_0;\check{\Gamma})$ admet une unique $W_p^{1,2}(Q^T)$-solution $\delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma}$, telle que

$$\begin{aligned} &\| \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ , \| \partial_y \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ , \| \partial^2_{y^2} \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ , \| \partial_t \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \\ &\qquad \leq \ C_p^0, C_p^1, C_p^2, C_p^3 \ \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \ , \end{aligned}$$

$C_p^i \equiv C_p^i(\underline{t},T,q,r,\sigma_0)$, $i = 0..3$.

Vu comme opérateur linéaire, $\delta\check{\Pi}(\sigma_0)$ (par exemple) agit donc continûment de $L_p(Q^T)$ dans lui-même. La $L_p(Q^T)$-norme d'opérateur (assimilée à C_p^0 ci-dessus, sans restriction) variant de manière log-convexe avec $1/p$, on a notamment: $C_p^0 \leq C_{7/3}^0 \vee C_{8/3}^0$, pour $p \in I = [7/3,8/3]$; et on a les résultats analogues relatifs à $\partial_y \delta\check{\Pi}(\sigma_0)$, $\partial^2_{y^2}\delta\check{\Pi}(\sigma_0)$, $\partial_t\delta\check{\Pi}(\sigma_0)$.

Par ailleurs, toujours par les résultats disponibles à σ_0 constante (Fabes [73]), il existe $C_{7/3} \equiv C_{7/3}(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0)$, telle que :

$$\| \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\widetilde{\Gamma} \|_{W^{1,2}_{7/3}(Q)} \;\leq\; C_{7/3} \;\| \widetilde{\Gamma} \|_{L_{7/3}(Q)}$$

($\widetilde{\Gamma} \equiv \check{\Gamma}$ à gauche de T et 0 à droite), soit

$$\| \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{W^{1,2}_{7/3}(Q^T)} \;\leq\; C_{7/3} \;\| \check{\Gamma} \|_{L_{7/3}(Q^T)} \;\;,$$

pour toute $\check{\Gamma} \in L_p(Q)$. Donc $C^i_{7/3} \leq C_{7/3}$, $i = 0..3$, et résultat analogue en 8/3. Notant alors $C = 8(C_{7/3} \vee C_{8/3})$, on obtient, toujours pour $p \in I$:

$$\begin{aligned} \| \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma} \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \;&\leq\; \sum_{i=0}^{3} \big(C_{7/3} \vee C_{8/3}\big) \;\; \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \\ &\leq\; \frac{1}{2}\, C \;\; \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \;\;. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Considérant à présent $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}(\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0,\omega)$, $\varepsilon_0 \equiv \frac{4}{5\sigma_0 C} \wedge \frac{\sigma_0}{2}$ (donc $\sigma_0/2 \leq \check{\sigma} \leq 3\sigma_0/2$, $|\check{\sigma}^2 - \sigma_0^2| \leq 2/C$), introduisons $D_{\check{\sigma},\sigma_0}\check{\Gamma} \equiv \frac{1}{2}(\check{\sigma}^2 - \sigma_0^2)(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma}$. Par ce qui précède, $\| D_{\check{\sigma},\sigma_0}\check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \leq \frac{1}{2} \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)}$. L'opérateur $\mathrm{Id} - D_{\check{\sigma},\sigma_0}$ est donc bien défini sur $L_p(Q^T)$, inversible, et en notant $\check{\Gamma}_0 \equiv (\mathrm{Id} - D_{\check{\sigma},\sigma_0})^{-1}\check{\Gamma}$: $\| \check{\Gamma}_0 \|_{L_p(Q^T)} \leq 2 \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)}$.

Par ailleurs, en utilisant l'équation $BS'_{Q^T}(T;q,r,\sigma_0;\check{\Gamma}_0)$ vérifiée par $\delta\Pi(\sigma_0).\check{\Gamma}_0$, et en développant $\sigma_0^2 = \check{\sigma}^2 + (\sigma_0^2 - \check{\sigma}^2)$, il vient Q^T-presque partout:

$$(-\partial_t - \mathcal{L}^{\check{\sigma}}_y + r\mathrm{Id}).(\delta\Pi(\sigma_0).\check{\Gamma}_0) \;=\; \check{\Gamma}_0 - D_{\check{\sigma},\sigma_0}\check{\Gamma}_0 \;=\; \check{\Gamma} \;,$$

donc $\delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma}_0$ n'est autre que $\delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma}$, l'unique (par le Lemme 3.6.b ou les résultats généraux de Fabes-Rivière [74]) $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$. Alors, par l'estimation (6.3) relative à $\delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma}_0$:

$$\begin{aligned} \| \delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma} \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \;&=\; \| \delta\check{\Pi}(\sigma_0).\check{\Gamma}_0 \|_{W^{1,2}_p(Q^T)} \\ &\leq\; \frac{1}{2}\, C \;\; \| \check{\Gamma}_0 \|_{L_p(Q^T)} \;\leq\; C \;\; \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q^T)} \;\;, \end{aligned}$$

soit la partie droite dans (3.16) — la partie gauche correspondant à (3.11).

6.3 Représentation probabiliste

Notons $G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)$, le membre de droite dans (3.15). Montrons d'abord (3.15), — $\delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma} \equiv G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}$, — pour $\check{\Gamma}$ continue à support compact sur $\overline{Q}^T$.

Dans le cas Lipschitzien, on dispose bien de la représentation désirée (voir par exemple Fabes [73]). On procède alors par densité comme suit. Soient (Lemme 3.12) $\check{\sigma}_n$ Lipschitzienne, $\check{\sigma}_n \in BUC_{\overline{Q}}(\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0,\omega)$, $\check{\sigma}_n$ convergeant vers $\check{\sigma}$ quand $n \to +\infty$, uniformément sur $\overline{Q}^T$; $\overline{Q}^T \ni (t_n,y_n) \to (t,y)$. Alors (Stroock-Varadhan [126, Theorem 11.3.3 et Lemma 11.3.2]) $\check{P}^{t_n,y_n}_{\check{\sigma}_n}$ tend en loi vers $\check{P}^{t,y}_{\check{\sigma}}$, et $G_{\check{\sigma}_n}\check{\Gamma}(t_n,y_n) \to G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)$. $G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}$, limite localement uniforme sur $\overline{Q}^T$ de $G_{\check{\sigma}_n}\check{\Gamma} \equiv \delta\check{\Pi}(\check{\sigma}_n).\check{\Gamma}$ (par la représentation valide dans le cas

Lipschitzien), est alors $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution de l'équation limite (Lemme 3.6.b). De plus, $G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)$ tend vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$ (voir ci-dessous). Donc (Fabes-Rivière [74] et Lemme 3.6.b) $G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma} \equiv \delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma}$.

Pour montrer la limite nulle quand $|y| \to +\infty$, on écrit dans le cas Lipschitzien, avec les notations du §6.1:

$$\begin{aligned} |G_{\check{\sigma}_n}\check{\Gamma}|(t,y) &= \int_{s=t}^{T}\int_{x\in\mathbb{R}} g_{\check{\sigma}_n}(t,y;s,x)\ \check{\Gamma}(s,x)\ dx\ ds \\ &= |G^{Y}_{\check{\sigma}_n}\check{\Gamma}|(t,y)\ , \end{aligned}$$

où $\mathrm{supp}(\check{\Gamma}) \subseteq [\underline{t},T] \times [-Y,Y]$. D'où par (3.14), ρ désignant l'exposant conjugué de p:

$$|G_{\check{\sigma}_n}\check{\Gamma}|(t,y) \ = \ O_\rho\left[(|y|-Y)^{-1}\right] \quad \|\ \check{\Gamma}\ \|_{L_p(Q^T)} \quad ,$$

où O_ρ ne dépend ni de $n \in \mathbb{N}$, ni de $t \in [\underline{t},T]$. D'où par passage à la limite quand $n \to +\infty$,

$$|G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}|(t,y) \ = \ O_\rho\left[(|y|-Y)^{-1}\right] \quad \|\ \check{\Gamma}\ \|_{L_p(Q^T)} \quad ,$$

où le membre de droite tend vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$.

Dans le cas général $\check{\Gamma} \in L_p(Q^T)$, soit $\mathcal{D}(\overline{Q}^T) \ni \check{\Gamma}_n \quad L_p(Q^T) \to \check{\Gamma}$ quand $n \to +\infty$ (Théorème F.1). Alors d'une part,

$$\delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma}_n \quad \mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T) \cap W^{1,2}_p(Q^T) \to \delta\check{\Pi}(\check{\sigma}).\check{\Gamma}\ ,$$

par linéarité, critère de Cauchy utilisant (3.16) et passage à la $L_p(Q^T)$-limite dans l'équation; et d'autre part

$$|G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}_n(t,y) - G_{\check{\sigma}}\check{\Gamma}(t,y)| \ \leq \ \|\ g_{\check{\sigma}}(t,y;\cdot,\cdot)\ \|_{L_\rho(]t,T[\times\mathbb{R})} \quad \|\ \check{\Gamma}_n - \check{\Gamma}\ \|_{L_p(]t,T[\times\mathbb{R})}$$

tend vers 0 par inégalité de Hölder utilisant (3.13).

Chapitre 7

Équations dérivées (Approche générale)

Ce Chapitre correspond à la preuve du Théorème 3.11. L'unicité dans ce Théorème a déjà été vue (par un argument indépendant de principe du maximum, en début de Preuve du Lemme 3.6.b). Pour le reste, on procède cette fois-ci par passage à la limite dans tout l'espace (§7.3), à partir des résulats analogues relatifs au problème localisé (§7.2). En préliminaire (§7.1), on exploite certains prolongements par réflexion.

7.1 Prolongements par réflexion

Notant toujours $Q_\varepsilon \equiv Q \cap \{|y| \leq Y_\varepsilon\}$ ($Y_\varepsilon \nearrow +\infty$ quand $\varepsilon \searrow 0^+$, bande Q), une fonction $\varphi_\varepsilon \in W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)$ arbitraire, admet en effet un prolongement $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \in W_p^{1,2}(Q)$, tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ fixé

$$\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{i,j}(Q)} \ \leq \ C \ \| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{i,j}(Q_\varepsilon)} \tag{7.1}$$

($0 \leq 2i + j \leq 2$), $C \equiv C_p(\underline{t},T,\overline{\varepsilon})$ (voir J.L. Lions-Magenes [106, p. 43], Bensoussan-J.L. Lions [24, p. 108 ou 130]). Par ailleurs, par inégalité de Sobolev:

$$\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{0,1}(Q)} \ \leq \ C_p \ \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^{1/2}_{W_p^{0,2}(Q)} \ \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^{1/2}_{L_p(Q)} \ . \tag{7.2}$$

(7.2) se voit plus aisément sur les normes équivalentes (par Hölder) telles que

$$\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^p_{\widetilde{W}_p^{0,j}(Q)} \ \equiv \ \sum_{k \leq j} \| \partial^k_{y^k} \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^p_{L_p(Q)} \qquad (0 \leq j \leq 2) \ .$$

Alors, par inégalité de Sobolev classique sur $\mathbb{R}$ (Bensoussan-J.L. Lions [24, Chapitre 2, équation (5.8)]), et intégration en temps (Fubini):

$$\begin{aligned}
\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^p_{\widetilde{W}_p^{0,1}(Q)} &= \int_{t=\underline{t}}^T \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(t,\cdot) \|^p_{\widetilde{W}_p^1(\mathbb{R})} \ dt \\
&\leq C_p^p \int_{t=\underline{t}}^T \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(t,\cdot) \|^{p/2}_{\widetilde{W}_p^2(\mathbb{R})} \ \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(t,\cdot) \|^{p/2}_{L_p(\mathbb{R})} \ dt \\
&\leq C_p^p \left(\int_{t=\underline{t}}^T \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(t,\cdot) \|^p_{\widetilde{W}_p^2(\mathbb{R})} \ dt \right)^{1/2} \left(\int_{t=\underline{t}}^T \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon(t,\cdot) \|^p_{L_p(\mathbb{R})} \ dt \right)^{1/2} \\
&= C_p^p \ \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^{p/2}_{\widetilde{W}_p^{0,2}(Q)} \ \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|^{p/2}_{L_p(Q)} \ ,
\end{aligned}$$

par Cauchy-Schwarz.

Il résulte alors de (7.2), (trinôme)

$$\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{0,1}(Q)} \;\leq\; C_p\, r \,\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{0,2}(Q)} \;+\; C_p(r)\;\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(Q)} \;,$$

pour r fixé > 0, à condition de choisir $C_p(r)$ ($<$ ou) $= C_p/4r$.
En ce cas,

$$\begin{aligned} \| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{0,1}(Q_\varepsilon)} &\leq \| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{0,1}(Q)} \\ &\leq C_p\, r \,\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{W_p^{0,2}(Q)} + C_p(r)\;\| \widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(Q)} \\ &\leq CC_p\, r \,\| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{0,2}(Q_\varepsilon)} + CC_p(r)\;\| \varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;, \end{aligned} \tag{7.3}$$

où la constante C est celle de (7.1).

7.2 Problème localisé

7.2.1 Estimation ponctuelle

Soit $g_{\check{\sigma}}(t,y;s,x)$ $(t < s)$, la densité de probabilité de transition continûment actualisée au taux r du processus $y = \ln(S)$ correspondant aux données $q,r,\check{\sigma}$ (densité qui existe, pour presque tout $s > t$; Stroock-Varadhan [127, Section 8]). Alors, d'après Krylov [94, preuve du Theorem 2.4.5.a et Theorem 2.4.1]

$$\| g_{\check{\sigma}}(t,y;\cdot,\cdot) \|_{L_\rho(]t,T[\times\mathbb{R})} \;\leq\; C_\rho(\underline{t},T,R;\underline{\sigma},\overline{\sigma}) \;, \qquad 1 \leq \rho < 2 \;. \tag{7.4}$$

7.2.2 Estimation a priori dans $L_p(Q_\varepsilon)$

On endosse à présent les notations de la Proposition 3.5.b, prenant dans le §7.1 précédent $\varphi_\varepsilon \equiv \delta_\varepsilon \check{\Pi}$, $W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)$-solution a priori du problème $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check{\sigma};\check{\Gamma})$ localisé à Q_ε (admettant donc un prolongement par réflexion dans $W_p^{1,2}(Q^T) \subset W_{p,loc}^{1,2}(Q^T)$). Notant $\tau_\varepsilon(\leq T)$, le temps de sortie de Q_ε du processus y, on a la représentation probabiliste suivante pour φ_ε, résultant d'une formule de Itô intégrée, valide pour les représentants continus (qui existent, $p > 2$) de (classes de) fonctions dans $W_{p,loc}^{1,2}(Q^T)$:

$$\varphi_\varepsilon(t,y) \;=\; E_{\check{P}}^{t,y} \int_{s=t}^{\tau_\varepsilon} e^{-r(s-t)} \check{\Gamma}(s,y_s)\; ds \;,$$

indépendamment du représentant de $\check{\Gamma} \in L_p(Q^T) \subset L_{p,loc}(Q^T)$. On renvoie à Bensoussan-J.L. Lions [24, Chapitre 2, §8.3] pour la représentation analogue dans un contexte variationnel. On ne reproduit pas la preuve, qui fonctionne à l'identique dans le présent contexte (d'ailleurs plus naturel à cet égard), par régularisation et formule de Itô classique, en utilisant avantageusement (7.4) à la place de Bensoussan-J.L. Lions [24, Chapitre 2, Lemme 8.1]. Alors, d'après Krylov [94, Theorem 2.4.5.a]

$$\| \varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;\leq\; \overline{C}\;\; \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;, \tag{7.5}$$

$\overline{C} \equiv C_p(\underline{t},T,R,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$.

7.2.3 Estimation $W_p^{1,2}$ relative au problème localisé

Alors, d'après (3.9):

$$\| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)} \;\leq\; C_\varepsilon\; \left(\| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;+\; \| \partial_y \varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \;+\; \| \varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \right) \;, \tag{7.6}$$

$C_\varepsilon \equiv C_p(\varepsilon,\underline{t},T,R,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$. D'où, par synthèse de (7.5)-(7.6)-(7.3):

$$
\begin{aligned}
(1 - rC_\varepsilon CC_p) \ \| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)} &\leq C_\varepsilon \ \left(\| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ + \ CC_p(r) \| \varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)}\right) \\
&\leq C_\varepsilon \ (1 + CC_p(r)\overline{C}) \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ .
\end{aligned}
$$

Choisissant $r < 1/C_\varepsilon CC_p$, on obtient finalement:

$$
\| \varphi_\varepsilon \|_{W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)} \ \leq \ C'_\varepsilon \ \| \check{\Gamma} \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ , \tag{7.7}
$$

$C'_\varepsilon \equiv C'_p(\varepsilon,\underline{t},T,R,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, où on peut vérifier à rebours (on l'utilisera plus loin) que la seule dépendance par rapport à $\varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ fixé est via (3.9), dans C_ε (et le choix de r qui en résulte).

7.2.4 Existence d'une solution forte du problème localisé

L'estimation (7.7), prouve alors l'existence d'une $W_p^{1,2}(Q_\varepsilon)$-solution φ_ε, au problème localisé sur Q_ε (on peut par exemple appliquer une alternative de Fredholm).

Remarque 7.1 Cette existence découle également de résultats généraux relatifs aux $W_{p,loc}^{1,2}(Q_\varepsilon)$-solutions de viscosité, voir Crandall *et al.*, [58, 60, 61].

7.3 Problème sur bande

7.3.1 *Scaling*

Fort de cette existence, on montre à présent que la constante C dans (3.9), et donc C'_ε dans (7.7), est en fait indépendante de $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$ fixé. On procède par *scaling* (changement de variables) comme suit. Notons $Y_\varepsilon =: AY_{\overline{\varepsilon}}$, et prolongeons $\check{\Gamma}_\varepsilon$ $(\check{\sigma})$ par 0 (constance en temps) à gauche de $\underline{t}$. Soient $(t_\varepsilon,y_\varepsilon) \in \widetilde{Q}_\varepsilon$ (Q_ε dûment prolongé à gauche de $\underline{t}$), les variables obtenues à partir de $(t,y) \in Q_{\overline{\varepsilon}}$, suivant $A^2(t-T) \equiv t_\varepsilon - T$, $Ay \equiv y_\varepsilon$ (voir Figure 7.1).

Le problème $(-\partial_{t_\varepsilon} - \frac{\check{\sigma}^2}{2}\partial^2_{y_\varepsilon^2})\widetilde{\varphi}_\varepsilon = \check{\Gamma}_\varepsilon$ ($\check{\sigma},\check{\Gamma}_\varepsilon$ ainsi prolongées) sur $\widetilde{Q}_\varepsilon$, $\widetilde{\varphi}_\varepsilon \equiv 0$ au bord parabolique $\partial_p\widetilde{Q}_\varepsilon$, rentre dans le cadre général des hypothèses de notre Théorème 3.11 (sur $\widetilde{Q}_\varepsilon$). Ce problème admet donc une $W_p^{1,2}(\widetilde{Q}_\varepsilon)$-solution $\widetilde{\varphi}_\varepsilon$, en vertu du résultat d'existence d'ores et déjà acquis (§7.2.4). $\widetilde{\varphi}_\varepsilon|_{Q_\varepsilon}$ coïncide donc avec φ_ε, par unicité résultant de l'estimation (7.7) relative au problème $(-\partial_{t_\varepsilon} - \frac{\check{\sigma}^2}{2}\partial^2_{y_\varepsilon^2})\varphi_\varepsilon = \check{\Gamma}_\varepsilon$ sur Q_ε, $\varphi_\varepsilon = 0$ sur $\partial_p Q_\varepsilon$.

Procédons maintenant au changement de variables entre $Q_{\overline{\varepsilon}}$ et $\widetilde{Q}_\varepsilon$: $\widehat{\varphi}_\varepsilon,\hat{\sigma}_\varepsilon,\widehat{\Gamma}_\varepsilon(t,y) \equiv \widetilde{\varphi}_\varepsilon,\check{\sigma}$, $\check{\Gamma}_\varepsilon(t_\varepsilon,y_\varepsilon)$. On obtient l'équation suivante pour $\widehat{\varphi}_\varepsilon$,

$$
-\partial_t\widehat{\varphi}_\varepsilon \ - \ \frac{(\hat{\sigma}_\varepsilon(t,y))^2}{2} \,\partial^2_{y^2}\widetilde{\varphi}_\varepsilon \ = \ A^2 \ \widehat{\Gamma}_\varepsilon
$$

sur $Q_{\overline{\varepsilon}}$ (et $\widehat{\varphi}_\varepsilon|_{\partial_p Q_{\overline{\varepsilon}}} \equiv 0$), où $\hat{\sigma}_\varepsilon$ a les mêmes bornes que $\check{\sigma}$. D'où par estimation (3.9) sur $Q_{\overline{\varepsilon}}$:

$$
\| \partial_t\widehat{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(Q_{\overline{\varepsilon}})} \ + \ \| \partial^2_{y^2}\widehat{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(Q_{\overline{\varepsilon}})} \ \leq \ C_{\overline{\varepsilon}} \ A^2 \ \| \hat{\Gamma}_\varepsilon \|_{L_p(Q_{\overline{\varepsilon}})} \ ,
$$

$C_{\overline{\varepsilon}} \equiv C_p(\overline{\varepsilon},\underline{t},T,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$. Soit en variables $(t_\varepsilon,y_\varepsilon) \in \widetilde{Q}_\varepsilon$:

$$
\| \partial_{t_\varepsilon}\widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(\widetilde{Q}_\varepsilon)} \ + \ \| \partial^2_{y_\varepsilon^2}\widetilde{\varphi}_\varepsilon \|_{L_p(\widetilde{Q}_\varepsilon)} \ \leq \ C_{\overline{\varepsilon}} \ \| \check{\Gamma}_\varepsilon \|_{L_p(\widetilde{Q}_\varepsilon)} \ ,
$$

et a fortiori

$$
\| \partial_t\varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ + \ \| \partial^2_{y^2}\varphi_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ \leq \ C_{\overline{\varepsilon}} \ \| \check{\Gamma}_\varepsilon \|_{L_p(Q_\varepsilon)} \ ,
$$

pour $\varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$. A posteriori, les constantes C dans (3.9), puis C'_ε dans (7.7), sont bien indépendantes de $\varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$.

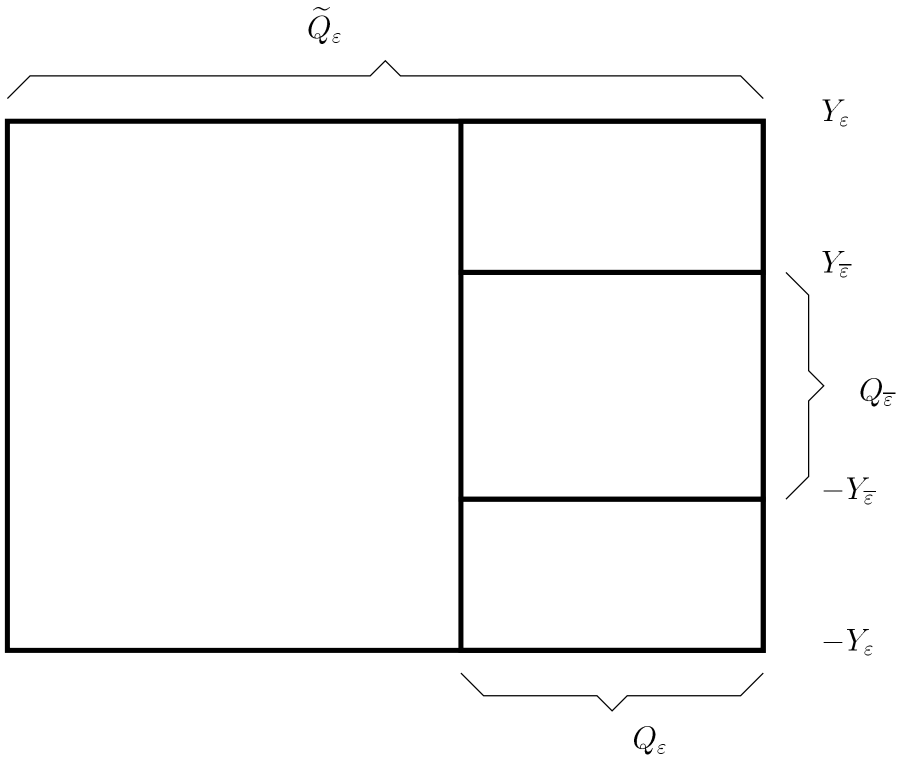


FIG. 7.1 – *Scaling*

7.3.2 Existence et estimation

D'après (7.7) ainsi précisée, (7.1) et l'injection de Sobolev (3.1), il existe alors une extraction $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon'}$ convergeant dans $W_p^{1,2}(Q^T)$-faible, (Rellich-Kondrakov) $L_{p,loc}(Q^T)$-fort, (Ascoli-Arzéla) localement uniformément, (unicité de la limite dans $L_{p,loc}(Q^T)$-fort) vers une limite $\varphi \in W_p^{1,2}(Q^T)$. (Lemme 3.6.b) φ est alors une solution du type recherché du problème dans tout l'espace. De plus, φ vérifie l'estimation (3.18) (avec T à la place de $\overline{T}$), par passage à la limite $W_p^{1,2}(Q^T)$-faible dans l'estimation (7.7)-(7.1) indépendante de ε' relative à $\widetilde{\varphi}_{\varepsilon'}$, pour la partie droite, puis injection de Sobolev (3.1) pour la partie gauche. (3.18) (stricto sensu) s'en déduit en appliquant ce qui précède sur $Q^{\overline{T}}$ à $\widetilde{\Gamma} \equiv \check{\Gamma}$ à gauche de T et 0 à droite.

7.3.3 Représentation probabiliste

Pour toute solution $\varphi \in W_{p,loc}^{1,2}(Q^T)$ du problème global, tendant vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$ — donc φ continue bornée, — on a de manière analogue au §7.2.2, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$E_{\check{P}}^{t,y} e^{-r(\tau_\varepsilon - t)} \varphi(\tau_\varepsilon, y_{\tau_\varepsilon}) - \varphi(t,y) \;=\; -\, E_{\check{P}}^{t,y} \int_{s=t}^{\tau_\varepsilon} e^{-r(s-t)} \check{\Gamma}(s,y_s)\, ds \;, \tag{7.8}$$

où

$$\left| \int_{s=t}^{\tau_\varepsilon} e^{-r(s-t)} \check{\Gamma}(s,y_s)\, ds \right| \;\leq\; \int_t^T e^{-r(s-t)} |\check{\Gamma}(s,y_s)|\, ds \;.$$

D'où, par convergence dominée — utilisant (7.4) — des membres gauche et droite de (7.8) quand $\varepsilon \to 0^+$, $\tau_\varepsilon \to T$ p.s.

$$\varphi(t,y) \;=\; E_{\check{P}}^{t,y} \int_{s=t}^{T} e^{-r(s-t)} \check{\Gamma}(s,y_s)\, ds. \tag{7.9}$$

Chapitre 8

Attenants

Ce Chapitre passe en revue un certain nombre de Corollaires des Théorèmes 3.8 et 3.10.

Corollaire 8.1 *$\overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$; $q,r \in [0,R]$; $\check{\sigma}_{(n)} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$, où on suppose $\check{\sigma}_n \to \check{\sigma}$ quand $n \to +\infty$, localement uniformément sur $\overline{Q}$; $((t,y),(T,k)) \in \overline{Q}^2$, $t < T$. Alors, $\check{\Pi}_{T,k}(t,y;q,r,\check{\sigma}_n)$ tend vers $\check{\Pi}_{T,k}(t,y;q,r,\check{\sigma})$ quand $n \to +\infty$, uniformément vis-à-vis de variations locales de (t,y), respectivement (T,k).*

Preuve Vu au cours de la Preuve du Théorème 3.8, cas général (§4.2), en utilisant Stroock-Varadhan [127, Theorem 9.1].

□

Le Corollaire suivant complète le Théorème 3.8, en montrant la continuité du prix de l'option $\Pi_{T,k}(t_0,S_0)$, conjointe par rapport aux quatre arguments (t_0,S_0,T,K), $t_0 < T$.

Corollaire 8.2 *Bande Q; $q,r \in [0,R]$, $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}((0 <)\underline{\sigma},\overline{\sigma})$. Alors, $\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;q,r,\check{\sigma})$ continue par rapport à $((t_0,y_0),(T,k)) \in Q^2 \cap \{t_0 < T\}$, uniformément en $q,r \in [0,R]$, $\check{\sigma} \in \mathcal{C}_{\overline{Q}}(\underline{\sigma},\overline{\sigma})$.*

Preuve Soient $p \in]2,+\infty[$, $\alpha \equiv 1 - \frac{2}{p} > 0$, $B_{3\varepsilon}(t_0,y_0) \subset Q^T$. Alors, pour tous $(t_0',y_0') \in B_{t_0,y_0}(\varepsilon)$, $(T',k') \in B_{T,k}(\varepsilon)$, on a d'après les estimations intérieures (3.10), vus le Théorème 3.8 et la Remarque 3.4:

$$\begin{aligned}
|\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0) - \check{\Pi}_{T',k'}(t_0',y_0')| &\leq |\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0) - \check{\Pi}_{T',k'}(t_0,y_0)| \\
&\quad + |\check{\Pi}_{T',k'}(t_0,y_0) - \check{\Pi}_{T',k'}(t_0',y_0')| \\
&\leq \| \check{\Pi}_{\cdot}(t_0,y_0) \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{B}_\varepsilon(T,k))} \ (|T-T'|^\alpha + |k-k'|^\alpha) \\
&\quad + \| \check{\Pi}_{T',k'}(\cdot) \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{B}_\varepsilon(t_0,y_0))} \ (|t_0-t_0'|^\alpha + |y_0-y_0'|^\alpha) \\
&\leq CS_0\,(|T-T'|^\alpha + |k-k'|^\alpha + |t_0-t_0'|^\alpha + |y_0-y_0'|^\alpha) \ ,
\end{aligned}$$

$C \equiv C_p(\varepsilon,R,\underline{\sigma},\overline{\sigma})$.

□

Corollaire 8.3 *$7/3 \leq p'' \leq p' \leq p \leq 8/3$, $p = (p'+8/3)/2$, $p' = (p''+8/3)/2$; $(T,k) \in \overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R}$ ($|k| \leq \overline{k}$); $q,r \in [0,R]$, $\sigma_0 > 0$, $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}(\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0+\varepsilon_0)$ ($0 < \varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0) \leq \sigma_0/2$ du Théorème 3.10); $\check{h},\check{h}' \in H^1(Q)$.*

a. Soit $\check{\Pi}$, ou $\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma})$, la $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution, comprise entre 0 et S, (Théorème 3.8.a, en variables logarithmiques) de $BS^+_{Q^T}(T,k;q,r,\check{\sigma})$. On note également $\check{\Gamma} \equiv \check{h}\check{\sigma}(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check{\Pi}$. Alors,

$$\| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check{\Pi} \|_{L_p(Q^T)} \ \leq \ C_p \ , \tag{8.1}$$

$$\| \check\Gamma \|_{L_{p'}(Q^T)} \ \le \ C'_{p'} \ \ \| \check h \|_{H^1(Q)} \ ,$$

$C_p, C'_{p'} \equiv C_p, C'_{p'}(\underline{t}, \overline{T}, \overline{k}; R; \sigma_0)$.

b. *Soit de plus $d\check\Pi$, ou $d\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma)$. $\check h$, la $W^{1,2}_{p'}(Q^T)$-solution (Théorème 3.10) de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma;\check\Gamma)$, $\check\Gamma \in L_{p'}(Q^T)$ (vu a). Soient encore $\check\Gamma'/d\check\Pi'$, analogues de $\check\Gamma/d\check\Pi$ en $\check h'$ au lieu de $\check h$, et*

$$d\check\Gamma \ \equiv \ \check h'\check\sigma(\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi \ + \ \check h\check\sigma(\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi' \ + \ \check h\check h'(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi \ .$$

Alors,

$$\| d\check\Gamma \|_{L_{p''}(Q^T)} \ \le \ C''_{p''} \ \| \check h \|_{H^1(Q)} \ \ \| \check h' \|_{H^1(Q)} \ ,$$

$C''_{p''} \equiv C''_{p''}(\underline{t}, \overline{T}, \overline{k}; R; \sigma_0)$. On note alors $d^2\check\Pi$, ou $d^2\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma)$. $(\check h, \check h')$, la $W^{1,2}_{p'}(Q^T)$-solution (Théorème 3.10) de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma;d\check\Gamma)$.

c. *Pour tout $(t_0,y_0) \in \overline{Q}^T$,*

$$d\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma)\ .\ \check h \tag{8.2}$$
$$\equiv \int_{t=t_0}^{T} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-y}(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_{t,y}(t_0,y_0;\check\sigma)\check h(t,y)\check\sigma(t,y)(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_{T,k}(t,y;\check\sigma)\ dt\ dy\ .$$

Preuve

a. Considérons $\check\Pi$ et $\check\Pi_0$, $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solutions, comprises entre 0 et S, (Théorème 3.8.a) de $BS^+_{Q^T}(T,k;q,r,\check\sigma$ et $\sigma_0)$. Alors, $\delta\check\Pi \equiv \check\Pi - \check\Pi_0$, tend vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$ (Théorème 3.8.a, Asymptotique). De plus, $\delta\check\Pi$ est $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution (par linéarité) de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma;\check\Gamma)$, $\check\Gamma \equiv \frac{1}{2}(\check\sigma^2 - \sigma_0^2)(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_0$, où (Remarque 4.1)

$$\| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_0 \|_{L_p(Q^T)} \ \le \ C_p(\underline{t}, \overline{T}, \overline{k}, R, \sigma_0)\ .$$

D'où (8.1), via (3.16).

Puis, appliquant (8.1), il vient si ${p'}^{-1} = p^{-1} + \mu^{-1}$ (inégalité de Hölder)

$$\begin{aligned} \| \check\sigma\check h(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi \|_{L_{p'}(Q^T)} \ &\le \ \overline{\sigma} \ \| \check h \|_{L_\mu(Q^T)} \ \ \| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi \|_{L_p(Q^T)} \\ &\le \ C'_{p'} \ \| \check h \|_{H^1(Q)} \ , \end{aligned}$$

par injection de Sobolev (3.2) $H^1(Q) \hookrightarrow L_\mu(Q)$.

b. Utilisant a et l'estimation (3.16) pour $d\check\Pi$, $d\check\Pi'$, il vient de manière analogue,

$$\begin{aligned} \| d\check\Gamma \|_{L_{p''}(Q^T)} \ &\le \ \| \check h'\check\sigma(\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi \|_{L_{p''}(Q^T)} \ + \ \| \check h\check\sigma(\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi' \|_{L_{p''}(Q^T)} \\ &\quad + \ \| \check h\check h'(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi \|_{L_{p''}(Q^T)} \\ &\le \ \overline{\sigma} \ \| \check h' \|_{L_\nu(Q^T)} \ \ \| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi \|_{L_{p'}(Q^T)} \\ &\quad + \ \overline{\sigma} \ \| \check h \|_{L_\nu(Q^T)} \ \ \| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi' \|_{L_{p'}(Q^T)} \\ &\quad + \ \| \check h' \|_{L_\nu(Q^T)} \ \ \| \check h \|_{L_\mu(Q^T)} \ \ \| (\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi \|_{L_p(Q^T)} \\ &\le \ C''_{p''} \ \| \check h \|_{H^1(Q)} \ \ \| \check h' \|_{H^1(Q)} \ . \end{aligned}$$

c. N'est autre que la représentation probabiliste (3.15) de la solution $d\check\Pi$, vus a et le Théorème 3.8.b (en variables logarithmiques; $y \mapsto e^{-y}(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_{t,y}(t_0,y_0)$, densité de transition r-actualisée $g_{\check\sigma}(t_0,y_0;t,y)$, t-presque partout).

□

Chapitre 9

Étude mathématique du problème d'optimisation

9.1 Formulation mathématique du problème d'optimisation

Étant donnée une bande $\Omega \ni (t_0,y_0)$, (T,k) ($y_0 = \ln(S_0)$, $k = \ln(K)$, $t_0 < T$), on formule le problème de calibration lissée à la phase courante (t_0,S_0), sur un (seul, afin d'alléger les notations) *call* du marché, de prix d'exercice K et maturité T, le prix observé $\Pi^{obs}_{T,K}$ du *call* valant alors $\Pi^{obs}_{T,K}(t_0,S_0) = \pi$,

$$\min_{\substack{\breve{\sigma}\in\sigma_0+H^1(\Omega)\\ \partial_t\breve{\sigma}\leq 0,\ 0<\breve{\sigma}}} 2J^\lambda(\breve{\sigma}) \;\equiv\; \lambda \parallel \breve{\sigma} - \sigma_0 \parallel^2_{H^1(\Omega)} \;+\; (\Pi_{T,K}(t_0,S_0;q,r,\sigma) - \pi)^2 \;, \qquad (9.1)$$

— $\sigma_0 > 0$ constante fixée, $\lambda \geq 0$ paramètre de régularisation (q et r, dividende du sous-jacent et taux court de l'économie, constantes exogènes ≥ 0).

Remarque 9.1 D'après le Corollaire G.5, une nappe $\breve{\sigma}$ telle qu'en (9.1) vérifie, sur toute bande Q entièrement intérieure à Ω, les hypothèses générales du Théorème 3.8, dont on peut tirer toutes les conclusions : représentation probabiliste du prix de l'option/caractérisation en termes d'*edp* de Black-Scholes *backward* et Dupire *forward*, etc...

Remarque 9.2 On aurait aussi bien pu prendre un *put*, en vertu de la symétrie évoquée Remarque 3.4 ; et/ou envisager la contrainte $0 \leq \partial_t\breve{\sigma}$ au lieu de $\partial_t\breve{\sigma} \leq 0$ dans (9.1).

Remarque 9.3 Ce problème à un seul *call* se résout trivialement parmi les constantes $\breve{\sigma}$. Mais tout ce qui suit se généralise immédiatement à un système arbitraire de *call* et *put* (voir par exemple la Remarque 10.5).

Commentaire 9.4 *La question est ouverte de savoir si une nappe σ minimisant (9.1) est nécessairement monotone. Cette propriété est probablement vérifiée, en tout cas pour des valeurs de λ suffisamment grandes (théorie des réarrangements). Pour divers profils de nappes de volatilité locale calibrées, on renvoie au livre de Rebonato [118, Ch. II.6].*

Par ailleurs, il pourrait être également intéressant d'envisager les problèmes de minimisation précédents lorsque σ_0 n'est plus fixé mais est un paramètre libre.

Enfin, comme évoqué plus haut, le critère (9.1) (ou plutôt le critère analogue correspondant à un système arbitraire de call *et* put*) pourrait être généralisé de multiples façons. Ainsi, on pourrait pondérer les résidus quadratiques des différents* call *et* put*, par exemple selon les* vega *(sensibilités par rapport à la volatilité, à condition de les trouver cotées sur les marchés). On pourrait aussi découpler les lissages en espace et en temps, introduisant alors des facteurs qui se justifient par des considérations de dimensions. On pourrait encore considérer une autre puissance de la norme du gradient.*

Le problème que l'on se pose est alors:
b. calculer σ, sous réserve de a:
a. montrer que le problème d'optimisation (9.1) est bien posé, i.e. admet, pour tout jeu de données au voisinage de (t_0,S_0,T,K,π), une unique solution $\check{\sigma}$, tendant dans $\sigma_0 + H^1(\Omega)$, au moins faiblement, donc (Corollaire G.6.b) uniformément sur les compacts intérieurs à Ω, vers la solution $\check{\sigma}$ pour (t_0,S_0,T,K,π), quand les données tendent vers (t_0,S_0,T,K,π).

Commentaire 9.5 *C'est en effet le moins que l'on puisse demander, si l'on veut que la nappe σ correspondant au jeu de données (t_0,S_0,T,K,π) ait un sens (à cause de l'imprécision sur les prix de marché ou l'interprétation des échéances), puisse être de quelque usage que ce soit à une date t ultérieure à t_0 (le laps de temps pouvant servir à calculer σ!), les cours de S et $\Pi^{obs}_{T,K}$ valant alors S_t (proche de S_0, par continuité de la diffusion S) et $\Pi^{obs}_{T,K}(t,S_t)$ (proche de π si $\Pi^{obs}_{T,K}$ continue en (t_0,S_0), ce qui est raisonnable en pratique pour presque tout (t_0,S_0)), et enfin si l'on veut pouvoir approcher σ par discrétisation.*

Lemme 9.6 *Bandes Ω, Q; $\overline{Q} \subset \Omega$. $0 < \varepsilon < \sigma_0/2$. $\check{\sigma} \in \sigma_0 + H^1(\Omega)$, $\partial_t\check{\sigma} \leq 0$. Alors $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}((0 <)\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0)$ si $\| \check{\sigma} - \sigma_0 \|_{H^1(\Omega)}$ suffisamment faible (dépendant de Ω, Q et ε).*

Preuve Par application du Théorème G.4, à $u \equiv \check{\sigma} - \sigma_0$.

□

Définition 9.7 *Étant donnée une bande Ω, et les constantes $0 < \varepsilon < \sigma_0/2$, on notera :*

$$\mathcal{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0}(\Omega) \;\equiv\; \{\check{\sigma} \in \sigma_0 + \overline{B}_1 \;; \partial_t\check{\sigma} \leq 0, \sigma_0 - \varepsilon \leq \check{\sigma} \leq \sigma_0 + \varepsilon\}$$

— $\overline{B}_1$ boule unité fermée de $H^1(\Omega)$.

Lemme 9.8 *Bande Ω, $0 < \varepsilon < \sigma_0/2$. Alors $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{\varepsilon}_{\sigma_0}(\Omega)$ est un sous ensemble convexe (faiblement) fermé non vide ($\ni \sigma_0$) de $\sigma_0 + H^1(\Omega)$.*

Preuve Seul le caractère fermé ne va pas de soi. Or, une convergence dans $\sigma_0 + H^1(\Omega)$ faible de fonctions de $\mathcal{K}$ est uniforme sur les compacts intérieurs à Ω (Corollaire G.6.b). $\mathcal{K}$ est donc bien fermé.

□

Remarque 9.9 Un convexe fermé l'est toujours faiblement. Ici, on le trouve directement.

Le Lemme suivant est un approfondissement du Corollaire 8.3.

Lemme 9.10 *$p \in I = [7/3,8/3]$, $\alpha \equiv 1 - 2/p > 0$; bandes Ω, Q; $\overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R} \subset \Omega$; $((t_0,y_0),(T,k),\pi) \in Q^2 \times \mathbb{R}$ $(t_0 < T,|k| \leq \overline{k})$; $q,r \in [0,R]$, $\sigma_0 > 0$, $\check{\sigma} \in \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{\varepsilon_0}_{\sigma_0}(\Omega)$ ($\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0)$ du Théorème 3.10; donc $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}((0 <)\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0)$); $\check{h},\check{h}' \in H^1(\Omega)$; $\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma})$,$\check{\Gamma}$,$d\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).\check{h}$, $d\check{\Gamma}$, $d^2\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).(\check{h},\check{h}')$ comme au Corollaire 8.3.*

- *a. $\| d\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).\check{h} \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)} \leq C \| \check{h} \|_{H^1(\Omega)}$, $C \equiv C_p(\underline{t},\overline{T},\overline{k},R,\sigma_0)$. De plus, si $\check{\sigma} + \check{h} \in \mathcal{K}$, alors $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon\check{\Pi} \equiv \varepsilon^{-1}[\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}+\varepsilon\check{h}) - \Pi_{T,k}(\cdot;\check{\sigma})]$ ($\varepsilon \in]0,1[$) $\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T) \cap W^{1,2}_p(Q^T)$-converge vers $d\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).\check{h}$ quand $\varepsilon \to 0^+$.*
- *b. $\| d^2\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).(\check{h},\check{h}') \|_{\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)} \leq C \| \check{h} \|_{H^1(\Omega)} \| \check{h}' \|_{H^1(\Omega)}$, $C \equiv C_p(\underline{t},\overline{T},\overline{k},R,\sigma_0)$. De plus, si $\check{\sigma} + \check{h} \in \mathcal{K}$, alors $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon\check{\Pi} \equiv \varepsilon^{-1}[d\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma} + \varepsilon\check{h}).\check{h}' - d\Pi_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).\check{h}']$ ($\varepsilon \in]0,1[$) $\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T) \cap W^{1,2}_p(Q^T)$-converge vers $d^2\check{\Pi}_{T,k}(\cdot;\check{\sigma}).(\check{h},\check{h}')$ quand $\varepsilon \to 0^+$.*

c. *$J^\lambda(t_0,y_0,T,k,\pi)$ Gateaux-différentiable sur $\mathcal{K}$,*

$$\langle \nabla J^\lambda(\check\nu) - \nabla J^\lambda(\check\sigma),\check\nu - \check\sigma\rangle_{H^1(\Omega)} \;\geq\; (\lambda - C) \;\|\check\nu - \check\sigma\|^2_{H^1(\Omega)} \tag{9.2}$$

$$\|\nabla J^\lambda(\check\nu) - \nabla J^\lambda(\check\sigma)\|_{H^1(\Omega)} \;\leq\; (\lambda + C') \;\|\check\nu - \check\sigma\|_{H^1(\Omega)} \tag{9.3}$$

($\check\sigma,\check\nu \in \mathcal{K}$), C, C' uniformes vis-à-vis de variations au voisinage de (t_0,y_0,T,k,π).

Preuve

a et b. Les estimations relatives à $d\check\Pi$ et $d^2\check\Pi$ résultent du Corollaire 8.3. Supposons de plus $\check\sigma + \check h \in \mathcal{K}$. Alors, $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon\check\Pi$ tend vers 0 quand $|y| \to +\infty$, uniformément en $t \in [\underline{t},T]$ (Théorème 3.8.a Asymptotique); $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon\check\Pi$, $W^{1,2}_{p,loc}(Q^T)$-solution (Théorème 3.8.a et linéarité) de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma+\varepsilon\check h;\check\Gamma_\varepsilon)$,

$$\check\Gamma_\varepsilon \;\equiv\; \check h(\check\sigma + \frac{\varepsilon\check h}{2})(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma)\;,$$

où $\check\Gamma_\varepsilon$ $L_p(Q^T)$-converge vers $\check\Gamma$ quand $\varepsilon \to 0$. Donc, (Lemme 3.6.b) $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon\check\Pi$ est la $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma+\varepsilon\check h;\check\Gamma_\varepsilon)$, et (Théorème 3.10 et linéarité en $\check\sigma + \varepsilon\check h$) $\mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T) \cap W^{1,2}_p(Q^T)$-converge, quand $\varepsilon \to 0$, vers la solution $d\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma).\check h$ de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\,\check\sigma;\check\Gamma)$.

De même, $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon d\check\Pi$ ($\varepsilon \in]0,1[$) est $W^{1,2}_p(Q^T)$-solution (par linéarité) de $BS'_{Q^T}(T;q,r,\check\sigma+\varepsilon\check h;d\check\Gamma_\varepsilon)$,

$$\begin{aligned} d\check\Gamma_\varepsilon \;&\equiv\; (\check h\check\sigma + \frac{\varepsilon\check h^2}{2})(\partial^2_{y^2} - \partial_y)d\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma).\check h' \\ &+\; \check\sigma\check h'(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\left[\varepsilon^{-1}(\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma+\varepsilon\check h) - \check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma))\right] \\ &+\; \check h\check h'(\partial^2_{y^2} - \partial_y)\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma+\varepsilon\check h)\;, \end{aligned}$$

où $d\check\Gamma_\varepsilon$ $L_p(Q^T)$-converge vers $d\check\Gamma$ quand $\varepsilon \to 0^+$. Donc, (Théorème 3.10 et linéarité en $\check\sigma + \varepsilon\check h$) $\varepsilon^{-1}\delta_\varepsilon d\check\Pi$ $W^{1,2}_p(Q^T) \cap \mathcal{C}^0_\alpha(\overline{Q}^T)$-converge vers $d^2\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma).(\check h,\check h')$ quand $\varepsilon \to 0$.

c. $\nabla J^\lambda(\check\sigma)$, représentant isométrique dans $H^1(\Omega)$ (Riesz) de la forme linéaire continue (d'après l'estimation du a)

$H^1(\Omega) \ni \check h \;\mapsto\; dJ^\lambda(\check\sigma)\,.\,\check h \;:=\; \lambda\langle\check\sigma-\sigma_0,\check h\rangle_{H^1(\Omega)} + (\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma)-\pi)d\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma).\check h\,,$

qui pour $\check h \in \mathcal{K}$ (toujours d'après a) n'est autre que

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\;\left[J^\lambda(\check\sigma+\varepsilon\check h) \;-\; J^\lambda(\check\sigma)\right]\;.$$

Étant données $\check\sigma \in \mathcal{K}$, $\check h,\check h' \in H^1(\Omega)$, on notera également :

$$\begin{aligned} d^2J^\lambda(\check\sigma).(\check h,\check h') \;&=\; \lambda\langle\check h,\check h'\rangle_{H^1(\Omega)} \\ &+\; \left(d\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma).\check h\right)\left(d\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma).\check h'\right) \\ &+\; \left(\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma) - \pi\right)\; d^2\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma).(\check h,\check h')\;, \end{aligned}$$

et pour $\check\sigma,\check\nu \in \mathcal{K}$: $\check\sigma_\varepsilon \equiv (1-\varepsilon)\check\sigma + \varepsilon\check\nu$, $J_\varepsilon \equiv J^\lambda(\check\sigma_\varepsilon)$, $j_\varepsilon \equiv \nabla J^\lambda(\check\sigma_\varepsilon)$ ($\varepsilon \in]0,1[$, dérivation par rapport à ε notée $'$). En utilisant a et b, et la borne S_0 sur $|\check\Pi|$, il vient alors :

$$\begin{aligned} \langle\nabla J^\lambda(\check\nu) - \nabla J^\lambda(\check\sigma),\check\nu - \check\sigma\rangle_{H^1(\Omega)} \;&=\; J'_1 - J'_0 \;=\; \int_0^1 J''_\varepsilon d\varepsilon \\ &=\; \int_0^1 d^2J^\lambda(\check\sigma_\varepsilon).(\check\nu - \check\sigma,\check\nu - \check\sigma) \\ &\geq\; (\lambda - C)\;\|\check\nu - \check\sigma\|^2_{H^1(\Omega)}\;, \end{aligned}$$

et pour $\check{h} \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \langle \nabla J^\lambda(\check{\nu}) - \nabla J^\lambda(\check{\sigma}),\check{h}\rangle_{H^1(\Omega)} &= \langle j_1 - j_0,\check{h}\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_0^1 \langle j_\varepsilon,\check{h}\rangle'_{H^1(\Omega)}\, d\varepsilon \\ &= \int_0^1 d^2 J^\lambda(\check{\sigma}_\varepsilon).(\check{\nu}-\check{\sigma},\check{h})\, d\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle \nabla J^\lambda(\check{\nu}) - \nabla J^\lambda(\check{\sigma}),\check{h}\rangle_{H^1(\Omega)}| &\leq \int_0^1 |d^2 J^\lambda(\check{\sigma}_\varepsilon).(\check{\nu}-\check{\sigma},\check{h})\, d\varepsilon| \\ &\leq (\lambda + C) \ \| \check{\nu} - \check{\sigma} \|_{H^1(\Omega)} \ \ \| \check{h} \|_{H^1(\Omega)} \ , \end{aligned}$$

d'où par passage au sup en $\check{h}$ normé dans $H^1(\Omega)$

$$\| \nabla J^\lambda(\check{\nu}) - \nabla J^\lambda(\check{\sigma}) \| \ \leq \ (\lambda + C) \ \| \check{\nu} - \check{\sigma} \|_{H^1(\Omega)} \ ,$$

C, C' uniformes vis-à-vis de variations au voisinage de (t_0,y_0,T,k,π).

$\square$

9.2 Existence, unicité, stabilité du minimum (λ grand)

Théorème 9.11 *Bandes Ω, Q; $\overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R} \subset \Omega$; $((t_0,y_0),(T,k),\pi) \in Q^2 \times \mathbb{R}_+$ $(t_0 < T)$, $q,r \in [0,R]$, $\sigma_0 > 0$. Alors pour λ assez grand,*

a. *le problème (9.1) est bien posé en (t_0,y_0,T,k,π), si et seulement s'il l'est encore, lorsque l'on renforce la contrainte de positivité de $\check{\sigma}$ en l'encadrement suivant sur Ω:*

$$\sigma_0 - \varepsilon_0 \ \leq \ \check{\sigma} \ \leq \ \sigma_0 + \varepsilon_0 \tag{9.4}$$

($\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0)$ du Théorème 3.10; donc $\check{\sigma} \in BUC_{\overline{Q}}((0 <)\sigma_0 - \varepsilon_0,\sigma_0 + \varepsilon_0))$, et qu'on impose en outre $\| \check{\sigma} - \sigma_0 \|_{H^1(\Omega)} \leq 1$ — soit, finalement, $\check{\sigma} \in \mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{\varepsilon_0}_{\sigma_0}(\Omega)$;

b. *J^λ telle qu'en (9.1), est fortement convexe sur le convexe fermé non vide $\mathcal{K}$, uniformément au voisinage de (t_0,y_0,T,k,π);*

c. *le problème (9.1) est bien posé en (t_0,y_0,T,k,π).*

Commentaire 9.12 *Le Théorème 9.11 présente un intérêt davantage mathématique que pratique. En effet, on verra plus loin que l'on est conduit à utiliser dans les algorithmes de faibles valeurs de λ, si l'on veut converger en un temps raisonnable vers les prix utilisés pour la calibration. Or pour de faibles valeurs de λ on n'est plus dans le cadre de l'hypothèse du Théorème 9.11. Au contraire le problème limite quand $\lambda \to 0^+$ est le problème de calibration pure sur données de marché, dont on a vu au Théorème 5.2 qu'il était très sous-déterminé.*

Cependant, d'une part, ce résultat permet de mieux comprendre l'effet du terme de régularisation. D'autre part, même s'il s'agit d'un résultat partiel qui ne concerne pas un cas que l'on rencontrera en pratique (puisqu'au contraire on s'attachera à maintenir faible l'effet du terme de régularisation), il s'agit, à notre connaissance, du seul résultat d'existence, unicité et stabilité dont on dispose pour des problèmes de type calibration (pour unicité et stabilité d'une nappe $\sigma(t,s) \equiv \rho(t)\sigma(s)$, voir Bouchouev-Isakov [39]).

Preuve du Théorème 9.11

a. On va montrer que le problème (9.1) (qu'on qualifiera de *libre*), et celui (qu'on qualifiera de *contraint*) s'en déduisant par ajout de la contrainte supplémentaire

(9.4) sur $\overline{Q}$, ont, pour λ assez grand, les mêmes ensembles de solutions, uniformément au voisinage compact $\mathcal{V} \subset Q^2 \times \mathbb{R}_+$ de $((t_0,y_0),(T,k),\pi)$ tel que $t'_0 < T'$ si $((t'_0,y'_0),(T',k'),\pi') \in \mathcal{V}$. Or, si $\breve{\sigma}$, non croissante en temps, positive $\in \sigma_0 + H^1(\Omega)$ (donc $\breve{\sigma}$ uniformément continue sur les fermetures $\subset \Omega$ de sous-bandes de Ω, Corollaire G.5), vérifie l'encadrement (9.4) sur $\overline{Q}$, mais le viole sur une partie (non négligeable) de Ω (par continuité), alors la fonction $\breve{\sigma}' \equiv (\sigma_0 - \varepsilon_0) \vee \breve{\sigma} \wedge (\sigma_0 + \varepsilon_0)$ ($\breve{\sigma}$ écrétée aux niveaux $\sigma_0 - \varepsilon_0 < \sigma_0 + \varepsilon_0$) est encore non croissante en temps, positive $\in \sigma_0 + H^1(\Omega)$, vérifie cette fois-ci (9.4) sur Ω tout entier, et (Lemme G.7) améliore strictement le (terme de lissage du) critère J^λ (dont le terme de résidu quadratique ne "voit" que les valeurs, communes à $\breve{\sigma}$ et $\breve{\sigma}'$, sur $\overline{Q}$) par rapport à $\breve{\sigma}$, uniformément sur $\mathcal{V}$. Les solutions du problème contraint sont donc à leur tour à rechercher parmi les nappes $\breve{\sigma}$ satisfaisant (9.4) sur Ω tout entier.
Revenons au projet initial dans cette Preuve. De fait, si $\breve{\sigma}_n^\lambda$ (λ fixé) est une suite minimisante du problème libre en $((t'_0,y'_0),(T',k'),\pi') \in \mathcal{V}$, alors:

$$\begin{aligned}\lambda \limsup_{n\to+\infty} \| \breve{\sigma}_n^\lambda - \sigma_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \ &\leq\ \lim_{n\to+\infty} 2J^\lambda(\breve{\sigma}_n^\lambda) \ =\ \inf{}_{\text{libre}} 2J^\lambda \\ &\leq\ 2J^\lambda(\sigma_0) \ =\ \left(\check{\Pi}_{T',k'}(t'_0,y'_0;\sigma_0) - \pi'\right)^2 \ ,\end{aligned}$$

qui est borné sur $\mathcal{V}$, par continuité (notamment de $(t'_0,y'_0,T',k') \to \check{\Pi}_{T',k'}(t'_0,y'_0;\sigma_0)$ sur $\mathcal{V} \subset \{t'_0 < T'\}$, Corollaire 8.2) / compacité (de $\mathcal{V}$). Bref,

$$\lambda \limsup_{n\to+\infty} \| \breve{\sigma}_n^\lambda - \sigma_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \ \leq\ C$$

(C uniforme sur $\mathcal{V}$). Donc, par application du Lemme 9.6, $\breve{\sigma}_n^\lambda$ vérifie (9.4) sur $\overline{Q}$, pour $\lambda \geq \Lambda$ (Λ uniforme sur $\mathcal{V}$), $n \geq N_\lambda$. Alors, pour de tels λ, n,

$$J^\lambda(\breve{\sigma}^\lambda) \ \leq\ J^\lambda(\breve{\sigma}_n^\lambda)$$

si $\breve{\sigma}^\lambda$ résoud le problème contraint en (t'_0,y'_0,T',k',π') pour λ, auquel cas $J^\lambda(\breve{\sigma}^\lambda) \leq \inf_{\text{libre}} J^\lambda$, par passage à la limite à l'aide de la suite minimisante $\breve{\sigma}_n^\lambda$; $\breve{\sigma}^\lambda$ résoud donc le problème libre en (t'_0,y'_0,T',k',π') pour λ.
Inversement, toute solution $\breve{\sigma}^\lambda$ ($\lambda \geq \Lambda$) du problème libre en $((t'_0,y'_0),(T',k'),\pi') \in \mathcal{V}$ vérifie (9.4) sur $\overline{Q}$ (appliquer ce qui précède à $\breve{\sigma}_n^\lambda \equiv \breve{\sigma}$), et résout donc a fortiori le problème contraint en $((t'_0,y'_0),(T',k'),\pi')$.
On voit aussi que $\breve{\sigma}^\lambda$ vérifie

$$\| \breve{\sigma}^\lambda - \sigma_0 \|^2 \ \leq\ \frac{C}{\Lambda} \ \leq\ 1$$

(quitte à augmenter Λ).

b. Lemmes 9.8 et 9.10.c, équation (9.2).

c. Pour λ assez grand, cela revient à montrer que le problème de minimisation de J^λ sur $\mathcal{K}$ est bien posé en $((t_0,y_0),(T,k),\pi)$, d'après a.
Sachant qu'une fonctionnelle fortement convexe sur un convexe fermé non vide d'un Hilbert y admet toujours un unique minimum (voir par exemple Larrouturou-Lions [102, Théorème 3.3.37]), ce problème admet de fait une unique solution pour tout jeu de données au voisinage $\mathcal{V}$ de $((t_0,y_0),(T,k),\pi)$) (λ uniforme sur $\mathcal{V}$), d'après b.
Pour un tel λ, et $\mathcal{V} \ni ((t_0^n,y_0^n),(T_n,k_n),\pi_n) \to ((t_0,y_0),(T,k),\pi)$ quand $n \to +\infty$, montrons alors

$$\breve{\sigma}_n \ \equiv\ \operatorname{argmin}_{\mathcal{K}} J_n^\lambda \quad (J_n^\lambda \equiv J^\lambda(t_0^n,y_0^n,T_n,k_n,\pi_n))$$

$\to \check\sigma$ analogue en (t_0,y_0,T,k,π). En effet,

$$\lambda \ \| \check\sigma_n - \sigma_0 \|^2_{H^1(\Omega)} \ \leq \ 2 \ J^\lambda_n(\check\sigma_n) \ \leq \ 2 \ J^\lambda_n(\sigma_0) \ = \ (\check\Pi_{T_n,k_n}(t^n_0,y^n_0;\check\sigma_n) - \pi_n)^2 \ ,$$

qui, pour $\check\Pi_{T_n,k_n}(t^n_0,y^n_0;\check\sigma_n)$ compris entre 0 et $S^n_0 \equiv e^{y^n_0}$ (Lemme 3.7.b), n'excède pas $\pi_n^2 \vee (S^n_0 - \pi_n)^2$ (par convexité), puis (pour n assez grand) $2\pi^2 \vee (S_0 - \pi)^2$. (Toute extraction de) $\check\sigma_n$ admet alors une extraction convergeant vers une limite $\tilde\sigma$, $\sigma_0 + H^1(\Omega)$-faiblement/uniformément sur les compacts intérieurs à Ω (Corollaire G.6.a). Notamment, $\tilde\sigma \in \mathcal{K}$ (faiblement fermé, Lemme 9.8), et (voir ci-dessous)

$$J^\lambda(\tilde\sigma) \ \leq \ \liminf_{n\to+\infty} J^\lambda_n(\check\sigma_n) \ \leq \ \liminf_{n\to+\infty} J^\lambda_n(\check\sigma) \ = \ J^\lambda(\check\sigma) \ , \tag{9.5}$$

donc $\tilde\sigma$ n'est autre que $\check\sigma$. Bref, toute la suite $\check\sigma_n$ tend vers $\check\sigma$, $\sigma_0+H^1(\Omega)$-faiblement/uniformément sur les compacts intérieurs à Ω. Montrons à présent (9.5) ci-dessus. D'abord, par semi-continuité inférieure faible de la norme $H^1(\Omega)$, on a:

$$\| \tilde\sigma - \sigma_0 \|_{H^1(\Omega)} \ \leq \ \liminf_{n\to+\infty} \| \check\sigma_n - \sigma_0 \|_{H^1(\Omega)} \ . \tag{9.6}$$

Ensuite (preuve plus bas),

$$\check\Pi_{T_n,k_n}(t^n_0,y^n_0;\check\sigma_n) \to \check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\tilde\sigma) \tag{9.7}$$

quand $n \to +\infty$, et idem (en plus simple) avec $\check\sigma/\check\sigma$ à la place de $\check\sigma_n/\tilde\sigma$.
(9.6) et (9.7) (ainsi que son analogue dans le cas $\check\sigma/\ \check\sigma$) entraînent alors les inégalités extrêmes dans (9.5), dont l'inégalité centrale résulte simplement de l'optimalité de $\check\sigma_n$ pour J^λ_n.
Montrons finalement (9.7). On décompose

$$\begin{aligned} |\check\Pi_{T_n,k_n}(t^n_0,y^n_0;\check\sigma_n) - \check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\tilde\sigma)| \ &\leq \ |\check\Pi_{T_n,k_n}(t^n_0,y^n_0;\check\sigma_n) - \check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma_n)| \\ &\quad + \ |\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma_n) - \check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\tilde\sigma)| \\ &=: \ I \ + \ II \ , \end{aligned}$$

où quand $n \to +\infty$:
• I tend vers 0, par continuité de $\check\Pi$ par rapport aux quatre arguments (t_0,y_0,T,k) $(t_0 < T)$, uniforme en $\check\sigma_n \in \mathcal{K}$, $n \in \mathbb{N}$ (Corollaire 8.2);
• II tend vers 0 par convergence localement uniforme de $\check\Pi_{T,k}(\cdot;\check\sigma_n)$ vers $\check\Pi_{T,k}(\cdot;\tilde\sigma)$ sur $\overline{Q}^T$ (Corollaire 8.1). On a donc bien la convergence (9.7) annoncée.

□

Chapitre 10

Algorithmes

10.1 Gradient projeté

Le Théorème 9.11 précédent est constructif, en ce sens qu'il débouche sur un moyen de calcul de la solution. En effet, on a le

Corollaire 10.1 *Bandes Ω, Q; $\overline{Q} = [\underline{t},\overline{T}] \times \mathbb{R} \subset \Omega$; $((t_0,y_0),(T,k),\pi) \in Q^2 \times \mathbb{R}_+$ ($t_0 < T$); $q,r \in [0,R]$; $\sigma_0 > 0$; $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0)$, $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}^{\varepsilon_0}_{\sigma_0}(\Omega)$, du Théorème 9.11. Pour λ assez grand, uniforme vis-à-vis de variations au voisinage (t_0,y_0,T,k,π), la solution $\breve{\sigma}$ du problème (9.1) en (t_0,y_0,T,k,π) (Théorème 9.11.c), est limite dans $\sigma_0 + H^1(\Omega)$ / (Corollaire G.6.b) uniforme sur les compacts intérieurs à Ω, de la suite $\breve{\sigma}_n$ des itérées dans l'algorithme du gradient à pas fixe μ suffisamment faible (dépendant de λ), projeté sur $\mathcal{K}$,*

$$\breve{\sigma}_{n+1} \;=\; \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(\breve{\sigma}_n - \mu \nabla J(\breve{\sigma}_n)), \quad n \in \mathbb{N}$$

— au départ de $\breve{\sigma}_0$ arbitraire dans $\mathcal{K}$, par exemple $\breve{\sigma}_0 \equiv \sigma_0$.

Remarque 10.2 En utilisant le Théorème 3.11 au lieu du Théorème 3.10 dans ce qui précède, on peut en fait prendre n'importe quel

$$\mathcal{K} \;\equiv\; \{\breve{\sigma} \in \sigma_0 + \overline{B}_1 \;; \partial_t \breve{\sigma} \le 0, \underline{\sigma} \le \breve{\sigma} \le \overline{\sigma}\}$$

(constantes exogènes positives $\underline{\sigma} < \sigma_0 < \overline{\sigma}$) dans ce Corollaire, ainsi que dans le Théorème 10.4 à venir.

Preuve du Corollaire 10.1

Pour λ assez grand, uniforme au voisinage de $((t_0,y_0),(T,k),\pi)$, J^λ est $(\lambda - C)$-fortement convexe, à dérivée de Gateaux $(\lambda + C')$-Lipschitzienne sur $\mathcal{K}$ (constantes C, C', uniformes au voisinage de $((t_0,y_0),(T,k),\pi)$, Lemme 9.10.c). L'algorithme de gradient projeté converge alors pour $0 < \mu < 2(\lambda - C)/(\lambda + C')^2$ (Larrouturou-Lions [102, Théorème 4.3.4]).

□

L'implémentation effective de l'algorithme de gradient projeté correspondant au Théorème 10.1 suppose la connaissance de ∇J^λ (ainsi que celle, plus problématique, de l'opérateur de projection sur $\mathcal{K}$; comparer avec l'approche alternative esquissée §10.3) — ∇J^λ, le représentant isométrique dans $H^1(\Omega)$ (Riesz) de la forme linéaire continue (Lemme 9.10.c et sa Preuve)

$$H^1(\Omega) \ni h \;\mapsto\; \lambda \langle \breve{\sigma} - \sigma_0, h \rangle_{H^1(\Omega)} \;+\; (\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;\breve{\sigma}) - \pi) d\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;\breve{\sigma}).h \;,$$

où (Corollaire 8.3.c)

$$d\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;\breve{\sigma}) \;.\; h \;\equiv\; \int_\Omega \nabla \check{\Pi}(t_0,y_0,T,k);\breve{\sigma})\; h \;,$$

$\nabla\check{\Pi}(t_0,y_0,T,k)$ (abrév. $\nabla\check{\Pi}$) désignant ici la fonction suivante sur Ω, paramétrée par (t_0,y_0,T,k) (et dépendant bien sûr de $q,r,\check{\sigma}$)

$$\nabla\check{\Pi}(t,y) \;\equiv\; \mathbf{1}_{\{t_0<t<T\}} e^{-y}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{t,y}(t_0,y_0;\check{\sigma})\check{\sigma}(t,y)(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{T,k}(t,y;\check{\sigma}) \ .$$

Autrement dit (formulation variationnelle), $\nabla J^\lambda \equiv \nabla J^\lambda(t_0,y_0,T,k,\pi,\check{\sigma})$, est l'unique élément de $H^1(\Omega)$ (par dualité), tel que:

$$\langle \nabla J^\lambda - \lambda(\check{\sigma}-\sigma_0)\ ,h\rangle_{H_1(\Omega)} \;=\; (\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;\check{\sigma})-\pi)\ \langle\nabla\check{\Pi},h\rangle_{L_2(\Omega)}\ , \quad h\in H^1(\Omega)\ . \quad (10.1)$$

Lemme 10.3 *Données du Corollaire 10.1, $\check{\sigma}\in\mathcal{K}$. Alors, $\nabla\check{\Pi}(t_0,y_0,T,k)\in L_2(\Omega)$.*

Preuve D'après le Corollaire 8.3.a, $(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{T,k}(t,y;\check{\sigma})$ appartient à $L_{5/2}(]\frac{t_0+T}{2},T[\times\mathbb{R})$, et $e^{-y}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{t,y}(t_0,y_0;\check{\sigma})$ appartient à $L_{10}(]\frac{t_0+T}{2},T[\times\mathbb{R})$, par (3.12). Donc leur produit appartient à $L_2(]\frac{t_0+T}{2},T[\times\mathbb{R})$, par Hölder. D'où, par symétrie et recollement (et borne sur $|\check{\sigma}|$)

$$e^{-y}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{t,y}(t_0,y_0;\check{\sigma})\check{\sigma}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check{\Pi}_{T,k}(t,y;\check{\sigma})\in L_2(]t_0,T[\times\mathbb{R})\ ,$$

soit $\nabla\check{\Pi}(t_0,y_0,T,k)\in L_2(\Omega)$.

□

Théorème 10.4 *Données du Corollaire 10.1, $\check{\sigma}\in\mathcal{K}$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors*

a. $u\equiv\nabla J^\lambda(t_0,y_0,T,k;\check{\sigma})-\lambda(\check{\sigma}-\sigma_0)\in H^2(\Omega)$,

$$\left\{\begin{array}{lll} u \;-\; \Delta u &=& (\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0)-\pi)\nabla\check{\Pi}(t_0,y_0,T,k), \quad \Omega\text{-}p.p. \\ \gamma_1 u &=& 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \partial\Omega\text{-}p.p. \end{array}\right. \quad (10.2)$$

— trace $\gamma_1 u\in L_2(\partial\Omega)$ bien définie pour $u\in H^2(\Omega)$ (Théorème F.1.c).

b. De plus, on peut lire $-\lambda(\check{\sigma}-\sigma_0)$ à la place de u dans a si $\check{\sigma}$ minimum de J^λ intérieur à $\mathcal{K}$.

Preuve

a. Comme $\nabla\check{\Pi}\in L_2(\Omega)$ (Lemme 10.3), le problème

$$\langle u,h\rangle_{H^1(\Omega)} \;=\; \left(\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0;\check{\sigma})-\pi\right)\ \langle\nabla\check{\Pi},h\rangle_{L_2(\Omega)}\ , \qquad h\in H^1(\Omega) \qquad (10.3)$$

admet lui-même une unique solution $u\in H^1(\Omega)$ (Riesz), qui, d'après (10.1) n'est autre que $\nabla J^\lambda-\lambda(\check{\sigma}-\sigma_0)$. Or, (Bensoussan-J.L. Lions [24, Théorème 5.10, Chapitre 2 et note de bas de page 96]) cette solution appartient en fait à $H^2(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule de Green généralisée à l'identité (10.3) (sur bande Ω, Théorème F.1.d). Soit,

$$\int_\Omega \left(-\Delta u \;+\; u-(\check{\Pi}_{T,k}(t_0,y_0)-\pi)\nabla\check{\Pi}\right)\ h \;=\; \int_{\partial\Omega} -(\gamma_1 u)(\gamma_0 h)\ , \qquad h\in H^1(\Omega)\ .$$

On conclut alors classiquement, voir par exemple Larrouturou-P.L. Lions [102, p. 150, Étape 6, Interprétation de la formulation variationnelle], en utilisant la densité de l'ensemble $\gamma_0(H^1(\Omega))$ (des traces γ_0 sur $\partial\Omega$ des fonctions de $H^1(\Omega)$) dans $L_2(\partial\Omega)$ (Théorème F.1.d).

b. Car ∇J^λ est nul, en un minimum de J^λ intérieur à $\mathcal{K}$.

$\square$

Remarque 10.5 Par symétrie (Remarque 3.4) et linéarité, le Théorème 10.4 se généralise immédiatement à la calibration sur un système arbitraire de *call*, $\{\Pi^+_{T,K}(t_0,S_0;\mathrm{obs})|(T,K)\in\mathcal{F}^+\}$, et *put*, $\{\Pi^-_{T,K}(t_0,S_0;\mathrm{obs})|(T,K)\in\mathcal{F}^-\}$ ($\mathcal{F}^{+/-}\subset[t_0,\overline{T}]\times\mathbb{R}^*_+\subset\Omega_+$). On n'a qu'à remplacer le second membre dans (10.2) par

$$\sum_{(T,k)\in\mathcal{F}^+}\left(\check\Pi^+_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma)-\check\Pi^+_{T,k}(t_0,y_0;\mathrm{obs})\right)\nabla\check\Pi^+(t_0,y_0,T,k;\check\sigma)$$
$$+\sum_{(T,k)\in\mathcal{F}^-}\left(\check\Pi^-_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma)-\check\Pi^-_{T,k}(t_0,y_0;\mathrm{obs})\right)\nabla\check\Pi^-(t_0,y_0,T,k;\check\sigma)\ ,$$

$$\nabla\check\Pi^{+/-}(t_0,y_0,T,k;\check\sigma)(t,y)\ \equiv\ \mathbf{1}_{\{t_0<t<T\}}e^{-y}(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check\Pi^{+/-}_{t,y}(t_0,y_0;\check\sigma)\check\sigma(t,y)(\partial^2_{y^2}-\partial_y)\check\Pi^{+/-}_{T,k}(t,y;\check\sigma)\ .$$

10.2 La méthode de Lagnado et Osher

Venons-en à la procédure de calibration lissée proposée par Lagnado et Osher [99]. Celle-ci (dans le cas d'un seul *call* T,k) revient à introduire un temps artificiel τ, qui paramètre une famille de nappes de volatilité sur Ω, $\check\sigma_\tau(t,y)_{\tau\geq0}$, puis à résoudre numériquement, par un schéma explicite, l'*edp* suivante, localisée à un domaine $\Omega\cap\{|y|\leq\overline{y}\}$:

$$\partial_\tau\check\sigma\ =\ \lambda\Delta\check\sigma_\tau\ -\ (\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma_\tau)-\pi)\ \nabla\check\Pi(t_0,y_0,T,k;\check\sigma_\tau)\ ,\qquad\tau>0\ ;\tag{10.4}$$

$$\check\sigma|_{\tau=0}\ \equiv\ \sigma_0\ ,\qquad\partial_t\check\sigma|_{\partial\Omega}\ \equiv\ 0\ ,\qquad\check\sigma|_{|y|\equiv\overline{y}}\ \equiv\ \sigma_0\ .\tag{10.5}$$

Formellement, le régime stationnaire $\check\sigma\equiv\check\sigma_\infty(t,y)$ éventuellement atteint vérifie alors, en posant $u=-\lambda(\check\sigma-\sigma_0)$:

$$\left\{\begin{array}{rcl}-\Delta u&=&(\check\Pi_{T,k}(t_0,y_0;\check\sigma)-\pi)\nabla\check\Pi(t_0,y_0,T,k;\check\sigma)\\ \partial_t u|_{\partial\Omega}&\equiv&0\\ u|_{|y|\equiv\overline{y}}&\equiv&0\ .\end{array}\right.$$

On reconnaît la condition (10.2) de minimum de J^λ intérieur à $\mathcal{K}$ (Théorème 10.4.b) — localisée à $\Omega\cap\{|y|\leq\overline{y}\}$, moyennant l'introduction d'une condition de Dirichlet homogène au bord en espace ainsi créée et en "oubliant" le terme d'ordre 0 dans (10.2). En effet, sur domaine localisé avec condition aux bords mixtes Neumann/Dirichlet, ce terme ne joue plus de rôle, par inégalité de Poincaré.

La procédure (10.4)–(10.5) de calibration lissée de Lagnado et Osher [99], peut donc être vue comme une méthode de calcul (par descente de gradient) d'une solution de l'équation (10.2), condition nécessaire de minimum de J^λ intérieur à $\mathcal{K}$.

Remarque 10.6 Cette procédure se généralise immédiatement à un système arbitraire de *call* et *put*, voir Remarque 10.5.

Remarque 10.7 Sur la base de cet algorithme, on pourrait imaginer divers raffinements — par exemple, ordonner les données par paquets de confiance, pour calculer une première nappe $\check\sigma_1$ avec les *call* et *put* à la monnaie, puis, à partir de $\check\sigma_1$, une deuxième nappe $\check\sigma_2$ à l'aide des produits restants, avec une pénalisation pour $\check\sigma_2$ à s'écarter de $\check\sigma_1$.

10.3 Multiplicateurs de Lagrange

Jusqu'ici, on a traité le problème d'optimisation (9.1). Exploitant la structure particulière de problème de contrôle optimal (problème inverse, §5.3.1), on peut réécrire l'équation d'Euler de notre problème, dans une approche du type *principe du maximum* de Pontriaguine (voir J.-L. Lions [105]). Cette approche est potentiellement constructive, et susceptible de déboucher sur des algorithmes numériques de recherche de point-selle (algorithmes de type Uzawa). On ne développera pas cette approche dans le présent travail, se bornant à écrire (formellement) une formulation de l'équation d'Euler de notre problème intégrant les contraintes. Cette équation peut en effet s'écrire avec les notations du Chapitre précédent,

$$\langle \nabla J^\lambda(\breve{\sigma}), \breve{\nu} - \breve{\sigma} \rangle_{H^1(\Omega)} \;\geq\; 0 \;, \qquad \breve{\nu} \in \mathcal{K} \tag{10.6}$$

caractéristique (du moins pour λ assez grand, voir Théorème 9.11) du minimum $\breve{\sigma} \in \mathcal{K}$ de la fonctionnelle fortement convexe J^λ, sur le convexe fermé $\ni \sigma_0$

$$\mathcal{K} \;=\; \left\{ \breve{\sigma} \in \sigma_0 + \overline{B}_1 \mid \partial_t \breve{\sigma} \leq 0, \underline{\sigma} \;\leq\; \breve{\sigma} \;\leq\; \overline{\sigma} \right\}$$

($\underline{\sigma}/\overline{\sigma} \equiv \sigma_0 - / + \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 \equiv \varepsilon_0(\underline{t},\overline{T},R,\sigma_0)$ du Théorème 3.10, ou plus généralement $0 < \underline{\sigma} \leq \breve{\sigma} \leq \overline{\sigma} < +\infty$ par application du Théorème 3.11, voir Remarque 10.2).

La théorie des multiplicateurs de Lagrange (en dimension infinie, voir par exemple J.L. Lions [105, Théorème 13.1, Chapitre 3]) suggère alors l'écriture suivante alternative à (10.6), caractéristique (au moins pour λ assez grand) du minimum de J^λ sur $\mathcal{K}$, ou, (Théorème 9.11) ce qui revient au même, de la solution $\breve{\sigma}$ du problème d'optimisation (9.1):

$$\begin{gathered} \nabla J^\lambda(\breve{\sigma}) + \alpha(\breve{\sigma} - \sigma_0) \;=\; \rho - \mu - \partial_t^* \nu \;, \qquad (10.7) \\ \alpha(\| \breve{\sigma} - \sigma_0 \|^2_{H^1(\Omega)} - 1) \;=\; 0 \;, \\ \int_\Omega \rho(\breve{\sigma} - \underline{\sigma}) \;=\; 0, \quad \int_\Omega \mu(\overline{\sigma} - \breve{\sigma}) \;=\; 0, \quad \int_\Omega \nu \partial_t \breve{\sigma} \;=\; 0 \;, \end{gathered}$$

$\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\breve{\sigma} \in \sigma_0 + H^1(\Omega)$, $(+ \equiv \geq 0,\Omega\text{-p.p.})$ $\rho,\mu \in H^1_+(\Omega)/\nu \in L_2^+(\Omega)$.

Dans (10.7), $L_2(\Omega) \overset{\partial_t^*}{\mapsto} H^1(\Omega)$ adjoint la dérivation temporelle $H^1(\Omega) \overset{\partial_t}{\mapsto} L_2(\Omega)$, i.e. $\partial_t^* \nu$ ($\nu \in L_2(\Omega)$), la solution (par dualité) dans $H^1(\Omega)$, du problème variationnel suivant:

$$\langle \partial_t h,\nu \rangle_{L_2(\Omega)} \;=\; \langle h,\partial_t^* \nu \rangle_{H^1(\Omega)} \;, \quad h \in H^1(\Omega) \;.$$

Chapitre 11

Expériences numériques

On présente maintenant des expériences numériques mettant en œuvre cette méthode de calibration et de lissage de Lagnado et Osher (10.4)–(10.5) sur un ensemble fini de prix (de *call*), d'abord sur données synthétiques, puis sur données de marché.

Pour la descente de gradients, nous avons utilisé la procédure e04dgf de la bibliothèque fortran Nag (gradient conjugué préconditionné). Cette procédure utilise une taille en mémoire de l'ordre du nombre de points de discrétisation seulement, ce qui la rend spécialement appropriée pour nos problèmes. Le détail de la mise en œuvre de la résolution numérique des *edp* d'évaluation des *call* (localisées via l'introduction de conditions aux bords appropriées) est reporté en Annexe H. Disons seulement à ce stade qu'on procède par différences finies à l'aide d'un θ-schéma de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$), sur un maillage comportant 20 pas de temps fois 100 pas d'espace. Cela est suffisant compte tenu du schéma numérique utilisé et de la précision requise quant au résultat, eu égard à celle disponible sur les données (voir §11.2.1).

Pour le calcul de la fonction de Green apparaissant dans l'expression des gradients, Lagnado et Osher [99] suggèrent d'utiliser l'équation *backward* qu'elle vérifie, soit, après discrétisation, une équation (avec condition terminale en masse de Dirac) par nœud de maillage. En fait, l'équation de Dupire permet de calculer les valeurs utiles de cette fonction (celles correspondant à la phase courante (t_0,y_0)) moyennant une seule équation *forward* (de Dupire, puis double dérivation numérique en espace; voir Théorème 3.8). C'est l'approche qu'on a retenu pour nos expériences numériques.

On adoptera dans ce chapitre les notations suivantes (voir §10.2) :
— σ_0, nappe de volatilité constante servant à initialiser la descente de gradients ;
— σ^λ ou $\sigma^\lambda(t,S)$, nappe de volatilité $\sigma_\infty(t,S) = \check{\sigma}_\infty(t,y)$ obtenue à l'issue de la procédure de calibration et de lissage, pour la valeur λ du paramètre dans (10.4) — $\lambda = 0$ pour la calibration pure ;
— $E(\sigma)$, l'erreur relative en moyenne quadratique entre les prix de *call* utilisés pour calibrer et les prix de *call* calculés avec la nappe σ calibrée.

11.1 Expériences sur données synthétiques

11.1.1 Présentation du modèle et génération des données

Pour tester la méthode de calibration, nous nous sommes d'abord placés dans des conditions expérimentales sur données synthétiques analogues à celles décrites par Lagnado et Osher [99]. Nous avons ainsi pu disposer de points de comparaison. Cependant, nous avons utilisé plus de données et approfondi les expériences par rapport à [99]. Nous considérons donc comme dans [99] le modèle de diffusion lognormale (2.1), avec :

$$q = 0, \quad r = 10\%, \quad \sigma(t,S) = 15/S =: \sigma^*(t,S) \ . \tag{11.1}$$

On calcule alors numériquement les prix $\Pi_{T,K}(t_0,S_0;\sigma^*)$ tels que $(T,K) \in \mathcal{F}$, où :

$$\mathcal{F} = \{\frac{1}{2},1\} \times \{80, 85, 90, 91, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 110, 112, 115\} =: \mathcal{T} \times \mathcal{S} \ .$$

On obtient ainsi une famille de prix :

$$\pi \equiv (\Pi^{obs}_{T,K}(T,K))_{(T,K)\in\mathcal{F}} := (\Pi_{T,K}(t_0,S_0;\sigma^*))_{(T,K)\in\mathcal{F}} \ .$$

11.1.2 Initialisation par une nappe de volatilité constante

On détermine ensuite, numériquement par dichotomie, la solution σ_0 du problème de minimisation (9.1), dans laquelle on se contraint à minimiser parmi les constantes, sans lissage, $\lambda = 0$. Avec les données précédentes, on obtient ainsi une volatilité constante optimale σ_0, qui reproduit les prix synthétiques avec une erreur relative $E(\sigma_0)$ d'environ un pourcent.

11.1.3 Expériences de calibration pure

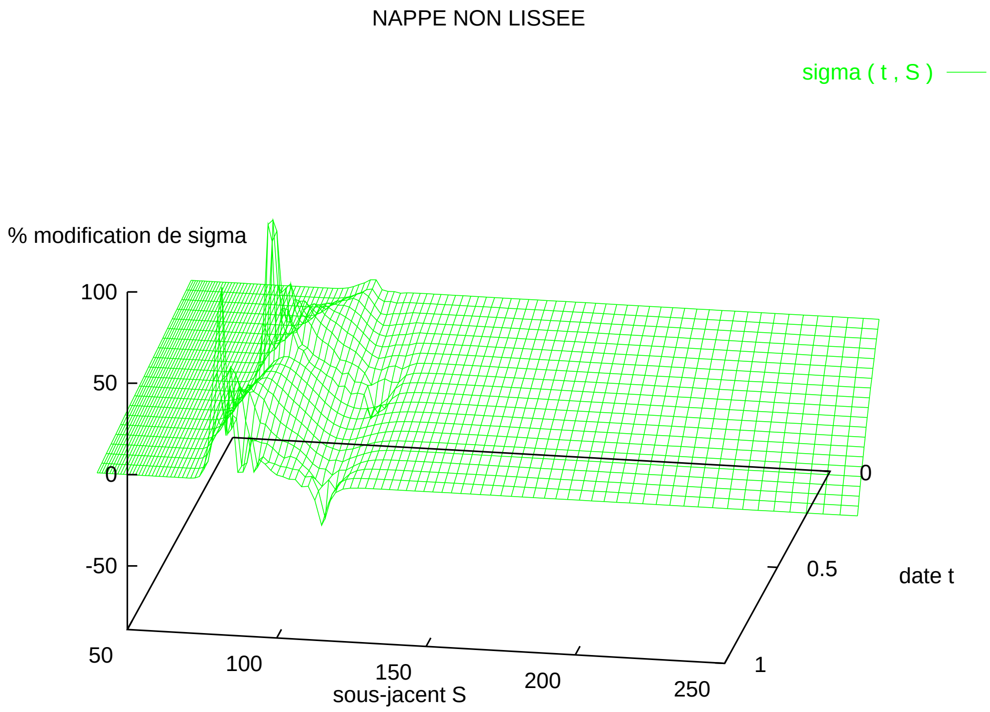


FIG. 11.1 – Nappe σ^0 obtenue par calibration pure sur données synthétiques — en % de différence relative par rapport à σ_0

La méthode de calibration pure porte cette erreur au cent-millième, $E(\sigma^0) = 10^{-3}\%$, après cent itérations de gradient conjugué, au départ de $\sigma_0(t,S) \equiv \sigma_0$. Cependant, la nappe de volatilité $\sigma^0(t,S)$ obtenue est très irrégulière, présentant notamment des explosions aux voisinages des maturités des *call* utilisés pour calibrer. Cette nappe est représentée Figure 11.1, en pourcentage de modification par rapport à σ_0. Elle ne semble pas acceptable en pratique.

Remarque 11.1 Il s'agit de la nappe de volatilité locale et non de celle des volatilités implicites correspondantes. Cette dernière est représentée Figure 11.2, où on a également porté les volatilités implicites correspondant à la famille de prix π utilisée pour calibrer. On observe que la nappe de volatilité implicite ainsi reconstruite est bien plus régulière que σ^0, — sauf peut-être dans les très courtes maturités On rappelle que la nappe des prix de *call* est convexe et régulière, quelle que soit la nappe de volatilité locale (Théorème 3.8.b). Ces bonnes propriétés rejaillissent sur la nappe des volatilités implicites, comme on l'observe Figure 11.2.

Remarque 11.2 Comme évoqué ci-dessus, les résultats numériques obtenus se dégradent dans le domaine des courtes maturités. A contrario, il faut mentionner à ce sujet une approche intéressante de Berestycki-Busca-Florent [26]. Celle-ci consiste à dériver directement l'équation de diffusion (non linéaire) de la volatilité implicite (au lieu des prix) en fonction de la volatilité locale, et débouche sur une relation de type moyenne harmonique quand la maturité tend vers 0, laissant augurer des procédures de calibration plus efficaces dans le domaine des courtes maturités.

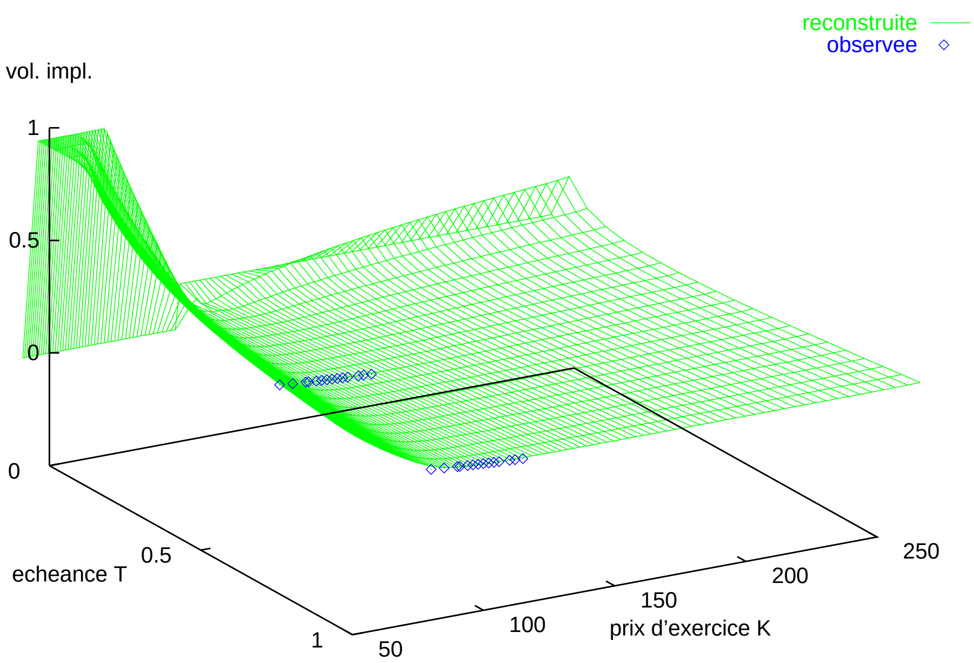


FIG. 11.2 – Nappe de volatilité implicite correspondant à σ^0

Commentaire 11.3 *La nappe σ^0 ainsi obtenue à partir de la constante σ_0 est peu différente de cette dernière en dehors d'un domaine correspondant grossièrement à $co((t_0,S_0)\cup\mathcal{F})$*[1] *Intuitivement, ceci correspond au fait que le prix d'un* call, *$\Pi_{T,K}(t_0,S_0;\sigma)$, est peu*

1. L'enveloppe convexe de $(t_0,S_0)\cup\mathcal{F}$.

sensible aux valeurs de σ en des phases (t,S) trop éloignées de (t_0,S_0) ou (T,K), cf. la représentation (8.2), Corollaire 8.3.c; réciproquement, la famille de prix π apporte peu d'information sur $\sigma(t,S)$ loin de $(t_0,S_0) \cup \mathcal{F}$, où la procédure de calibration pure contribue donc peu à modifier σ_0.

11.1.4 Expériences de calibration lissée

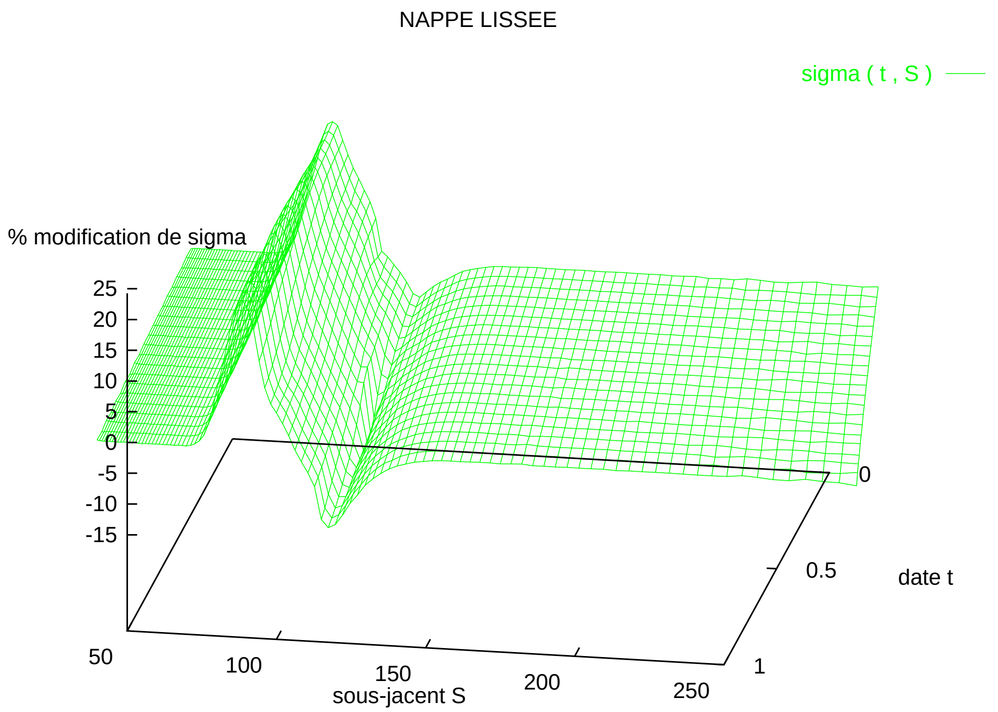


FIG. 11.3 – Nappe $\sigma^{0.02}$ calculée par calibration lissée sur données synthétiques — en pourcentage de différence relative par rapport à σ_0

Pour la calibration lissée, on choisit λ le plus grand possible, compatible avec une descente en un nombre d'itérations de gradient donné, au-dessous d'un niveau d'erreur relative préalablement fixé.

Ainsi, génériquement, un calibrage correspond pour nous à la résolution d'environ un millier d'*edp* paraboliques à une dimension d'espace : $|\mathcal{F}|$ (de l'ordre de 10) équations de Black-Scholes *backward*, plus une équation de Dupire *forward*, par itération de gradient conjugué (une centaine). Le temps de calcul sur station de travail est de l'ordre de quelques secondes. On dispose alors d'une nappe de volatilité locale calibrée et lissée, que l'on peut utiliser pour évaluer et couvrir d'autres produits.

Par exemple, pour atteindre $E(\sigma^\lambda) \leq 10^{-2}E(\sigma_0)$, au bout de cent itérations de gradient conjugué, au départ de la constante σ_0, il faut prendre $\lambda \leq 0.02$. Pour $\lambda = 0.02$, on obtient $E(\sigma^{0.02}) = 10^{-2}\%$ (Figure 11.3). Augmenter λ améliore le lissage de σ^λ et accroît l'erreur relative $E(\sigma^\lambda)$, tandis que diminuer λ a des effets opposés. Ces effets s'avèrent sensibles par rapport aux variations de λ. Ainsi, pour $\lambda \geq 0.1$, la descente est excessivement lente en vue d'un utilisation réaliste en salle des marchés, où l'on veut pouvoir calibrer rapidement plusieurs fois par jour.

Commentaire 11.4 *La nappe $\sigma^{0.02}$ obtenue est cette fois très régulière, comme on peut le voir Figure 11.3. En outre, cette nappe ne présente que de très faibles variations en temps (voir Commentaire 9.4). Le terme de lissage permet donc d'atténuer considérablement les violentes oscillations en temps qui apparaissent lors de la calibration pure, ainsi que les explosions au voisinage des échéances en lesquelles on injecte des prix de* call*. On observe en revanche une oscillation en espace, due vraisemblablement à une différence d'échelle entre les dérivées en espace et en temps. Enfin, on a toujours σ^λ peu éloigné de σ_0, en dehors d'un domaine correspondant grossièrement à $co((t_0,S_0) \cup \mathcal{F})$.*

La Figure 11.4 représente la nappe des volatilités implicites correspondant à $\sigma^{0.02}$.

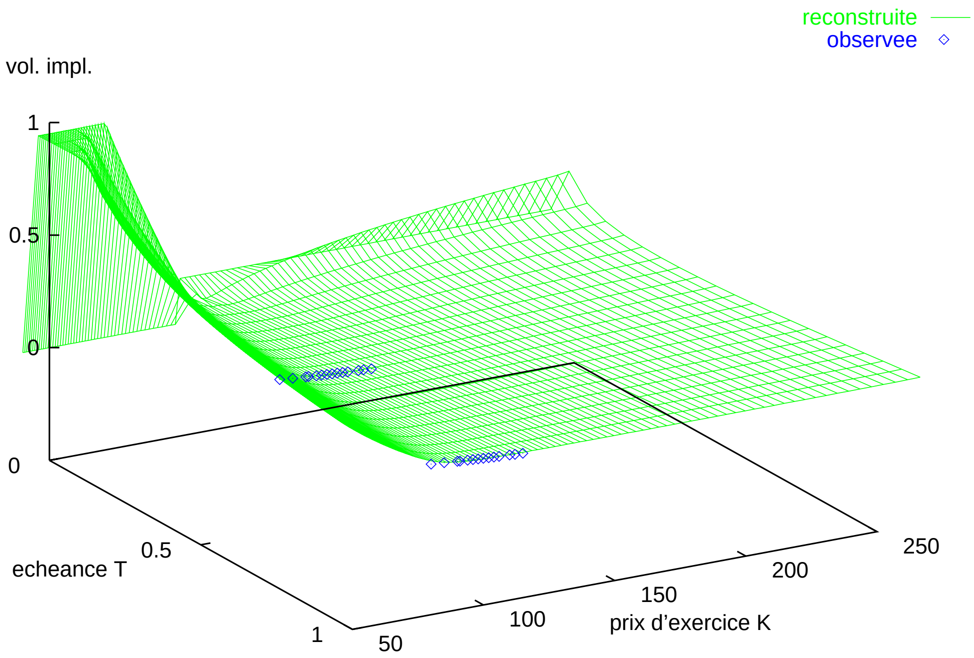


FIG. 11.4 – Nappe des volatilités implicites correspondant à $\sigma^{0.02}$

Enfin, le calibrage et le lissage permettent d'améliorer la robustesse numérique de la nappe de volatilité locale obtenue. Voyons ceci en termes de validation sur le calcul de nouveaux prix de *call*, puis sur le calcul du prix d'une option à barrière.

Commentaire 11.5 (Calcul de nouveaux prix de *call*) *Le Tableau 11.1 recense les pourcentages d'erreur relative en moyenne quadratique $100E(\sigma)$ (arrondis au premier chiffre significatif), obtenus pour divers σ et $\mathcal{F}$ — dont pour mémoire $\mathcal{F} = \mathcal{T} \times \mathcal{S}$ ayant servi à générer les données. On observe que les nouveaux prix calculés avec $\sigma^{0.02}$ sont meilleurs que ceux calculés avec σ^0, eux-mêmes meilleurs que ceux calculés avec σ_0.*

Commentaire 11.6 (Calcul du prix d'une option à barrière) *Un autre résultat intéressant concerne l'évaluation d'une option à barrière. La Figure 11.5 représente le pourcentage d'erreur relative :*

$$\frac{100(\Pi_{T,K,H}(t,S;\sigma) - \Pi_{T,K,H}(t,S;\sigma^\star))}{\Pi_{T,K,H}(t,S;\sigma^\star)}\ ,$$

	σ_0	σ^0	$\sigma^{0.02}$
$\mathcal{T} \times \mathcal{S}$	1	10^{-3}	10^{-2}
$\mathcal{T}' \times \mathcal{S}$	2	0.6	0.5
$\mathcal{T} \times \mathcal{S}'$	2	$7\ 10^{-2}$	$5\ 10^{-2}$

TAB. 11.1 – $\mathcal{T}' = \frac{2}{3}$, $\mathcal{S}' = \{83{,}93{,}97{,}101{,}105{,}108{,}113\}$

obtenu numériquement pour divers σ, où $\Pi_{T,K,H}(t,S;\sigma)$ désigne le prix du call *européen à barrière* up out *au niveau $H \equiv 120$*[2]*. La méthode par différences finies employée pour évaluer $\Pi_{T,K,H}(t,S;\sigma)$ s'inspire de l'usage en vigueur sur les arbres, consistant à appliquer une condition de Dirichlet homogène au bord supérieur $\overline{S} \equiv H$ du domaine*[2]*. On observe notamment que les ordres de grandeur des erreurs relatives à la monnaie obtenues à l'aide de σ_0, σ^0 et $\sigma^{0.02}$ sont de 20%, 10% et 5%, respectivement.*

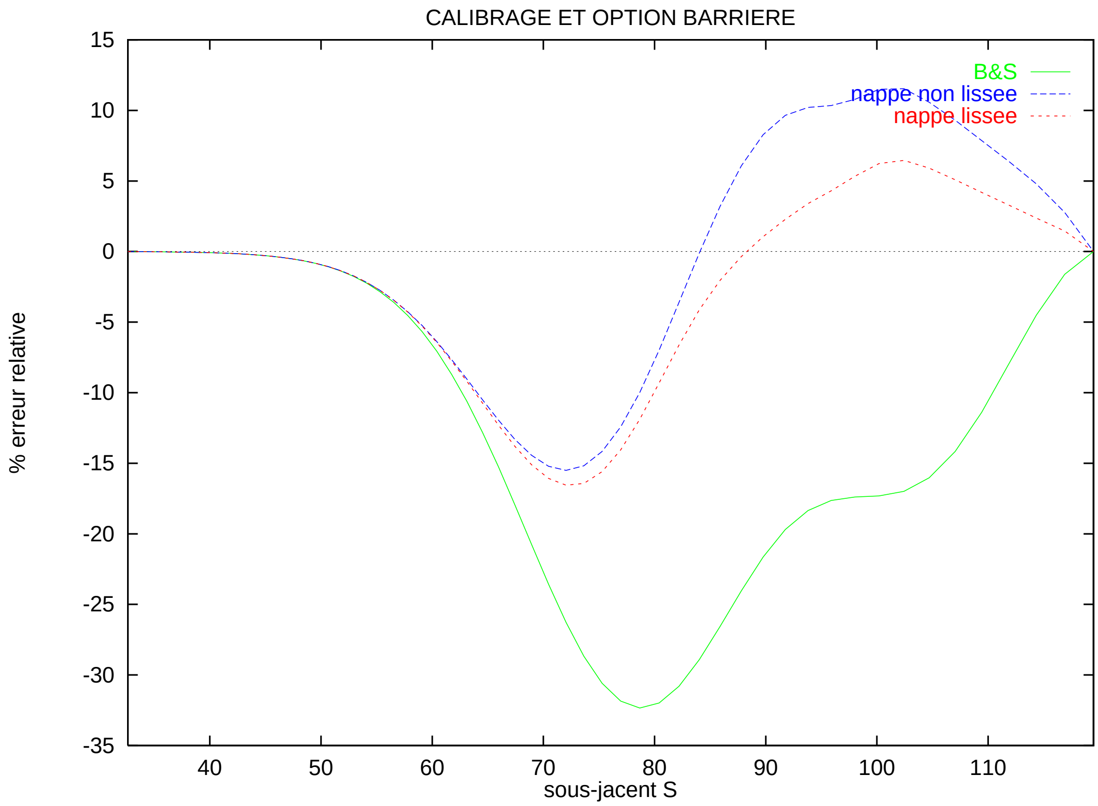


FIG. 11.5 – Evaluation d'un *call* européen à barrière *up out* $H \equiv 120$

Remarque 11.7 $\sigma^{0.02}$ donne donc de meilleurs résultats que σ^0 lorsqu'il s'agit de calculer de nouveaux prix. Ces constatations expérimentales encouragent à utiliser cette méthode de calibration lissée de Lagnado et Osher [99], plutôt que des méthodes de calibration par arbres qui ne permettent pas de lisser la nappe de volatilité locale obtenue (§5.1).

Des expériences complémentaires pourraient consister à étudier σ^λ en fonction de la phase courante (t_0,S_0) d'une part, et, d'autre part, en fonction de diverses conditions initiales, constantes (comme σ_0) ou non.

2. Voir Partie III, §4.2

prix d'exercice	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98
prix du call	10,02	9,02	8,02	7,02	6,02	5,03	4,13	3,28	2,52	1,86

TAB. 11.2 – *Prix de* call *observés pour divers prix d'exercice*

11.2 Expériences sur données de marché

On présente maintenant quelques expériences sur données réelles. Il s'agit alors que les prix calculés avec le modèle calibré tombent dans la fourchette de l'offre et de la demande du marché (*bid ask spread*), ou d'un courtier s'il s'agit d'un produit de gré à gré.

11.2.1 Discussion concernant les données

Dans les données en temps réel ou leurs compilations historiques, seules font réellement l'objet de transactions et peuvent être tenues pour significatives les cotes situées au voisinage de la monnaie. Or celles-ci ne font pas de *smile* (voir §2.2). Parfois les options en dehors de la monnaie ne sont même pas cotées. C'est par exemple le cas des options sur taux de change.

Les options ONN (sur notionnel) du MATIF sont cotées sur une bande plus large de prix d'exercice. Mais un *call* sur notionnel a pour sous-jacent le contrat *forward* de même échéance que lui-même. Le sous-jacent change donc avec la date d'échéance, et on a des prix de *call* à raison d'une échéance par sous-jacent. Or, il faut recourir à des données relatives à plusieurs échéances, si on veut reconstruire une bonne nappe de volatilité. Par ailleurs, l'examen du Tableau 11.2, qui reproduit des prix d'options ONN diffusés sur le site *web* du MATIF, montre que les prix au 23 Septembre 1997 des *call* (européens) à échéance fixée fin Mars 1998, la monnaie étant de l'ordre de 100, ne sont pas cohérents avec des prix de *call* européens dans un modèle d'arbitrage, sur un sous-jacent (2.1). En effet, dans un tel modèle, les *delta* ($\equiv \partial_S \Pi$) s'interprètent comme des probabilités continûment actualisées aux taux r; ils sont donc inférieurs à un. Or, les *delta* calculés approximativement par différences centrées sur intervalles doubles à partir des données de ce Tableau, sont égaux à un (le prix d'exercice et le prix de l'option associée varient ensemble de un en un).

Enfin, les fourchettes de cotations observées sur les marchés d'options sont souvent très importantes. Reprenons par exemple les prix du Tableau 2.1, c'est-à-dire les milieux des fourchettes de cotations de *call* européens du MONEP sur CAC40 ($q = 0$), obtenues sur Reuters. Ainsi, le premier prix du Tableau, 236.1, a été obtenu comme moyenne de l'offre, 200, et de la demande, 272.2. L'amplitude de la fourchette est donc de l'ordre du tiers de cette moyenne. L'examen des autres prix aboutit à des conclusions analogues.

En pratique, on peut envisager deux approches possibles suivant l'usage destiné à la nappe de volatilité locale calibrée. La première consiste à soumettre les données à un traitement préalable (*preprocessing*), qui exclue notamment les opportunités d'arbitrage, en vue d'aboutir à une nappe de volatilité locale réaliste utilisable à des fins de couverture ou d'évaluation d'exotiques. La deuxième utilise au contraire la nappe de volatilité locale calibrée sur l'ensemble des données, afin de mettre en évidence des opportunités d'arbitrage.

On a utilisé les prix du Tableau 2.1 pour tester la méthode de calibration et lissage

$K \times T$	mars 98	sept. 98	mars 99
2950	-0.47	-0.45	-0.47
3100	-0.35	-0.37	-0.40
3250	-0.23	-0.29	-0.35

TAB. 11.3 – *Convexité discrète des prix de marché*

sur données réelles. Dans la suite, $\mathcal{F}$ désigne la famille des paires (T,K) correspondant à ces données.

Remarquons d'abord que ces prix vérifient bien l'hypothèse de convexité discrète des données (Remarque 5.1). Comme le montre en effet le Tableau 11.3, les *delta* (approchés par différences centrées sur intervalles doubles) augmentent avec le prix d'exercice, à échéance fixée.

Commentons maintenant les expériences réalisées sur ces données. Pour ces expériences, on a choisi un taux court constant $r = 5\%$, comme on l'avait fait lors de la détermination des volatilités implicites à partir des prix (voir Tableau 2.1). On renvoie à la discussion tenue au §2.2 concernant l'arbitraire de ce choix.

11.2.2 Initialisation par une nappe de volatilité constante

On calcule numériquement par dichotomie la constante qui minimise l'erreur relative $E(\sigma)$. On otient $\sigma_0 = 0.247820$, $E(\sigma_0) = 14$ %. La nappe de volatilité constante au niveau σ_0 est choisie comme point de départ des algorithmes de calibration et lissage.

11.2.3 Expériences de calibration pure

Au bout de 100 itérations de gradient conjugué, la nappe σ^0 obtenue par calibration pure au départ de σ_0 réalise $E(\sigma^0) = 4.4\ 10^{-5}$ %; une telle précision n'a d'ailleurs pas vraiment de sens eu égard à la précision sur les données, voir §11.2.1. La nappe σ^0 obtenue est très irrégulière (Figure 11.6).

11.2.4 Expériences de calibration lissée

Sur données réelles, l'apport du lissage est moins clair qu'il ne l'était sur données de modèle. Ainsi, pour $\lambda = 2\ 10^{-4}$, l'algorithme s'arrête au bout de 61 itérations de gradient conjugué, ayant atteint un critère de convergence. Or, d'une part, l'erreur correspondante est de $E(\sigma) = 0.12\%$; une telle erreur obtenue à l'aide d'une nappe de volatilité variable est excessive en pratique, même en tenant compte de l'imprécision sur les données. D'autre part, la nappe σ^λ obtenue demeure trop irrégulière (Figure 11.7). En particulier, elle oscille en temps. Ceci rappelle les difficultés numériques rencontrées par Avellaneda *et. al.* [3] (lissage entropique impuissant à venir à bout de l'aspiration créée localement par les contraintes).

Remarque 11.8 L'irrégularité de la nappe de volatilité locale $\sigma(t,S)$ issue de la calibration pure provient notamment du fait que σ peut prendre localement des valeurs très grandes. On peut interpréter cela très simplement, en reliant la convexité discrète des prix de *call* et la probabilité de présence du processus de prix S_t du sous-jacent. Une convexité

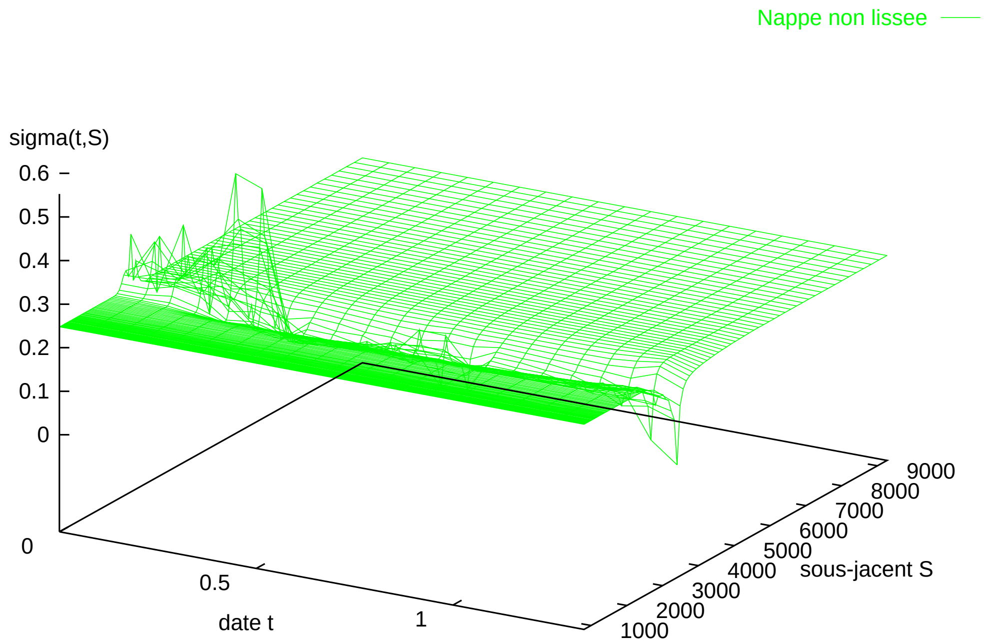


FIG. 11.6 – Nappe σ^0 calibrée sur données réelles

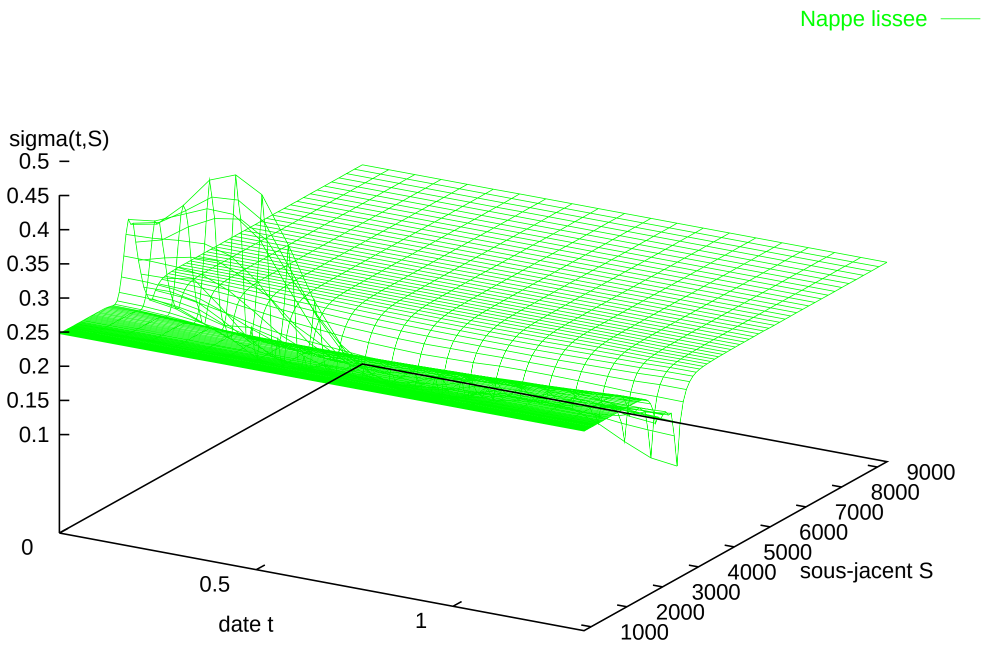


FIG. 11.7 – Nappe σ^λ calibrée et lissée sur données réelles ($\lambda = 2.10^{-4}$)

discréte nulle sur un certain intervalle implique que la densité de probabilité de présence du sous-jacent est nulle dans cet intervalle, et donc la volatilité locale est infinie. Une convexité discrète négative, incompatible avec l'absence d'opportunité d'arbitrage, correspond numériquement également à une explosion de σ. On peut également comprendre ce phénomène à l'aide de l'équation de Dupire (3.5) et l'expression pour σ qui en résulte (5.2).

Chapitre 12

Conclusion

Nous avons étudié dans cette partie une méthode de calibration de la volatilité locale, utilisant une technique numérique de problème inverse d'équations aux dérivées partielles. Nous nous sommes placés dans le cadre du modèle de Black-Scholes unidimensionnel à volatilité variable. Après avoir rappelé en les précisant les résultats de Dupire et El Karoui (Théorème 3.8), nous avons montré les résultats suivants :
— étant donné un système de prix de *call* européens $(\Pi_{T,K}(t_0,S_0))_{(T,K)\in\mathcal{F}}$, l'ensemble des nappes de volatilité locale $\sigma(t,S)$ compatibles avec ces prix en (t_0,S_0) est en bijection avec une sous-variété régulière, de codimension égale au nombre de *call* utilisés pour calibrer, dans la variété des nappes de prix de *call* $(\Pi_{T,K}(t_0,S_0))_{T\in[t_0,\overline{T}],K>0}$ (paramètre $\overline{T}$, $\mathcal{F}\subset[t_0,\overline{T}]\times\mathbb{R}$) vérifiant les conditions nécessaires de monotonie et convexité (Théorème 5.2);
— de plus, si on impose une condition de régularité supplémentaire assez forte sur la volatilité, en relaxant la contrainte de compatibilité sur les prix (approche de Lagnado et Osher [99]), alors la solution lissée devient unique et dépend continûment des données (Théorème 9.11). Ce dernier résultat découle de bornes sur les sensibilités des prix de *call* dans un modèle de Black-Scholes à volatilité variable (Théorèmes 3.10 et 3.11).

Les expériences numériques effectuées sur données synthétiques et sur données de marché pour reconstruire une telle nappe lissée, montrent qu'on peut en effet reconstruire les prix. Cependant, sur données réelles, la régularité de la nappe obtenue laisse à désirer.

Il semble intéressant de prolonger ce travail dans plusieurs directions.

Il serait tout d'abord instructif de tester la stratégie de couverture correspondant à cette méthode de calibration et lissage, et de la comparer aux stratégies obtenues par d'autres approches communément utilisées (approches paramétriques en particulier).

Ensuite, la question est ouverte de savoir si notre Théorème 9.11 (problème bien posé parmi les nappes σ monotones en temps, pour λ suffisamment grand) se généralise à des nappes σ non nécessairement monotones en temps, ou à λ arbitrairement petit positif, débouchant le cas échéant quand $\lambda\to 0^+$ sur une procédure de sélection de type solutions de viscosité d'une "bonne" solution du problème de calibration pure sous-déterminé, comme par exemple dans Berestycki-Busca-Florent [26] (voir Remarque 11.2).

Il pourrait également être intéressant de définir un cadre abstrait général de calibration avec lissage suffisamment régulier, comme esquissé dans Bodurtha-Jermakyan [37]. Ainsi peut-on constater sur notre problème que les difficultés mathématiques soulevées par la régularisation en $\int_\Omega \parallel D\sigma \parallel^2$, — nécessité de se limiter à des nappes de volatilité monotones, — s'estompent largement, — le calcul numérique devenant en contrepartie plus lourd, — si l'on utilise une régularisation d'ordre supérieur $\int_\Omega \parallel D^\alpha\sigma \parallel^2$ $(\alpha\geq 2)$.

Enfin, un enjeu important en pratique est bien sûr la calibration de modèles (de taux notamment) à plusieurs dimensions d'espace. L'extension à plusieurs dimensions des techniques exposées dans ce travail soulèverait des difficultés importantes, aussi bien théoriques que pratiques. En effet, il est bien connu que les problèmes inverses deviennent beaucoup plus difficiles en dimension d'espace supérieure à un. De fait, concernant notre problème inverse de calibration, on perd bien des propriétés si on veut passer en dimension deux ou plus : il n'existe plus a priori d'équation de Dupire *forward* (3.5) du prix des options de toutes échéances et maturités. On en perd donc toutes les conséquences : existence et unicité de σ, propriétés qualitatives, calcul de la fonction de Green.

Cinquième partie

Annexes

Annexe A

Solutions de viscosité

La théorie des solutions de viscosité, élaborée au début des années quatre-vingt à partir des travaux de Crandall et Lions [62], fournit la notion de solution faible adéquate pour les équations elliptiques non linéaires, éventuellement dégénérées. Ces équations sont issues de la modélisation mathématique de problèmes concrets : contrôle optimal, jeux différentiels, finance. Le but du problème est alors la détermination de diverses quantités physiques, telles que : un temps de sortie minimal, la valeur de point-selle d'un temps de capture, l'évaluation ou la couverture d'un produit financier. Or ces solutions physiques satisfont rarement au sens classique les équations elliptiques de la modélisation mathématique pour ces problèmes. Il a donc fallu trouver un nouveau concept de solutions pour ces équations : les solutions de viscosité.

A.1 Exemple

Voici un exemple emprunté au livre de Guy Barles [14]. On considère le problème de contrôle optimal en temps minimal suivant :
— le domaine est l'intervalle

$$\Omega =]-1,1[\ ;$$

— la dynamique est le contrôle

$$f(x,u) = u \in [-1,1]\ ; \tag{A.1}$$

— le coût à minimiser au point $x \in \Omega$ est le temps d'atteinte τ^x du bord Γ de Ω, dans le flot contrôlé (A.1).

On note U la fonction valeur de ce problème de contrôle :

$$U(x) = \min_{u(\cdot)} \tau^x\ ,\ x \in \overline{\Omega}\ .$$

Intuitivement, le contrôle optimal dans ce problème est le *feedback*

$$u(x) = \operatorname{sgn}(x)\ ,$$

la fonction valeur valant :

$$U(x) = 1 - \mid x \mid . \tag{A.2}$$

Le principe mathématique de la programmation dynamique conduit quant à lui à l'équation formelle suivante pour U :

$$\begin{cases} \mid \nabla U(x) \mid -1 = 0 & , \quad x \in \Omega \\ U(x) = 0 & , \quad x \in \Gamma \equiv \partial\Omega\ . \end{cases} \tag{A.3}$$

Or la solution (A.2) du problème de contrôle n'est pas dérivable en 0. Elle ne saurait donc satisfaire (A.3) au sens classique. La notion de solution presque partout de (A.3) ne convient pas davantage, car il existe une infinité $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de solutions presque partout de (A.3), construites en alternant les pentes plus et moins un :

$$\begin{cases} \nabla U_n(x) = \pm 1 \text{ selon que } \mathrm{E}(nx) \text{ est pair ou impair} \\ U_n(-1) = U_n(1) = 0 \, . \end{cases}$$

Quant aux solutions au sens des distributions [124], elles sont plus appropriées pour les problèmes linéaires. Présentons maintenant le "bon" concept de solution de viscosité d'*edp*.

A.2 Problèmes paraboliques du second ordre

Définition A.1 *On appelle* enveloppe inférieure $\underline{V}$ *(respectivement* supérieure $\overline{V}$*) d'une fonction réelle étendue, V, définie sur une partie $\mathcal{R}$ d'un espace Euclidien, la plus grande fonction semi-continue inférieurement inférieure ou égale (respectivement la plus petite fonction semi-continue supérieurement supérieure ou égale) à V en tout point, lorsqu'une telle fonction existe.*

Proposition A.2 *Pour toute fonction réelle localement bornée, V, définie sur une partie $\mathcal{R}$ d'un espace Euclidien :*

a. son enveloppe inférieure, respectivement supérieure, existe, et vaut en $x \in \mathcal{R}$:

$$\underline{V}(x) = \liminf_{\mathcal{R}\ni y\to x} V(y) \ ,$$

respectivement

$$\overline{V}(x) = \limsup_{\mathcal{R}\ni y\to x} V(y) \ ;$$

b. $\underline{-V} = -\overline{V}$, $\overline{-V} = -\underline{V}$.

Preuve

a. Classique (rapporté par exemple dans Crandall-Ishii-Lions [59, §4]).

b. Pour $x \in \mathcal{R}$,

$$\liminf_{\mathcal{R}\ni y\to x} -V(y) \;=\; -\limsup_{\mathcal{R}\ni y\to x} V(y), \quad \limsup_{\mathcal{R}\ni y\to x} -V(y) \;=\; -\liminf_{\mathcal{R}\ni y\to x} V(y) \ .$$

□

Définition A.3 *On qualifie d'*elliptique *en dimension r ($r \in N^*$), tout opérateur localement borné*

$$\mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \times \mathcal{S}^r(\mathbb{R}) \;\ni\; (x,r,p,A) \xrightarrow{G} G(x,r,p,A) \in \mathbb{R} \ ,$$

tel que :

$$\begin{cases} G(x,s,p,A) & \leq & G(x,s',p,A) & si & s \leq s' \\ G(x,s,p,A) & \geq & G(x,s,p,A') & si & A \leq A' \ , \end{cases}$$

— où l'inégalité "$A \leq A'$" est à prendre au sens habituel de l'ordre entre matrices symétriques réelles de taille r.

Définition A.4 *Soient* $(G_t)_{t\in\mathbb{R}}$ *une famille indexée par le temps d'opérateurs elliptiques en dimension* r $(r \in \mathbb{N}^*)$, $\mathcal{R}$ *une partie de* $\mathbb{R}^{r+1}$. *On appelle* sous-solution, *respectivement* sur-solution *de viscosité, de l'équation parabolique*

$$\partial_t V(t,x) + G_t(x,V(t,x),\nabla V(t,x),\mathcal{H}V(t,x)) = 0 \ , \ (t,x) \in \mathcal{R} \ , \tag{A.4}$$

— ∇ *et* $\mathcal{H}$ *gradient spatial et matrice Hessienne en espace, respectivement,* — *toute fonction localement bornée semi-continue supérieurement, respectivement inférieurement*

$$\mathcal{R} \ni (t,x) \longrightarrow V(t,x) \in \mathbb{R},$$

telle que pour tout $(t,x) \in \mathcal{R}$ *et toute* $\varphi \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathcal{R})$, *vérifiant* $V(t,x) = \varphi(t,x)$, *et* $V < \varphi$ *(indifféremment,* $\leq$*) ailleurs sur* $\mathcal{R}$, *respectivement* $V > \varphi$ *(indifféremment* $\geq$*),*

$$\partial_t\varphi(t,x) + \underline{G}_t(x,V(t,x),\nabla\varphi(t,x),\mathcal{H}\varphi(t,x)) \leq 0 \ ,$$

respectivement

$$\partial_t\varphi(t,x) + \overline{G}_t(x,V(t,x),\nabla\varphi(t,x),\mathcal{H}\varphi(t,x)) \geq 0$$

— *où la* $\liminf \underline{G}$ *est prise par rapport à toutes les variables, dont t, et idem pour la* $\limsup \overline{G}$.

De plus, V *est dite solution de viscosité* discontinue *de (A.4) si ses enveloppes inférieures* $\underline{V}$ *et supérieures* $\overline{V}$ *en sont respectivement sur- et sous-solutions de viscosité, et* V *est dite* solution de viscosité *si elle est en outre continue.*

Remarque A.5 En réalité, toute classe de fonctions-tests, intermédiaire entre $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{R})$ et $\mathcal{C}^{1,2}(\mathcal{R})$, convient indifféremment à ces définitions (voir par exemple Fleming-Soner [77, Chapitre II, Remark 6.1]).

A.3 Problèmes stationnaires du premier ordre

Dans le cadre d'un problème donné, on mentionnera seulement les variables qui interviennent réellement dans ce problème, afin d'alléger les notations. Nous noterons notamment :

$$G(x,V(x),\nabla V(x)) = 0 \ , \ x \in \overline{\Omega} \tag{A.5}$$

pour une équation stationnaire du premier ordre — historiquement les premières pour lesquelles furent introduites les solutions de viscosité, afin de résoudre des problèmes de stabilité et d'unicité des solutions, — posée sur la fermeture $\overline{\Omega} =: \mathcal{R}$ d'un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{R}^r$ $(r \in N^*)$. La condition d'ellipticité pour G se réduit alors à G localement bornée, croissante (au sens large) par rapport à son deuxième argument. Dans ce cas, on a les définitions suivantes équivalentes à A.4.

Proposition A.6 *La fonction localement bornée* V *sur* $\overline{\Omega}$ *est sous-solution, respectivement sur-solution de viscosité de l'équation stationnaire de premier ordre (A.5), si seulement si* V *semi-continue supérieurement, respectivement inférieurement, et pour tout* $x \in \overline{\Omega}$, *l'une des deux assertions équivalentes suivantes est vérifiée :*

a. pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ *vérifiant* $V(x) = \varphi(x)$, *et* $V < \varphi$ *(indifféremment,* $\leq$*) ailleurs sur* $\overline{\Omega}$, *respectivement* $V > \varphi$ *(indifféremment,* $\geq$*) :*

$$\underline{G}(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \leq 0 \ ,$$

respectivement

$$\overline{G}(x,V(x),\nabla\varphi(x)) \geq 0 \ .$$

b. *pour tout $p \in \overline{D}V(x)$,*

$$\underline{G}(x,V(x),p) \ \leq \ 0 \ , \tag{A.6}$$

respectivement pour tout $p \in \underline{D}V(x)$,

$$\overline{G}(x,V(x),p) \ \geq \ 0 \ . \tag{A.7}$$

Preuve En effet, on montre par exemple (voir Barles [14]) que pour V semi-continue supérieurement, localement bornée sur $\overline{\Omega}$:

$$\overline{D}V(x) \ = \ \{\nabla\varphi \mid \varphi \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \text{ et } V < \varphi \text{ sur } \overline{\Omega} \text{ sauf } V(x) = \varphi(x)\} \ . \tag{A.8}$$

□

Dans ces énoncés, $\underline{D}V(x)$, respectivement $\overline{D}V(x)$, désigne le sous-différentiel, respectivement sur-différentiel, de la fonction localement bornée V en $x \in \overline{\Omega}$, c'est-à-dire l'ensemble des $p \in \mathbb{R}^r$, tels que:

$$\liminf_{\overline{\Omega} \ni y \to x} \frac{V(y) - V(x) - \langle p, y - x\rangle}{|y - x|} \ \geq \ 0 \ ,$$

respectivement

$$\limsup_{\overline{\Omega} \ni y \to x} \frac{V(y) - V(x) - \langle p, y - x\rangle}{|y - x|} \ \leq \ 0 \ .$$

Remarque A.7 Lorsque V est convexe, respectivement concave, $\underline{D}V(x)$, respectivement $\overline{D}V(x)$, n'est autre que le sous-différentiel, respectivement sur-différentiel de V en x, tel qu'il est défini en analyse convexe.

Au passage,
Proposition A.8 *Soit V localement bornée sur $\overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^r$ $(r \in \mathbb{N}^*)$. Pour toute fonction ϕ croissante appartenant à $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \overline{\Omega}$:*

$$\overline{D}(\phi \circ V)(x) \ = \ \phi'[V(x)] \ \overline{D}V(x) \ .$$

Preuve Par changement de fonction muette dans (A.8) :

$$\begin{aligned} \overline{D}(\phi \circ V)(x) \ &= \ \{\nabla(\phi \circ \varphi)(x) \mid \phi \circ V < \phi \circ \varphi \text{ partout sauf } \phi \circ V(x) = \phi \circ \varphi(x)\} \\ &= \ \{\phi'[V(x)]\nabla\varphi(x) \mid V < \varphi \text{ partout sauf } V(x) = \varphi(x)\} \\ &= \ \phi'[V(x)] \ \overline{D}V(x) \ . \end{aligned}$$

□

En outre,
Proposition A.9 *Pour toute famille finie $(\varphi_i)_{i \in I}$ de fonctions appartenant à $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ et coïncidant en $x \in \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^r$ $(r \in N^*)$,*

a. $\overline{D}\min_{i \in I} \varphi_i(x) \ = \ \overline{co}\{\nabla\varphi_i(x)\}_{i \in I}$;

b. $\underline{D}\min_{i \in I} \varphi_i(x) \ = \ \emptyset$ *s'il existe i et j dans I tels que $\nabla\varphi_i(x) \neq \nabla\varphi_j(x)$.*

Preuve Voir par exemple Clarke [52].

□

Les notions de solution classique et de viscosité de (A.5) sont compatibles au sens suivant : si G est continue et que la fonction réelle V sur $\overline{\Omega}$ est différentiable en x, alors :

$$\begin{cases} \underline{V}(x) \ = \ \overline{V}(x) \ = \ V(x) \\ \underline{D}V(x) \ = \ \overline{D}V(x) \ = \ \{\nabla V(x)\} \ . \end{cases}$$

Donc V satisfait (A.6), respectivement (A.7), en x si et seulement si $G(x,V(x),\nabla V(x)) \leq 0$, respectivement ≥ 0.

Enfin, considérons les équations quasi linéaires suivante dans Ω :

$$-\varepsilon\Delta V_\varepsilon(x) + G(x,V_\varepsilon(x),\nabla V_\varepsilon(x)) = 0 \ .$$

Le terme dominant $-\varepsilon\Delta V_\varepsilon$ apparaît naturellement en mécanique des fluides, où il représente physiquement une viscosité, dotée de propriétés régularisantes. Les limites localement uniformes de solutions (classiques) V_ε quand $\varepsilon \to 0^+$ figurent toujours parmi les solutions de viscosité de (A.5). D'où le nom de *méthode de viscosité évanescente* pour ce procédé d'obtention de solutions par passage à la limite quand le terme de viscosité tend vers 0, et de *solutions de viscosité* pour ce concept de solutions.

Proposition A.10

a. *Le minimum (respectivement maximum) V, de deux sur-solutions (respectivement sous-solutions) de viscosité, V_1 et V_2, de (A.5), dont l'une au moins est continue, est encore une sur-solution (respectivement sous-solution) de viscosité de (A.5).*
b. *S'il est continu, le* supremum *(respectivement* infimum*) d'une famille quelconque de sous-solutions (respectivement sur-solutions) de viscosité de (A.5), $(V_i)_{i\in I}$, est encore une sous-solution (respectivement sur-solution) de viscosité de (A.5).*

Preuve Montrons cette proposition dans le cas des sous-solutions. Le cas des sur-solutions se traiterait de la même manière.

a. Une fonction est semi-continue supérieurement si et seulement si son hypographe est fermé. Donc par axiomatique des fermés, le maximum de deux sous-solutions est semi-continu supérieurement.
   Supposons pour fixer les idées V_1 continue. Soit x fixé dans $\overline{\Omega}$. Par semi-continuité, on a $V_1 > V_2$ dans un voisinage de x si $V_1(x) > V_2(x)$, donc $\overline{D}V(x) = \overline{D}V_1(x)$ et

   $$\underline{G}(x,V(x),\overline{D}V(x)) \ \equiv \ \underline{G}(x,V_1(x),\overline{D}V_1(x)) \ \subseteq \ \mathbb{R}_- \ ;$$

   si en revanche $V_1(x) \leq V_2(x)$, alors (voir plus bas) :

   $$\overline{D}V(x) \ \subseteq \ \overline{D}V_2(x) \ , \tag{A.9}$$

   donc

   $$\underline{G}(x,V(x),\overline{D}V(x)) \ \subseteq \ \underline{G}(x,V_2(x),\overline{D}V_2(x)) \ \subseteq \ \mathbb{R}_- \ .$$

   Justifions (A.9). En effet, pour $p \in \overline{D}V(x)$, et $y \neq x$:

   $$\frac{V_2(y) - V_2(x) - \langle p,y-x\rangle}{|y-x|} \ \leq \ \frac{V(y) - V(x) - \langle p,y-x\rangle}{|y-x|} \ ,$$

   d'où $p \in \overline{D}V_2(x)$ par passage à la limite supérieure quand y tend vers x dans $\overline{\Omega}$.
b. Si x maximise strictement (à 0) $V - \varphi$ sur $\overline{\Omega} \cap \overline{B}$, où φ est une fonction-test de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$ et B une boule non vide de centre x, soit x_n maximisant $V_n - \varphi$ sur $\overline{\Omega} \cap \overline{B}$ — un tel x_n existe nécessairement, par semi-continuité supérieure de V_n, où (V_n) est une suite de sous-solutions de la famille, telle que $V_n(x)$ tend sans jamais décroître vers $V(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

Si x' désigne la limite d'une suite extraite, encore notée x_n pour alléger les écritures, alors :

$$\begin{aligned} V(x)-\varphi(x) &= \lim_{n\to\infty} V_n(x)-\varphi(x) \;\leq\; \liminf_{n\to\infty} V_n(x_n)-\varphi(x_n) \qquad (A.10)\\ &\leq \limsup_{n\to\infty} V_n(x_n)-\varphi(x_n) \;\leq\; \limsup_{n\to\infty} V(x_n)-\varphi(x_n) \;=\; V(x')-\varphi(x'), \end{aligned}$$

par continuité de $V-\varphi$.
Par unicité du maximum strict, x' n'est alors autre que x, qui est donc la limite des x^n.
Les inégalités médianes dans (A.10) entraînent alors :

$$\limsup_{n\to\infty} V_n(x_n) \leq V(x) \leq \liminf_{n\to\infty} V_n(x_n) ,$$

soit $V(x)=\lim_{n\to\infty} V_n(x_n)$. Alors, par semi-continuité inférieure de $\underline{G}$:

$$\begin{aligned} \underline{G}(x,V(x),\nabla\varphi(x)) &= \underline{G}(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} V_n(x_n), \lim_{n\to\infty} \nabla\varphi(x_n))\\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \underline{G}(x_n,V_n(x_n),\nabla\varphi(x_n)) \leq 0 , \end{aligned}$$

par non positivité des termes de la séquence dont on prend la lim inf (quitte à considérer $\varphi_n \equiv \varphi + V_n(x_n) - \varphi(x_n)$, si l'on veut être dans le cadre strict de la Proposition A.6.a).

□

A.4 Problèmes de Dirichlet ou inéquations variationnelles stationnaires du premier ordre

On spécialise encore l'équation elliptique stationnaire du premier ordre (A.5) en le problème de Dirichlet ou l'inéquation variationnelle suivants :

$$G(x,V(x),\nabla V(x)) = \begin{cases} H(x,V(x),\nabla V(x)) & , \quad x\in\Omega\\ V(x)-S(x) & , \quad x\in\Gamma \end{cases}$$

ou

$$G(x,V(x),\nabla V(x)) = H(x,V(x),\nabla V(x)) \vee (V(x)-S(x)) , \qquad x\in\Omega\equiv R^r ,$$

pour des fonctions continues H [1] et S, Γ étant une notation pour $\partial\Omega$.

La fonction V localement bornée, semi-continue supérieurement sur $\overline{\Omega}$, respectivement inférieurement, est alors sous-solution, respectivement sur-solution de viscosité de (A.5), si et seulement si :

$$\begin{cases} H(x,V(x),\overline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_- & , \quad x\in\Omega\\ H(x,V(x),\overline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_- \text{ si } V(x)>S(x) & , \quad x\in\Gamma \end{cases}$$

$$\text{ou} \quad H(x,V(x),\overline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_- \text{ et } V(x)\leq S(x) , \quad x\in\Omega ,$$

1. Non décroissante par rapport à son deuxième argument.

respectivement

$$\left\{\begin{array}{lcl} H(x,V(x),\underline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_+ & , & x \in \Omega \\ H(x,V(x),\underline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ si } V(x) < S(x) & , & x \in \Gamma \end{array}\right.$$
$$\text{ou} \quad H(x,V(x),\underline{D}V(x)) \subseteq \mathbb{R}_+ \text{ si } V(x) < S(x) \; , \quad x \in \Omega \; .$$

Vérifions par exemple que la solution continue U du problème de contrôle de la section A.1 — équation (A.2) — est solution de viscosité du problème de Dirichlet stationnaire du premier ordre (A.3). En effet, U est nulle sur Γ ; en $x = 0$:

$$\underline{D}U(x) = \emptyset \; , \; \overline{D}U(x) = [-1{,}1] \; , \; \mid \overline{D}U(x) \mid -1 \subseteq \mathbb{R}_- \; ;$$

et sur Ω, $\mid \nabla U \mid = 1$.

Annexe B

Calcul Stochastique

La référence pour cette Annexe est le livre de Karatzas-Shreve [92]. Étant données une *tendance*, μ et une *dispersion*, σ, Borel-mesurables :

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \xrightarrow{\mu} \mathbb{R}^d\ , \qquad \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \xrightarrow{\sigma} \mathbb{R}^{d\times r}\ ,$$

— $d,r\in\mathbb{N}^*$, — on appelle *solution faible* de l'équation différentielle stochastique (*eds*) initialisée en $(t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$:

$$dX_s^{t,x} \ = \ \mu(s,X_s^{t,x})\ ds \ + \ \sigma(s,X_s^{t,x})\ dW_s\ , \quad t<s\ , \tag{B.1}$$

tout triplet $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $(\mathcal{F}_s)_{t\leq s}$, $(X^{t,x},W)$:
— $(\Omega,\mathcal{F},P)$, espace probabilisé ;
— $(\mathcal{F}_s)_{t\leq s}$, filtration continue de sous-tribus de $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_t$ contenant tous les ensembles de P-mesure nulle ;
— $(X_s^{t,x},\mathcal{F}_s)_{t\leq s}$, processus continu, adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; $(W_s,\mathcal{F}_s)_{t\leq s}$, Brownien r-dimensionnel, tel que presque sûrement, pour tout $t\leq s$:

$$\int_t^s \left(|\mu_i(\theta,X_\theta^{t,x})| \ + \ \sigma_{ij}^2(\theta,X_\theta^{t,x})\right)\ d\theta \ < \ +\infty\ , \quad \forall 1\leq i\leq d,\ 1\leq j\leq r\ ,$$

et

$$X_s^{t,x} \ = \ x+\int_t^s \mu(\theta,X_\theta^{t,x})\ d\theta \ + \ \int_t^s \sigma(\theta,X_\theta^{t,x})\ dW_\theta\ , \quad t<s\ . \tag{B.2}$$

De plus, on parle de solution faible *unique en loi* en (t,x), si deux solutions faibles initialisées en (t,x) ont même loi de probabilité.

Si X est solution faible initialisée en (t,x) de (B.1), les intégrales de Lebesgue-Stieltjes par rapport au temps, et stochastique par rapport au Brownien apparaissant dans (B.2) (à t fixé) sont de fait bien définies, fonctions vectorielles continues à variations bornées et martingales locales continues[1] de leur borne supérieure s, respectivement.

On a alors la *formule de Itô* (multidimensionnelle), valide pour toute fonction $\Pi\in\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d;\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned}\Pi(\Theta,X_\Theta^{t,x}) \ &= \ \Pi(\theta,X_\theta^{t,x}) \\ &\quad + \ \int_\theta^\Theta \left(\partial_\tau\Pi+\langle\nabla\Pi,\mu\rangle+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[(\mathcal{H}\Pi)\sigma\sigma^T]\right)(\tau,X_\tau^{t,x})\ d\tau \\ &\quad + \ \int_\theta^\Theta \langle\nabla\Pi,\sigma dW_\tau\rangle(\tau,X_\tau^{t,x})\ , \qquad t\leq\theta\leq\Theta\ .\end{aligned}$$

1. L'intégrale stochastique est même une martingale de carré intégrable, si σ est continue bornée.

— ∂_τ dérivée partielle par rapport au temps, ∇ et $\mathcal{H}$ gradient et matrice Hessienne en espace.
Ou encore, en notant $\| X \|_A^2 \equiv X^T A X$:

$$\begin{aligned}\Pi(\Theta,X_\Theta^{t,x}) &= \Pi(\theta,X_\theta^{t,x}) + \int_\theta^\Theta \partial_\tau \Pi(\tau,X_\tau^{t,x})\, d\tau \\ &+ \int_\theta^\Theta \langle \nabla \Pi(\tau,X_\tau^{t,x}),dX_\tau^{t,x}\rangle + \frac{1}{2}\int_\theta^\Theta \| dX_\tau^{t,x} \|^2_{\mathcal{H}\Pi(\tau,X_\tau^{t,x})} \ , \qquad t \le \theta \le \Theta \ .\end{aligned}$$

en utilisant la table de multiplication formelle suivante :

	$d\tau$	dW_τ^1	dW_τ^2
$d\tau$	0	0	0
dW_τ^1	0	$d\tau$	$\rho d\tau$
dW_τ^2	0	$\rho d\tau$	$d\tau$

si W^1 et W^2 sont des Browniens unidimensionnels, de corrélation $d < W^1,W^2 >_\tau = \rho d\tau$ ($\rho = 0$ si W^1 et W^2 sont indépendants).

Si de plus

$$dY_s^{t,y} = \nu(s,Y_s^{t,y})\, ds + \rho(s,Y_s^{t,y})\, dW'_s \ , \quad t < s$$

(hypothèses analogues sur Y et sur X), alors avec la même table, dans le cas $d = 1$ [92, Théoreme 3.3.6 et Problème 3.3.12] :

$$\begin{aligned}X_\Theta^{t,x} Y_\Theta^{t,y} &= X_\theta^{t,x} Y_\theta^{t,y} \\ &+ \int_\theta^\Theta X_s^{t,x} dY_s^{t,y} + \int_\theta^\Theta Y_s^{t,y} dX_s^{t,x} + \int_\theta^\Theta dX_s^{t,x}\, dY_s^{t,y} \ , \quad t < \theta \le \Theta \ .\end{aligned}$$

Enfin, toujours si $d = 1$, et dans le cas stationnaire $X^{t,x} \equiv X^x$, on a pour $\Pi(X^x)$ convexe, non nécessairement de classe $\mathcal{C}^2$, une généralisation de la formule de Itô, utilisant la notion de temps local d'une semi-martingale continue; voir Karatzas-Shreve [92, §3.7] et usage dans la Partie IV de cette thèse, §4.1.

Il existe également des formules de Itô intégrées, valides pour des fonctions Π à régularité moindre que ci-dessus; ; voir par exemple Bensoussan-J.L. Lions [24, §8.3] et usage dans la Partie IV de cette thèse, §7.2.2 et 7.3.3.

Annexe C

Formules explicites dans le modèle de Black-Scholes

Cette Annexe regroupe les formules explicites utilisées dans le modèle de Black-Scholes :

$$dS_t \;=\; S_t\,(rdt \;+\; \sigma dW_t)\;, \qquad t > t_0\;; \qquad S_{t_0} = S_0\;, \tag{C.1}$$

r et σ constantes ≥ 0, W Brownien standard sous la probabilité risque-neutre P. Pour plus de détails, on renvoie par exemple à Black-Scholes, El Karoui, Karatzas-Shreve [36, 69, 92]. On notera :

$$\Sigma := \sigma\sqrt{t-t_0} \quad , \quad z \equiv z(S) := \ln(\frac{S}{S_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0)\ .$$

Proposition C.1 *Dans le modèle de Black-Scholes précédent :*

*a. l'*eds *(C.1), admet la solution explicite :*

$$S_t = S_0 \exp[\sigma W_t + (r - \frac{\sigma^2}{2})(t-t_0)]\,,$$

W_t étant initialisé en t_0 ;

b. la densité l de la loi de S_t, conditionnellement à la phase initiale (t_0,S_0), vaut :

$$l_{t_0,S_0}(t,S) = \frac{e^{-\frac{z^2}{2\Sigma^2}}}{S\Sigma\sqrt{2\pi}}\ , \tag{C.2}$$

de dérivée logarithmique par rapport à S (changée de signe) :

$$h_{t_0,S_0}(t,S) \;=\; \frac{-\partial_S l_{t_0,S_0}(t,S)}{l_{t_0,S_0}(t,S)} \;=\; \frac{1}{S}\left(1 + \frac{z}{\Sigma^2}\right)\ ;$$

c. cette densité, continûment actualisée au taux r, $e^{-r(t-t_0)}l_{t_0,S_0}(t,S)$, n'est autre que la fonction de Green $G_{t_0,S_0}(t,S)$ du processus S_t, ou solution fondamentale de l'équation de Black-Scholes en variables (t_0,S_0).

Preuve

a. Vérification par calcul direct, en utilisant la formule de Itô.

b. L'événement $\{S_t \leq S\}$, ou $\{\sigma W_t \leq z(\overline{S})\}$, a lieu avec la probabilité :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma}\int_{z=-\infty}^{z(\overline{S})} e^{-\frac{z^2}{2\Sigma^2}}dz\ ,$$

soit

$$\int_{S=0}^{\overline{S}} \frac{1}{S\Sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z(S)^2}{2\Sigma^2}} dS \ ,$$

après le changement de variable suivant :

$$z = z(S), \quad dz = \frac{dS}{S} \ .$$

L'intégrande fournit alors la densité de probabilité de transition de de S_0 à S entre t_0 et t. La dérivée logarithmique s'en déduit par calcul immédiat.

c. Voir par exemple Karatzas-Shreve [92, §5.7.B] ou Friedman [81, Chapter 6].

□

Intégrant par rapport au noyau l, il est souvent possible de calculer explicitement des prix d'options. Ainsi :

Proposition C.2 *Étant donnés les échéances t, le prix d'exercice K et la phase courante (t_0,S_0), les prix de l'option digitale, $D_{t,K}(t_0,S_0)$, du* call *européen, $\Pi_{t,K}(t_0,S_0)$ (formule de Black-Scholes) et du* call *européen* up out *au niveau constant H, $\Pi_{t,K,H}(t_0,S_0)$, sont donnés par les formules suivantes :*

$$\begin{aligned}
D_{t,K}(t_0,S_0) &= e^{-r(t-t_0)}\mathcal{N}(\frac{-z(K)}{\Sigma}) \ , \\
\Pi_{t,K}(t_0,S_0) &= S_0\mathcal{N}(\Sigma - \frac{z(K)}{\Sigma}) - Ke^{-r(t-t_0)}\mathcal{N}(-\frac{z(K)}{\Sigma}) \\
&= \Pi_{t,K,H}(t_0,S_0) + \left[S_0\mathcal{N}(\Sigma - \frac{z(H)}{\Sigma}) - Ke^{-r(t-t_0)}\mathcal{N}(-\frac{z(H)}{\Sigma})\right] \\
&\quad -S_0\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2\nu}\left[\mathcal{N}(\Sigma + \frac{z(H^2/K)}{\Sigma}) - \mathcal{N}(\Sigma + \frac{z(H)}{\Sigma})\right] + Ke^{-r(t-t_0)}\left(\frac{H}{S_0}\right)^{2(\nu-1)} \\
&\quad \left[\mathcal{N}(\frac{z(H)}{\Sigma}) - \mathcal{N}(\frac{z(H^2/K)}{\Sigma})\right] \ ,
\end{aligned}$$

où $\nu \equiv \frac{r}{\sigma^2} + \frac{1}{2}$.

Preuve En effet,

$$\begin{aligned}
D_{t,K}(t_0,S_0) &= e^{-r(t-t_0)}E_P^{t_0,S_0}\mathbf{1}_{\{S_t \geq K\}} \\
&= e^{-r(t-t_0)}P^{t_0,S_0}(S_t \geq K) \\
&= e^{-r(t-t_0)}\mathcal{N}(\frac{-z(K)}{\Sigma}) \ .
\end{aligned}$$

Pour la formule de Black-Scholes et le prix de l'option à barrière, on renvoie à Black-Scholes, El Karoui, Carr-Ellis, Ritchken [36, 69, 50, 119].

□

Remarque C.3 La formule de Black-Scholes ne fait pas intervenir le rendement du sous-jacent sous la probabilité réelle, historique, Q. Ainsi, du point de vue de l'évaluation et de la couverture des options, tout se passe dans ce modèle comme si le sous-jacent évoluait réellement au taux moyen r dans la probabilité risque-neutre P, sous laquelle le prix de l'option égale l'espérance actualisée au taux r de son gain terminal. Il peut être rendu compte de ce résultat par le recours au modèle élémentaire discret suivant (modèle de

Cox-Ross, voir aussi Hull, Lamberton-Lapeyre [57, 85, 100]), qui s'interprète comme une étape en temps du modèle de Black-Scholes discrétisé.

On considère une action de valeur initiale 2 et finale 1 ou 3, et un *call* européen sur cette action d'échéance terminale et prix d'exercice 2. On cherche à déterminer la valeur initiale π de ce *call*. Moyennant l'apport initial $2\alpha-\pi$, correspondant à un portefeuille comportant un *call* de vendu pour α actions d'achetées, un investisseur réalise le gain terminal $3\alpha - 1$ ou α, soit $1/2$ avec certitude si $\alpha = 1/2$. D'où $1 - \pi = 1/2$, sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, le taux court de l'économie r étant supposé nul, pour simplifier ; et ce résultat est indépendant des probabilités des événements 1 ou 3.

Annexe D

Consistance des schémas

Preuve du Théorème 3.4, Partie III.

Étant donnée une fonction-test $\Pi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2)$, telle que pour $k,\, l \in \mathbb{N}$:

$$|\partial^{k+l}_{t^k y^l}\Pi| < C\ k!\ l!\ , \tag{D.1}$$

on a, avec des notations évidentes :

$$\begin{aligned}
\frac{\Pi^n_m - \Pi^{n-\theta}_m}{\theta\Delta t} &= \partial_t\Pi^{n-\theta}_m + \frac{\theta\Delta t}{2}\partial^2_{t^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\theta\Delta t)^2}{6}\partial^3_{t^3}\Pi(d_n,y_m)\ ,\\
\frac{\Pi^{n-\theta}_m - \Pi^{n-1}_m}{(1-\theta)\Delta t} &= \partial_t\Pi^{n-\theta}_m - \frac{(1-\theta)\Delta t}{2}\partial^2_{t^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{((1-\theta)\Delta t)^2}{6}\partial^3_{t^3}\Pi(g_n,y_m)\ ,\\
\frac{\Pi^{n-\theta}_{m+1} - \Pi^{n-\theta}_m}{\Delta y} &= \partial_y\Pi^{n-\theta}_m + \frac{\Delta y}{2}\partial^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\Delta y)^2}{6}\partial^3_{y^3}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\Delta y)^3}{4!}\partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},d_m)\ ,\\
\frac{\Pi^{n-\theta}_m - \Pi^{n-\theta}_{m-1}}{\Delta y} &= \partial_y\Pi^{n-\theta}_m - \frac{\Delta y}{2}\partial^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\Delta y)^2}{6}\partial^3_{y^3}\Pi^{n-\theta}_m - \frac{(\Delta y)^3}{4!}\partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},g_m)\ ,
\end{aligned}$$

par les formules de Taylor à l'ordre 3 en temps et 4 en espace, appliquées à Π au point $(t_{n-\theta},y_m)$, où $t_{n-\theta} := t_0 + (n-\theta)\Delta t$ et $y_m := y_0 + m\Delta y$. D'où :

$$(\Delta y)^{-2}\delta^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m = \partial^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\Delta y)^2}{4!}\left[\partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},d_m) + \partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},g_m)\right], \tag{D.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} := (\Delta t)^{-1}(\Pi^n_m - \Pi^{n-1}_m) &+ \tfrac{\sigma^2(\Delta y)^{-2}}{2}\delta^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m - \Big(\partial_t\Pi^{n-\theta}_m + \tfrac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m\Big)\\
&= (2\theta-1)\tfrac{\Delta t}{2}\partial^2_{t^2}\Pi^{n-\theta}_m\\
&+\tfrac{(\Delta t)^2}{6}\left[\theta^3\partial^3_{t^3}\Pi(d_n,y_m) + (1-\theta)^3\partial^3_{t^3}\Pi(g_n,y_m)\right]\\
&+\tfrac{\sigma^2}{2}\tfrac{(\Delta y)^2}{4!}\Big[\partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},d_m) + \partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},g_m)\Big]\ .
\end{aligned} \tag{D.3}$$

En notant de plus :

$$\Pi^{n,\theta} := \theta\Pi^{n-1} + (1-\theta)\Pi^n \quad , \quad \Gamma := (\Delta y)^{-2}\delta^2_{y^2}\Pi\ ,$$

il vient par linéarité :

$$\Pi^{n,\theta} = \Pi^{n-\theta} + (1-\theta)(\Pi^n - \Pi^{n-\theta}) + \theta(\Pi^{n-1} - \Pi^{n-\theta})\ ,$$

$$
\begin{aligned}
&(\Delta y)^{-2}\delta^2_{y^2}\Pi^{n,\theta}_m\\
&\quad= \Gamma^{n-\theta}_m + (1-\theta)(\Gamma^n_m - \Gamma^{n-\theta}_m) + \theta(\Gamma^{n-1}_m - \Gamma^{n-\theta}_m)\\
&\quad= \Gamma^{n-\theta}_m + (1-\theta)\tfrac{(\theta\Delta t)^2}{2}\partial^2_{t^2}\Gamma(r_n,y_m) + \theta\tfrac{((\theta-1)\Delta t)^2}{2}\partial^2_{t^2}\Gamma(l_n,y_m)\ ,
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

par les formules de Taylor à l'ordre 2 en temps, appliquées à Γ en $(t_{n-\theta},y_m)$. En effet, par linéarité, Γ est infiniment dérivable en temps comme Π. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a par linéarité et formules de Taylor en (t,y_m), cf. (D.2) :

$$
\begin{aligned}
\partial^k_{t^k}\Gamma(t,y_m) &= (\Delta y)^{-2}\delta^2_{y^2}\partial^k_{t^k}\Pi(t,y_m)\\
&= \partial^2_{y^2}(\partial^k_{t^k}\Pi)(t,y_m) + \frac{(\Delta y)^2}{4!}\left[\partial^4_{y^4}(\partial^k_{t^k}\Pi)(t,r_m) + \partial^4_{y^4}(\partial^k_{t^k}\Pi)(t,l_m)\right]\\
&= \partial^{k+2}_{t^k y^2}\Pi(t,y_m) + \frac{(\Delta y)^2}{4!}\left[\partial^{k+4}_{t^k y^4}\Pi(t,r_m) + \partial^{k+4}_{t^k y^4}\Pi(t,l_m)\right]\ .
\end{aligned}
$$

D'où, d'après (D.1) :

$$
|\partial^k_{t^k}\Gamma(t,y_m)| \le 2C\ (1+(\Delta y)^2)k!\ . \tag{D.5}
$$

Si Π satisfait à présent l'équation de la chaleur, l'erreur de troncature du θ-schéma (3.20) vaut alors :

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E} &= (\Delta t)^{-1}(\Pi^n_m - \Pi^{n-1}_m) + \frac{\sigma^2(\Delta y)^{-2}}{2}\delta^2_{y^2}\Pi^{n,\theta}_m - \left(\partial_t\Pi^{n-\theta}_m + \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\Pi^{n-\theta}_m\right)\\
&= \mathcal{A} + \frac{\sigma^2}{2}\ \left[(\Delta y)^{-2}\delta^2_{y^2}\Pi^{n,\theta}_m - \Gamma^{n-\theta}_m\right]\\
&= (2\theta-1)\frac{\Delta t}{2}\partial^2_{t^2}\Pi^{n-\theta}_m + \frac{(\Delta t)^2}{6}\left[\theta^3\partial^3_{t^3}\Pi(d_n,y_m) + (1-\theta)^3\partial^3_{t^3}\Pi(g_n,y_m)\right]\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{2}\frac{(\Delta y)^2}{4!}\left[\partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},d_m) + \partial^4_{y^4}\Pi(t_{n-\theta},g_m)\right]\\
&\quad+\frac{\sigma^2}{2}\frac{\theta(1-\theta)}{2}(\Delta t)^2\left[\theta\partial^2_{t^2}\Gamma(r_n,y_m) + (1-\theta)\partial^2_{t^2}\Gamma(l_n,y_m)\right]\ ,
\end{aligned}
$$

d'après (D.3) et (D.4). D'où :

$$
|\mathcal{E}| \le C\left[|2\theta-1|\Delta t + \left(\theta^3 + (1-\theta)^3\right)(\Delta t)^2 + \sigma^2(\Delta y)^2 + \sigma^2\theta(1-\theta)(\Delta t)^2\left(1+(\Delta y)^2\right)\right]\ ,
$$

d'après (D.1) et (D.5).

□

Preuve du Théorème 6.1, Partie III.

La consistance et la précision sont analogues, en plus simple, à la Preuve précédente (formule de Taylor), en utilisant conjointement l'équation de la chaleur :

$$
\partial_t\Pi\ +\ \frac{\sigma^2}{2}\partial^2_{y^2}\Pi\ =\ 0\ ,
$$

et l'équation dérivée :

$$
\partial^2_{t^2}\Pi\ -\ \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)^2\partial^4_{y^4}\Pi\ =\ 0\ ,
$$

vérifiées par une solution régulière Π. Par ailleurs, le schéma se réécrit $\pi^n_m = \sum_{|\ell|\le 2}\mu_{|\ell|}\pi^{n+1}_{m+\ell}$, où μ constitue une pondération (positive, de somme un) sous la condition $(0\le)\lambda\le 1$. On a alors la stabilité.

□

Annexe E

Détail des conditions d'expériences numériques

On rappelle Tableau E.1 les valeurs numériques utilisées par défaut pour les expériences numériques par différences finies présentées dans la Partie III de cette thèse.

r	σ	t_0	S_0	T	K	H
10%	20%	0	100	1	100	120

TAB. E.1 – *Récapitulatif des valeurs par défaut des paramètres*

En outre, on a fait les choix suivants :

Type de maillage : régulier en variables logarithmiques, exponentiel en variables centrées ;

Localisation : $f = 4{,}5$, sauf $f = \sqrt{2N_T}$ pour le schéma explicite (voir §3.3) ;

Conditions aux bords : Dirichlet et Neumann naturelles ($\Pi = \varphi$ et $\partial_n\varphi$ actualisées au taux r) sur les parties explicites et implicites des schémas, respectivement.

Le Tableau E.2 indique les choix restants (s'il en est) et exceptions à ces valeurs numériques.

	Changement de variable	Localisation	Schéma	Tailles du maillage
***Call* européen** (§4.1, Figure 4.1)	centrant		explicite	50×101
			implicite	50×101
			Crank-Nicholson	50×101
***Call* européen** (§4.1, Figure 4.2)	centrant	petit/moyen/ grand domaine	Crank-Nicholson	50×101
***Call* européen** (§4.1, Figure 4.3)	centrant		Crank-Nicholson	50×101 100×201 100×399
Barrière droite $S \equiv \overline{H}$ (§4.2.1)	logarithmique	$\overline{y} = \overline{h} := \ln(\overline{H})$	explicite	70×71
			implicite	70×71
			Crank-Nicholson	50×71
Barrière courbe $H_t := \frac{\overline{H}}{S_0} e^{-r(t-t_0)}$ $r = 0$ puis $r = 20\%$ (§4.2.1)	$\emptyset$	$\overline{x}_t = H_t$	Crank-Nicholson adapté à la barrière	100×151
Barrière courbe $H_t := \frac{\overline{H}}{S_0} e^{-r(t-t_0)}$, $r = 0$ puis $r = 20\%$ (§4.2.2)	logarithmique $y := \ln(x)$, et changement de fonction inconnue	$\overline{y}_t = 2h_t - \underline{y}_t$ où $h_t := \ln(\overline{H}_t)$	Crank-Nicholson prolongé par antisymétrie	100×151
***Put* américain** (§4.3)	centrant		Trotter explicite	500×1001 200×201
			Trotter implicite	200×201
			Trotter Crank-Nicholson	500×1001 200×201
Digitale $r = 0$ (§4.4)	logarithmique		Crank-Nicholson	50×101 100×399
Modèle à volatilité stochastique (§4.5)	centrant en S, $x = \frac{S}{S_0} e^{-r(t-t_0)}$; pas de changement en y		implicite dans les deux directions successives d'espace	52×140 $\times 40$

TAB. E.2 – *Conditions d'expériences numériques*

Annexe F

Espaces de Sobolev sur bandes du plan

Le Théorème suivant regroupe les principales propriétés des espaces de Sobolev sur bandes du plan, utilisés pour modéliser le problème de calibration lissée (Partie IV de cette thèse). On démontre ces propriétés, à l'aide des propriétés analogues (mot pour mot), classiques sur demi-plans ouverts (voir par exemple Larrouturou-P.L. Lions [102], Bensoussan-J.L. Lions [24]).

Théorème F.1 $\Omega =]t_0,T[\times\mathbb{R}$ *($t_0 < T$), $p \in [2,+\infty[$.*

a. $H^1(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L_p(\Omega)$;

b. $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dense dans $L_p(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$.

c. L'application $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \times \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ni (u,v) \mapsto (u|_{\partial\Omega},\partial_n v|_{\partial\Omega}) \in \mathcal{C}^0(\partial\Omega)^2 \cap L_2(\partial\Omega)^2$ (normale extérieure n à $\partial\Omega$), admet un unique prolongement linéaire continu de $H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$ dans $L_2(\partial\Omega)^2$, dit trace, noté (pour $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$) $\gamma(u,v) \equiv (\gamma_0(u,v),\gamma_1(u,v))$. De plus, $\gamma(u,v)$ ne dépend que de la restriction de (u,v) à une distance arbitrairement faible de $\partial\Omega$.

d. L'image de γ est dense dans $L^2(\partial\Omega)^2$, et on a la formule de Green, dite généralisée, suivante, pour tout $(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$

$$-\int_\Omega u\ (\Delta v) \ = \ \int_\Omega \nabla u \nabla v \ - \ \int_{\partial\Omega} (\gamma_0 u)(\gamma_1 v)\ .$$

Preuve Comme annoncé, on se ramène (par troncature et symétrie) aux énoncés analogues valides sur demi-plans ouverts, e.g. $\Omega_-^\infty =]t_0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $\Omega_+^\infty =]-\infty,T[\times\mathbb{R}$. À cette fin, on introduit sur $\mathbb{R}$ des poids $\alpha_-(t)$, $\alpha_+(t)$, non négatifs, de somme un, réguliers, $|\alpha'_-| \le C'$, $|\alpha''_-| \le C''$, $\alpha_{-(+)}$ nul à droite (gauche) d'un voisinage de $T(t_0)$ (compris).

Pour toute (classe de) fonction(s) u sur Ω, on définit alors u_+/u_-, prolongée de u par 0 à $\Omega^\infty_{-/+}$. On a alors les inégalités suivantes, ainsi que celles déduites en changeant $+$ en $-$:

$$\begin{aligned}
\| \alpha_- u_+ \|_{L_p(\Omega_-^\infty)} &\le \| u \|_{L_p(\Omega)}\ , \qquad u \in L_p(\Omega) \\
\| \alpha_- u_+ \|_{H^1(\Omega_-^\infty)} &\le (1+C'^2)^{1/2}\ \| u \|_{H^1(\Omega)}\ , \qquad u \in H^1(\Omega) \qquad \text{(F.1)} \\
\| \alpha_- u_+ \|_{H^2(\Omega_-^\infty)} &\le C\ \| u \|_{H^2(\Omega)}\ , \qquad u \in H^2(\Omega)\ ;
\end{aligned}$$

$C \equiv C\ (C', C'')$. Montrons par exemple (F.1) (les deux autres inégalités se montreraient de la même manière). En effet, pour $u \in H^1(\Omega)$, on vérifie sur des fonctions-tests $(\alpha_- u_+)' \equiv \alpha'_- u_+ + \alpha_(u')_+ \in L_p(\Omega_-^\infty)$, puis

$$\begin{aligned}
\| \alpha_- u_+ \|^2_{H^1(\Omega_-^\infty)} &= \| \alpha_- u \|^2_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\alpha_- u)^2 + \| \nabla(\alpha_- u) \|^2 \\
&\le \int_\Omega (1+C'^2)\ u^2 + (\partial_t u)^2 + (\partial_y u)^2 \le (1+C'^2)\ \| u \|^2_{H^1(\Omega)}\ .
\end{aligned}$$

a. Des injections analogues valides sur demi-plans ouverts $\Omega^\infty_{-/+}$, on déduit en effet :

$$\begin{aligned}\| u \|_{L_p(\Omega)} &= \| \alpha_- u + \alpha_+ u \|_{L_p(\Omega)} \\ &\leq \| \alpha_- u \|_{L_p(\Omega)} \ + \ \| \alpha_+ u \|_{L_p(\Omega)} \\ &= \| \alpha_- u_+ \|_{L_p(\Omega^\infty_-)} \ + \ \| \alpha_+ u_- \|_{L_p(\Omega^\infty_+)} \\ &\leq C_p \ \| \alpha_- u_+ \|_{H^1(\Omega^\infty_-)} \ + \ C_p \ \| \alpha_+ u_- \|_{H^1(\Omega^\infty_+)} \\ &\leq 2\,(1+C'^2)^{1/2}\, C_p \ \| u \|_{H^1(\Omega)} \ ,\end{aligned}$$

par (F.1).

b. On présente la preuve pour $H^1(\Omega)$, les deux autres cas admettant des preuves analogues. Soit donc $u \in H^1(\Omega)$. Par les énoncés de densité analogues valides sur $\Omega^\infty_{-/+}$, il existe alors $u_n^{-/+}$, telles que $\mathcal{D}(\overline{\Omega^\infty_-}) \ni u_n^- \to \alpha_- u_+$ dans $H^1(\Omega^\infty_-)$ quand $n \to \infty$, et idem en changeant $+$ et $-$. Alors, $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \ni (u_n^- + u_n^+)|_\Omega =: u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. En effet,

$$\begin{aligned}\| u - u_n \|_{H^1(\Omega)} &\leq \| \alpha_- u - u_n^- \|_{H^1(\Omega)} \ + \ \| \alpha_+ u - u_n^+ \|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq \| \alpha_- u_+ - u_n^- \|_{H^1(\Omega^\infty_-)} \ + \ \| \alpha_+ u_- - u_n^+ \|_{H^1(\Omega^\infty_+)} \ ,\end{aligned}$$

qui tend vers 0 par hypothèse.

Dans les points c et d suivants de cette Preuve, on notera $\Gamma_- \equiv \{t_0\} \times \mathbb{R}$, $\Gamma_+ \equiv \{T\} \times \mathbb{R}$.

c. Soient $\gamma_{-/+} \equiv (\gamma_0^{-/+},\gamma_1^{-/+})$ les prolongements analogues existant sur $\Omega^\infty_{-/+}$.

$\gamma(u,v) \equiv (\gamma_0^-(\alpha_- u_+),\gamma_1^-(\alpha_- u_+))$ sur Γ_-, et idem en changeant $+$ et $-$ sur Γ_+ ($(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$), fournit un prolongement linéaire continu du type souhaité (par propriétés analogues de $\gamma_{-/+}$ et propriétés de $\alpha_{-/+}$ vues en tête de cette Preuve), unique en son genre par b.

d. Alors, d'après les résultats analogues valides sur demi-plans ouverts $\Omega^\infty_{-/+}$, puis par construction de γ vue au c: $\gamma_-(u,v)$ ne dépend que de la restriction de (u,v) dans une bande arbitrairement étroite au-delà de t_0 ($(u,v) \in H^1(\Omega^\infty_-) \times H^2(\Omega^\infty_-)$), et résultat analogue pour $\gamma(u,v)$ restreinte à Γ_- ($(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^2(\Omega)$), et, (par symétrie) résultats symétriques en T.

Fort de ceci, montrons les densités annoncées, à partir de celles, analogues, valides dans $\Omega^\infty_{-/+}$. Étant donnée $(u,v) \in L_2(\partial\Omega)^2$, notons $u_{-/+} \equiv u|_{\Gamma_{-/+}}$ et idem pour v. Il existe donc $(u_n^{-/+},v_n^{-/+}) \in H^1(\Omega^\infty_{-/+}) \times H^2(\Omega^\infty_{-/+})$, telles que $\gamma_-(u_n^-,v_n^-) \to (u_-,v_-)$ dans $L_2(\Gamma_-)^2$ quand $n \to \infty$, et idem en changeant $-$ et $+$.

Alors, $(\alpha_- u_n^-,\alpha_- v_n^-)$ et (u_n^-,v_n^-) appartiennent toutes deux à $H^1(\Omega^\infty_-) \times H^2(\Omega^\infty_+)$, et coïncident dans une bande à droite à partir de t_0. De même, (u_n^-,v_n^-) et $(u_n,v_n) := \alpha_-(u_n^-,v_n^-)+\alpha_+(u_n^+,v_n^+)$ (restreintes à Ω) appartiennent toutes deux à $H^1(\Omega)\times H^2(\Omega)$, et coïncident dans une bande à droite à partir de t_0. Donc, sur Γ_-,

$$\begin{aligned}\gamma(u_n,v_n)|_\Omega &= \gamma(u_n^-,v_n^-)|_\Omega \\ &= (\gamma_0^-(\alpha_- u_n^-),\gamma_1^-(\alpha_- v_n^-)) \\ &= (\gamma_0^- u_n^-,\gamma_1^- v_n^-) \ ,\end{aligned}$$

qui par hypothèse tend vers (u_-,v_-) dans $L_2(\Gamma_-)^2$ quand $n \to +\infty$. Et on peut raisonner symétriquement en T. Alors, par recollement, $\gamma(u_n,v_n)|_\Omega \to (u,v)$ dans $L_2(\partial\Omega)^2$ quand $n \to +\infty$.

La formule de Green se prouve alors par densité, à partir des formules classiques pour $(u,v) \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})^2$.

□

Annexe G

Fonctions monotones sur bandes du plan

Dans le plan, de point courant (t,y), on définit une bande Ω, produit d'un intervalle ouvert non vide fois $\mathbb{R}$.

Définition G.1 *Étant donnée une bande Ω, on introduit l'ensemble, $\mathcal{M}(\Omega)$, des (classes de) fonctions $u \in H^1(\Omega)$, telles que $\partial_t u \leq 0$.*

Ce qui suit rassemble les propriétés utiles pour la calibration lissée (Partie IV de cette thèse) des fonctions $u \in \mathcal{M}(\Omega)$. On verra notamment (Corollaire G.5.a) qu'une telle fonction est nécessairement continue. La référence pour cette Annexe est l'article de Lebesgue [103].

Lemme G.2 *Bande Q. Pour toute suite de fonctions $u_n \in L_2(Q)$ équi-uniformément continues sur $\overline{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ (module ω), pour toute suite (t_n,y_n) de points de Q, on a:*
a $(n \in \mathbb{N})$. $u_n(t_n,y_n)$ borné si $\| u_n \|_{L_2(Q)}$ borné ;
b $(n \to +\infty)$. $u_n(t_n,y_n) \to 0$, si $\| u_n \|_{L_2(Q)} \to 0$.

Preuve En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C > 0$, telle que

$$|u_n(t_n,y_n)| \ \leq \ \varepsilon \ \vee \ \left(C \ \| u_n \|_{L_2(Q)}\right) \ , \qquad n \in \mathbb{N}$$

(en vertu du module ω). Donc, $|u_n(t_n,y_n)| \leq \varepsilon$ préalablement fixé > 0 si $\| u_n \|_{L_2(Q)} \leq \varepsilon / C$, ce qui est réalisé pour n assez grand dans le cas b, tandis qu'on obtient dans le cas a, pour $\varepsilon \equiv \varepsilon_0$, $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n(t_n,y_n)| \ \leq \ \varepsilon_0 \ \vee \ \left(C \ \| u_n \|_{L_2(Q)}\right) \ \leq \ \varepsilon_0 \ \vee \ \left(C \sup_m \| u_m \|_{L_2(Q)}\right) \ .$$

□

Lemme G.3 *Bandes Ω, Q; $\overline{Q} \subset \Omega$. $R \in \mathbb{R}$. Alors pour toute $u \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $\| \nabla u \|_{L_2(\Omega)} \leq R$, il existe une suite de fonctions,*

$$u_n \ \in \ \mathcal{M}\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right) \cap \mathcal{C}^1\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right) \ :$$

— équi-bornées, équi-uniformément continues sur $\overline{Q}$, $n \in \mathbb{N}$ (module $\omega_R \equiv \omega(\Omega,Q,R)$);
— convergeant localement uniformément sur $\overline{Q}$ vers (un représentant continu, qui existe, de) u quand $n \to +\infty$.

Preuve On rappelle (voir par exemple Brézis [41, Théorème IV.15])

$$\| f \star g \|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq \| f \|_{L_1(\mathbb{R}^2)} \| g \|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \tag{G.1}$$

(convolution $\star$, $f \in L_1(\mathbb{R}^2)$, $g \in L_2(\mathbb{R}^2)$). Soit alors $u_n \equiv \rho_n \star u$ sur $\frac{Q+\Omega}{2}$, la convolée au rang n de u, moyennant une suite régularisante ρ_n à support $\subset \overline{B}_\delta$, $\delta := \frac{1}{2}d(\Omega,Q)$. Alors (Brézis [41]):

• Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathcal{C}^1(\frac{Q+\Omega}{2})$, $\nabla u_n = \rho_n \star \nabla u$ (notamment, $\partial_t u_n = \rho_n \star \partial_t u \leq 0$), d'où par application de (G.1) à $f \equiv \rho_n$, $g = \tilde{u}$ ($\tilde{u} \equiv u$ prolongée au plan par 0)

$$\big(\| u_n \|_{L_2(Q)} \leq\big) \;\; \| u_n \|_{L_2\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right)} \leq \| u \|_{L_2(\Omega)} \tag{G.2}$$

$$\| \nabla u_n \|_{L_2\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right)} \leq \| \nabla u \|_{L_2(\Omega)} \leq R\ ; \tag{G.3}$$

d'où, (voir détail plus bas) u_n équi-bornées, équi-uniformément continues sur $\overline{Q}$ (module $\omega_R \equiv \omega(\Omega,Q,R)$);

• quand $n \to +\infty$, u_n converge vers u dans $H^1(\frac{1}{2}(Q+\Omega))$. Notant $\tilde{u}$ et $\nabla\tilde{u}$ dans $L_2(\mathbb{R}^2)$ les prolongées respectives de u et de ∇u au plan par 0, on a en effet :

$$\| \rho_n \star u - u \|_{L_2(\frac{1}{2}(Q+\Omega))} = \| \rho_n \star \tilde{u} - \tilde{u} \|_{L_2(\frac{1}{2}(Q+\Omega))} \leq \| \rho_n \star \tilde{u} - \tilde{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^2)}\ ,$$

qui, par le résultat classique sur le plan, tend vers 0 quand $n \to +\infty$, et idem avec ∇u et $\nabla\tilde{u}$ à la place de u et $\tilde{u}$.

(Toute extraction de) u_n admet alors une extraction localement uniformément convergente sur $\overline{Q}$ (Arzela-Ascoli), vers une limite qui ne saurait être que u (unicité des limites dans $L_{2,loc}(Q)$).

Détaillons pour finir l'assertion plus haut. Par Lebesgue [103, Théorème 10 (Preuve) et sa Remarque 3], l'intégrale de Dirichlet de $u \in \mathcal{M}\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right) \cap \mathcal{C}^1\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right)$, $I(u) \equiv \| \nabla u \|^2_{L_2\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right)}$, contrôle l'oscillation ε de u sur toute boule $\overline{B}_\eta(t,y)$, $0 < \eta < \delta$, $(t,y) \in \overline{Q}$:

$$I(u) \geq \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{\delta}{\eta}\right) \varepsilon^2\ . \tag{G.4}$$

En effet, par non croissance en temps, l'oscillation de u égale au moins ε sur tout cercle $\partial B_\rho(t,y)$, $\eta \leq \rho < \delta$ (voir Figure G.1; par hypothèse, il existe deux points A et B de $\overline{B}_\eta(t,y)$ tels que $u(A) \leq u(B) - \varepsilon$; alors, par non croissance en temps, $u(A_\rho) \leq u(A) \leq u(B) - \varepsilon \leq u(B_\rho) - \varepsilon$). Il vient alors, en passant en coordonnées polaires de centre (t,y):

$$A_\rho \equiv (\rho,\theta(\rho))\ , \quad B_\rho \equiv (\rho,\theta'(\rho))\ , \quad u(s,x) \equiv \hat{u}(\rho,\theta)\ ,$$

$$|\partial_\theta \hat{u}| = \rho \left| \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\partial_x u \\ \partial_s u \end{pmatrix} \right\rangle \right| \leq \rho \| \nabla u \|\ ,$$

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \int_{\overline{B}_\delta(t,y)} \| \nabla u \|^2 \\ &\geq \int_{\rho=\eta}^{\delta} \frac{d\rho}{\rho} \int_{\theta=\theta(\rho)}^{\theta'(\rho)} (\partial_\theta \hat{u})^2\ d\theta\ , \end{aligned}$$

où (paraphrasant Lebesgue [103, p. 388]) le minimum de l'intégrale simple $\int_{\theta=\theta(\rho)}^{\theta'(\rho)} (v')^2 d\theta$, $v(\theta(\rho)) = \hat{u}(A_\rho)$, $v(\theta'(\rho)) = \hat{u}(B_\rho)$, « s'obtient, soit par un calcul élémentaire, soit par l'emploi du calcul des variations. Il correspond à une fonction linéaire en θ et sa valeur est »

$$\frac{(\hat{u}(B_\rho) - \hat{u}(A_\rho))^2}{\theta'(\rho) - \theta(\rho)} \geq \frac{\varepsilon^2}{2\pi} ,$$

d'où (G.4). Il vient alors d'après (G.3), notant $\mathcal{M}_R(\Omega,Q) = \{u \in \mathcal{M}\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right) \cap \mathcal{C}^1\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right),$ $\| \nabla u \|_{L_2\left(\frac{Q+\Omega}{2}\right)} \leq R\}$:

$$\begin{aligned} \sup_{n\in\mathbb{N},(t,y)\in\overline{Q}} \mathrm{osc}_{\overline{B}_\eta(t,y)} u_n &\leq \sup_{u\in\mathcal{M}_R(\Omega,Q),(t,y)\in\overline{Q}} \mathrm{osc}_{\overline{B}_\eta(t,y)} u \\ &=: \omega_R(\eta) \to 0 \end{aligned}$$

quand $\eta \to 0^+$.

Les u_n sont donc équi-uniformément continues sur $\overline{Q}$ (module $\omega \equiv \omega(\Omega,Q,R)$) — et donc équibornées, par (G.2), Lemme G.2.a.

□

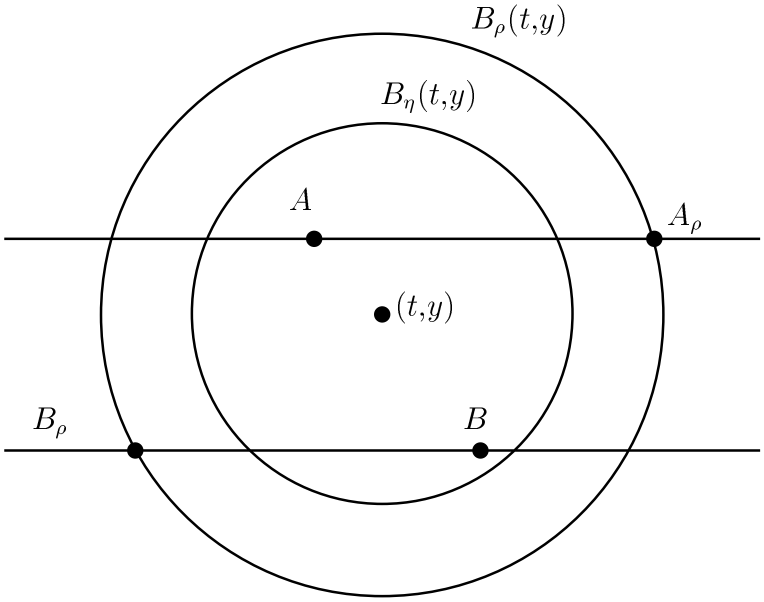


Fig. G.1 – L'argument de Lebesgue

Le Lemme précédent se reformule en le Théorème suivant.

Théorème G.4 (d'après Lebesgue [103, Théorème 10]) *Bandes Ω, Q; $\overline{Q} \subset \Omega$.*

a. Les fonctions $u \in \mathcal{M}(\Omega)$, dont l'intégrale de Dirichlet n'excède pas un réel fixé R ($\| \nabla u \|_{L_2(\Omega)} \leq R$), sont équi-uniformément continues sur $\overline{Q}$ (module $\omega_R \equiv \omega(\Omega,Q,R)$).

b. i. Celles, dont la norme $\| u \|_{H^1(\Omega)}$ toute entière n'excède pas R, sont en outre équibornées sur $\overline{Q}$, $\sup_{\overline{Q}} |u| \leq C_R$ ($C_R \equiv C(\Omega,Q,R)$),
ii. et on peut prendre $C_R \to 0$ avec R, à Ω et Q fixés.

Preuve a est contenu dans le Lemme G.3. b.i (ii) résulte, sachant a, du Lemme G.2.a (b) (immédiat par l'absurde).

□

Corollaire G.5 *Bande $\Omega \equiv I \times \mathbb{R}$. Pour toute $u \in \mathcal{M}(\Omega)$,*

a. u est (uniformément) continue, sur (toute bande Q telle que $\overline{Q} \subset$) Ω;

b. $\lim_{|y|\to+\infty} u(t,y) = 0$*, uniformément en* $t \in$ *tout segment* $\overline{J} \subset I$*.*

Preuve u étant fixée dans $\mathcal{M}(\Omega)$,

a. faire varier Q dans le Théorème G.4.a précédent;

b. $u \in L_2(Q)$, uniformément continue sur $\overline{Q} \equiv \overline{J} \times \mathbb{R}$. Le résultat est alors classique.

□

Corollaire G.6 *Bande* Ω*.*

a. Toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$*, de fonctions* $u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$*, admet une extraction convergeant* $H^1(\Omega)$*-faiblement / uniformément sur les compacts intérieurs à* Ω*.*

b. Toute convergence dans $H^1(\Omega)$*-faible, de fonctions* $u_n \in \mathcal{M}(\Omega)$*, est uniforme sur les compacts intérieurs à* Ω*.*

Preuve

a. u_n, bornée dans $H^1(\Omega)$, admet une extraction $u_{n'}$ convergeant dans $H^1(\Omega)$-faible (compacité faible des boules fermées de $H^1(\Omega)$) / $L_{2,loc}(\Omega)$ (Rellich-Kondrakov), vers une limite u. Puis, pour tout compact $K \subset$ une bande Q entièrement intérieure à Ω, $u_{n'}$ est équibornée, équi-(uniformément) continue sur $\overline{Q}$ (Théorème G.4.b.i), d'où extraction $u_{n''}$ uniformément convergente sur K (Arzela-Ascoli), vers une limite qui ne saurait être que $u_{(|K)}$ (unicité des limites dans $L_2(K)$). On conclut alors en faisant varier le compact $K \subset \Omega$, par extraction diagonale (loisible sur l'ouvert Euclidien, σ-compact, Ω).

b. En effet, (toute extraction de) u_n admet une extraction convergeant uniformément sur les compacts intérieurs à Ω (d'après Banach-Steinhaus et a), vers la limite $H^1(\Omega)$-faible (Rellich-Kondrakov et unicité des limites dans $L_{2,loc}(\Omega)$).

□

Enfin on note le résultat classique suivant (indépendant de la structure de bande plane de l'ouvert Euclidien Ω).

Lemme G.7 *Si* $u \in H^1(\Omega)$ *(ouvert Euclidien* Ω*), alors* $u^+ \in H^1(\Omega)$*,* $\| u^+ \|_{H^1(\Omega)} \leq \| u \|_{H^1(\Omega)}$*, avec égalité si et seulement si* $u \geq 0$*,* Ω*-p.p.*

Preuve (Par convergence dominée de $u^2/\sqrt{\varepsilon + u^2}$ vers $|u|$ quand $\varepsilon \to 0$, on montrerait classiquement, en intégrant par parties) $|u| \in H^1(\Omega)$,

$$\nabla |u| \; = \; \mathrm{sgn}(u) \; \nabla u \; ,$$

d'où $u^+ \in H^1(\Omega)$,

$$\nabla u^+ \; = \; \frac{1 + \mathrm{sgn}(u)}{2} \; \nabla u, \qquad \| \nabla u^+ \|_{L_2(\Omega)} \; \leq \; \| \nabla u \|_{L_2(\Omega)} \; .$$

Comme de plus $|u^+| \leq |u|$, on a donc bien

$$\| u^+ \|_{H^1(\Omega)} \; \leq \; \| u \|_{H^1(\Omega)} \; ,$$

l'égalité entraînant notamment $|u^+| = |u|$ (soit $u^+ = u$), Ω-p.p.

□

Annexe H

Mise en œuvre pratique de la calibration

Pour les résolutions numériques d'*edp* d'évaluation de *call* utilisées dans la calibration (Partie IV de cette thèse), on a utilisé le solveur SNOOΠ (Solveur Numérique Orienté Objet) de la CAR. Celui-ci a fait l'objet de plusieurs notes techniques, dont une documentation [55], un descriptif [25] et un *benchmark* numérique en précision (Partie III).

SNOOΠ permet de factoriser la discrétisation par différences finies de plusieurs équations paraboliques de même opérateur, quelles que soient leurs conditions limites ou aux bords, ou d'éventuels termes sources. SNOOΠ permet en outre de mettre en œuvre différents choix en termes de changement de variables, de localisation et type de maillage, et de schémas numériques. Reprenons les points qui concernent spécifiquement la calibration — renvoyant au livre de Morton-Mayers [112] ou à la Partie III de cette thèse sur un plan général.

H.1 Changement de variables logarithmique

On qualifie de *logarithmique* le changement de variables suivant :

$$\left\{ \begin{array}{c} y = \ln(S)\ ,\ \check{\Pi}(t,y) = \Pi(t,S)\ ,\ \check{\sigma}(t,y) = \sigma(t,S) \\ \partial_t \Pi = \partial_t \check{\Pi}\ ,\ S\partial_S \Pi = \partial_y \check{\Pi}\ ,\ S^2 \partial^2_{S^2} \Pi = \partial^2_{y^2} \check{\Pi} - \partial_y \check{\Pi}\ . \end{array} \right.$$

La dynamique (2.1) et l'équation de Black-Scholes (2.2) s'écrivent en variables logarithmiques:

$$dy_t \;=\; (r - q - \frac{\check{\sigma}^2}{2})\ dt + \check{\sigma}\ dW_t\ , \qquad y_0 \;:=\; y_{t_0} \;=\; \ln(S_0)\ ; \tag{H.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \check{\Pi} + (r - q - \frac{1}{2}\check{\sigma}^2)\partial_y \check{\Pi} + \frac{1}{2}\check{\sigma}^2 \partial^2_{y^2} \check{\Pi} = r\check{\Pi}\ , \quad t < T \\ \check{\Pi}(T,y) = (e^y - K)^+\ . \end{array} \right.$$

De même, l'équation de Dupire (3.5) devient après changement $k \equiv \ln(K)$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_T \check{\Pi}_{T,k} - (q - r - \frac{\check{\sigma}^2(T,k)}{2})\partial_k \check{\Pi}_{T,k} - \frac{\check{\sigma}^2(T,k)}{2}\partial^2_{k^2} \check{\Pi}_{T,k} + q\check{\Pi}_{T,k} & = & 0\ , \quad T > t_0 \\ \check{\Pi}_{t_0,k}(t_0,y_0) & = & (S_0 - e^k)^+\ . \end{array} \right.$$

On a ainsi éliminé les dégénérescences en $S = 0$ ou $K = 0$.

H.2 θ-schémas

SNOOΠ offre en outre le choix entre les différents θ-schémas par différences finies, notamment explicite de type arbres ($\theta = 0$), implicite ($\theta = 1$) ou de Crank-Nicholson ($\theta = \frac{1}{2}$) [1]. Pour les expériences numériques relatives à la calibration, on a utilisé le schéma de Crank-Nicholson. En effet, sa partie implicite garantit la stabilité, et assure une précision uniforme sur le maillage. Or nos calculs de dérivées variationnelles utilisent les valeurs courantes de la fonction de Green et des dérivés secondes en espace des prix de *call* en tout point du maillage. De plus, ce schéma est précis à l'ordre deux. Cette précision et la stabilité inconditionnelle permettent de prendre moins de pas en temps, sans préjudice de convergence ou de précision.

H.3 Localisation et maillage

Les choix du schéma numérique de Crank-Nicholson et du changement de variable logarithmique orientent à leur tour ceux du maillage et de la localisation. On choisit classiquement un maillage régulier en variables logarithmiques. De plus, on localise nos problèmes sur des domaines rectangulaires, d'amplitude en temps $\overline{T} - t_0$ ($\overline{T}$ plus grande échéance d'un *call* utilisé pour calibrer), et d'amplitude en espace basée sur les écarts de plus ou moins $4.5\sigma_0\sqrt{\overline{T} - t_0}$ du Brownien au bout d'un temps $\overline{T} - t_0$. Enfin, on choisit des conditions aux bords naturelles de Dirichlet, $\Pi \equiv \varphi$ (actualisé), sur les parties explicites des schémas, et Neumann, $\partial_n \Pi \equiv \varphi'$ (idem), sur les parties implicites.

1. Voir [112] ou §3.2, Partie III.

Table des figures

Liste des tableaux

Bibliographie

[1] L. ALZIARY DE ROQUEFORT. Jeux différentiels et approximation numérique de fonctions valeur. 1re partie : étude théorique, 2e partie : étude numérique. *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* 25::517-560,1991.

[2] L. ANDERSEN AND J. ANDREASEN. Jump-diffusion processes: volatility smile fitting and numerical methods for pricing, *Preprint*, May 1999.

[3] M. AVELLANEDA, C. FRIEDMAN, R. HOLMES AND D. SAMPERI. Calibrating volatility surfaces via relative-entropy minimization, *Applied Math. Finance*, 41, pp. 37–64, 1997.

[4] L. BACHELIER. Théorie de la spéculation, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, 17, pp. 21–86, 1900.

[5] I. BABUŠKA AND M. BIETERMAN. The finite element method for parabolic equations, I. A posteriori error estimation; II. Adaptative approach, *Numer. Math.*, 40, 1982.

[6] E. BAESEN, P. CAPRA, E. LELLOUCHE AND J. MARESCHAL. Modèles de taux et options exotiques, *Rapport de Groupe de Travail ENSAE troisième année*, 1997.

[7] M. BARDI AND S. BOTTACIN. Discontinuous solutions of degenerate elliptic boundary value problems, *Universita di Padova*, Preprint 22, 1995.

[8] M. BARDI, S. BOTTACIN, AND M. FALCONE. Convergence of Discrete Schemes for Discontinuous Value Functions of Pursuit-Evasion Games, *New Trends in Dynamic Games and Applications.* G. Olsder, ed., Birkhaüser, pp. 273–304, 1995.

[9] M. BARDI AND I. CAPUZZO-DOLCETTA. *Optimal Control and Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations.* Birkhaüser, 1997.

[10] M. BARDI, M. FALCONE AND P. SORAVIA. Fully discrete schemes for the value function of pursuit-evasion games, *Advances in Dynamic Games and Applications*, A. Haurie and T. Başar, eds., Birkhäuser, 1994.

[11] M. BARDI, M. FALCONE AND P. SORAVIA. Numerical methods for pursuit-evasion games via viscosity solutions, *Stochastic and Differential Games*, M. Bardi, T. Raghavan and T. Parthasarathy, eds, Birkhäuser, 1999.

[12] M. BARDI AND P. SORAVIA. Approximation of differential games of pursuit-evasion by discrete-time games, *Differential Games - Developments in modelling and computation (vol.156 of LNCIS)*, R.P. Hamalainen and H.K. Ethamo, eds, Springer, 1991.

[13] M. BARDI AND P. SORAVIA. A Comparison Result for Hamilton-Jacobi Equations and Applications to some Differential Games Lacking Controllability, *Funkcial. Ekvac.*, 37, pp. 19–43, 1994.

[14] G. BARLES. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, Springer-Verlag, 1994.

[15] G. Barles, C. Daher and M. Romano. Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in Finance Theory, *Math. Models Methodes App. Sci.*, 5, n^{o}1, pp. 125–143, 1995.

[16] G. Barles and B. Perthame. Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 21, pp. 557–579, 1987.

[17] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations, *Asymptotic Anal.*, (4), pp. 271–283, 1991.

[18] G. Barles, J. Burdeau, M. Romano and N. Samsœn, Critical stock price near expiration, *Ceremade n^o 9242*, 1992.

[19] J. Barraquand and T. Pudet. Pricing of American Path-Dependent Contingent Claims, *Mathematical Finance*, 6, n^{o}1, pp. 17–51, 1996.

[20] E.N. Barron. Differential Games with Maximum Cost, *Nonlinear Analysis*, Vol. 14, pp. 971–989, 1990.

[21] E.N. Barron and H. Ishii. The Bellman Equation for Minimizing the Maximum Cost, *Nonlinear Analysis T.M.A.*, Vol. 13, pp. 1067–1090, 1989.

[22] R. Bellman and S. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1962.

[23] M. Benchekroun. Techniques des EDP pour le calcul des prix des options exotiques, *Rapport de stage de DEA d'analyse numérique, Université Paris VI*, 1997.

[24] A. Bensoussan and J.L. Lions. *Application des Inéquations Variationnelles en Contrôle Stochastique*, Dunod, 1978.

[25] H. Berestycki. Méthodes numériques pour la résolution d'EDP, *Rapport interne CAR*, 1997.

[26] H. Berestycki, J. Busca and I. Florent. Note au CRAS à paraître.

[27] L. Berkovitz. *Optimal Control Theory*, Springer-Verlag, 1994.

[28] P. Bernhard. *Commande optimale, décentralisation et jeux dynamiques*, Dunod, 1976.

[29] P. Bernhard. *Contribution à l'étude des jeux différentiels à deux joueurs, somme nulle et information parfaite*, Thèse d'état, 1978.

[30] P. Bernhard. Differential games, closed-loop, *Encyclopedia of Systems and Control*, M. Singh, ed., pp. 1004–1008, Pergamon Press, 1987.

[31] P. Bernhard. Differential games lecture notes on the Isaacs-Breakwell theory, *Summer school on game theory, Cagliari*, 1993.

[32] P. Bernhard, S. Crepey and A. Rapaport. Comparison of two numerical approaches for barrier and value of a simple pursuit-evasion game. *8th International Symposium on Dynamic Games and Applications*, E. Altman and O. Pourtallier, org, Maastricht, the Netherlands, July 5–8, 1998.

[33] P. Bernhard, S. Crepey and A. Rapaport. Comparison of two numerical approaches for barrier and value of a simple pursuit-evasion game. Accepté à paraître *in Annals Intern. Soc. Dynamic Games*, E. Altman and B. Pourtallier, éditeurs, Birkhäuser, 1999.

[34] P. Billingsley. *Convergence of probability measures*, Wiley, 1968.

[35] A. Bizid. Les méthodes arborescentes, *Rapport interne CAR*, 1997.

[36] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities, *J. Pol. Econ.*, 81, pp. 637–653 1973.

[37] J. Bodurtha and M. Jermakyan. Nonparametric estimation of an implied volatility surface, *Journal of Computational Finance*, Vol. 2, No 4, pp. 29–60, 1999.

[38] R. Bonnerot and P. Jamet. A second-order finite element method for the one-dimensional Stefan problem, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 8, pp. 811–820, 1974.

[39] I. Bouchouev and V. Isakov. Uniqueness, stability and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets. *Inverse Problems*, 15 R45–R116, 1999.

[40] M.J. Brennan and E.S. Schwartz. The valuation of American put options, *J. of Fin.* Vol XXXII, No 2, 1977.

[41] H. Brezis. Analyse fonctionnelle: théorie et application, Coll. *Math. Appl. pour la maîtrise*, Masson, Paris, 1983.

[42] H. Brezis. *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, North-Holland, 1973.

[43] J. Busca. A finite elements method for the valuation of American Options, En préparation, 1998.

[44] L. Caffarelli and X. Cabré. Fully Non Linear Elliptic Equations, *A.M.S. Colloquium publications*, V. 43, Providence, 1995.

[45] L. Caffarelli, M.G. Crandall, M. Kocan and A. Swiech. On viscosity solutions of fully Non Linear equations with measurable ingredients, *CPAM*, XLIX, pp. 365–397, 1996.

[46] C. Carathéodory. *Calculus of variations and first order PDE*, Second Edition, Chelsea, New York, 1982.

[47] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre. Some algorithms for a game with two players and one target, *Mathematical Modeling and Numerical Analysis*, 28, pp. 441–461, 1994.

[48] P. Cardaliaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre. Numerical methods for optimal control and differential games, *Technical Report 9510*, Ceremade, 1995.

[49] P. Cardialaguet, M. Quincampoix and P. Saint-Pierre. Set-valued numerical analysis for optimal control and differential games, *Stochastic and Differential Games*, M. Bardi, T. Raghavan and T. Parthasarathy, eds, Birkhäuser, 1999.

[50] P. Carr and K. Ellis. Non-standard valuation of barrier options, *Preprint*, 1994.

[51] A. Chambolle and P.-L. Lions. Image recovery via total variation minimization and related problems, *Rapport de recherche du Ceremade 9509*, 1995.

[52] F.H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, 1983.

[53] F.H. Clarke, R.J. Stern and P.R. Wolenski. Proximal smoothness and the lower-$\mathcal{C}^2$ property, *Journal of Convex Analysis*, 2 (1/2), pp. 117–144, 1995.

[54] R. Cont et S. Denise, eds. Compte-Rendus de la Journée sur les Équations aux Dérivées Partielles en Finance, Vol. I: Méthodes numériques pour les *edp* d'évaluation et II: Méthodes numériques pour la calibration. Polycopiés de l'Association Frontières en Finance, Paris, 29 septembre 2000.

[55] P. Conze and E. Fournié. Documentation du SNOOΠ — Solveur Numérique Orienté Objet de systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires, *Rapport interne CAR*, 1996.

[56] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics, vol.II, Partial Differential Equations*, Wiley Classics Edition, 1989.

[57] J.C. Cox, S.A. Ross and M. Rubinstein. Option pricing : a simplified approach, *J. Fin. Econ.*, 7, pp. 229–263, 1979.

[58] M.G. Crandall, P. Fok, M. Kocan and A. Świech. Remarks on nonlinear uniformly parabolic equations, *Indiana Univ. Math. J.*, 47, pp. 1293–1326, 1998.

[59] M. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1992.

[60] M.G. Crandall, M. Kocan and A. Świech. L^p-theory for fully nonlinear parabolic equations, *Preprint.*

[61] M.G. Crandall, M. Kocan, P.L. Lions and A. Świech. Existence results for boundary problems for uniformly elliptic and parabolic fully nonlinear equations, EJDE–1999/24.

[62] M. Crandall and P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277, pp. 1–42, 1983.

[63] J. Crank. *Free and Moving Boundary Problems*, Clarendon Press, Oxford, 1982.

[64] S. Crepey. *Méthodes numériques pour des* edp *de la finance*, Rapport final de la convention de recherche INRIA/CAR n^{o}197E685, Juin 1999.

[65] Delfour. Shape Analysis via Oriented Distance Functions, *J. of Functional Analysis*, 123, pp. 129–201, 1994.

[66] E. Derman and I. Kani. Riding on a smile, *Risk*, 1994.

[67] B. Dumas, J. Fleming and R. Whaley. Implied volatility functions : empirical tests, *J. of Finance*, 53, 2059, 1998.

[68] B. Dupire. Pricing with a smile, *Risk*, 1994.

[69] N. El Karoui. *Cours polycopié de DEA Probabilités Finance Paris VI*, 1997.

[70] N. El Karoui, S. Peng and M.C. Quenez. Backward stochastic differential equations in finance, *Math. Finance*, 7, pp. 1–71, 1997.

[71] J. Elliott and N. Kalton. The existence of value in differential games, *Mem. Amer. Math. Soc.*, 126, 1972.

[72] L. Evans and P. Souganidis. Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 33, pp. 773–797, 1984.

[73] E. Fabes. Singular integrals and partial differential equations of parabolic type, *Studia Math.*, XXVIII, pp. 6–131, 1966.

[74] E. Fabes and N.M. Rivière. System of parabolic equations with uniformly continuous coefficients, *Jour. Analyse Math.*, XVII, pp. 305–335, 1966.

[75] J. Filar and T. Raghavan. Algorithms for Stochastic Games — A Survey, *Math. Methods Oper. Res.*, pp. 437–472, 1991.

[76] A.F. Filippov. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Side*, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[77] W. Fleming and H. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, Springer-Verlag, 1992.

[78] E. Fournié, J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions and N. Touzi. An application of Malliavin calculus to Monte-Carlo methods in finance, *En préparation*, 1997.

[79] E. Fournié, J.-M. Lasry and P.-L. Lions. Some nonlinear methods for far-from-the-money contingent claims, *Numerical methods in Finance*, Cambridge University Press, 1997.

[80] E. Fournié, J.-M. Lasry and N. Touzi. Monte-Carlo methods for stochastic volatility models, *Numerical methods in Finance*, Cambridge University Press, 1997.

[81] A. Friedman. *Stochastic Differential Equations and Applications, Volume 1*, Academic Press, New-York, 1975.

[82] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice Hall, 1964.

[83] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game theory.* MIT Press, 1991.

[84] H. Geman and M. Yor. Bessel process, Asian options and perpetuities, *Preprint*, 1992.

[85] J. Hull. *Options, futures and other derivative securities*, (deuxième édition), Prentice Hall International Editions, 1993.

[86] J. Hull and A. White. The pricing of options on assets with stochastic volatility, *J. Fin.*, 42, pp. 281–300, 1987.

[87] R. Isaacs. *Differential Games,* Wiley, New York, 1965.

[88] H. Ishii. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Mathematical Journal*, 55 (2), pp. 369–384, 1987.

[89] H. Ishii and P.L. Lions. Viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic partial differential equations. *J. Differential Equations*, 83, pp. 26–78, 1990.

[90] N. Jackson and E. Süli. Computation of Deterministic volatility surfaces, *Preprint*, 1998.

[91] P. Jaillet, D. Lamberton and B. Lapeyre. Variational Inequalities and the Pricing of American Options, *Acta Applicandae Mathematicae 21*, pp. 263–289, 1990.

[92] I. Karatzas and S. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag, 1988.

[93] N. Krasovskii and A.I. Subbotin. *Game-Theoretical Control Problems*, Springer-Verlag, 1988.

[94] N.V. Krylov. *Controlled Diffusion Processes*, Springer Verlag, Berlin, 1980.

[95] H. Kushner. *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*, Academic Press 1977.

[96] H. Kushner. *Weak convergence methods and singularly perturbed stochastic control and filtering problems*, vol. 3 of Systems and Control, Birkhaüser, Boston, 1990.

[97] H. Kushner and B. Dupuis. *Numerical methods for stochastic control problems in continuous time*, Springer, 1992.

[98] O. Ladyzhenskaya, V. Solonnikov and N. Ural'tseva. *Équations paraboliques linéaires et quasilinéaires*, Moscou, 1967.

[99] R. Lagnado and S. Osher. A Technique for Calibrating Derivative Security Pricing Models : Numerical Solution of an Inverse Problem, *J. Fin. Eng.*, 1 (1), pp. 13–25, 1997.

[100] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2^{nd} Éd., Ellipses, 1997.

[101] B. Lapeyre, E. Pardoux and R. Sentis. Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion, *Math. & Applic.*, No 29, SMAI, Springer Verlag.

[102] B. Larrouturou and P.L. Lions. *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur: Optimisation et Analyse Numérique*, École Polytechnique, Édition 1994.

[103] H. Lebesgue. Sur le problème de Dirichlet, Rendiconti circ. Mat. Palermo, 1907.

[104] J. Lewin. *Differential games*, Springer-Verlag, 1994.

[105] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 1968.

[106] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, vol. 1, Dunod, Paris, 1968.

[107] P.-L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Pitman, 1982.

[108] P.-L. LIONS. Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part II: viscosity solutions and uniqueness, *CDPE*, 8 (11), pp. 1229–1276, 1983.

[109] P.-L LIONS AND B. MERCIER. Approximation numérique des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman, *RAIRO Analyse numérique/Numerical Analysis*, vol. 14, num 4, pp. 369–393, 1980.

[110] J.-F. MASLE. Problèmes qualitatif et quantitatif liés en jeux différentiels. Thèse de docteur ingénieur, Université Paris 9, 1976.

[111] R.C. MERTON. The theory of rational option pricing, *Bell J. Econ. Man. Sc.*, 4, pp. 141–183, 1973.

[112] K. MORTON AND D. MAYERS. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, 1994.

[113] J. VON NEUMANN AND O. MORGENSTERN. *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.

[114] L. PONTRIAGUINE. *Théorie mathématique des processus optimaux*, Editions MIR, 1974.

[115] O. POURTALLIER AND M. TIDBALL. Approximation of the value function for a class of differential games with target, *R.R. INRIA 2942*, 1996.

[116] A. RAPAPORT. Contribution à la théorie des jeux différentiels à deux joueurs et somme nulle avec différentes structures d'information. *Thèse de l'École des Mines de Paris*, 1994.

[117] A. RAPAPORT. A characterization of barriers of differential games, *Journal of Optimization, Theory and Applications*, 97(1), pp. 151–180, 1998.

[118] R. REBONATO. *Volatility and Correlation in the Pricing of Equity, FX and Inerest-Rate Options*, Wiley, 1999.

[119] P. RITCHKEN. On Pricing Barrier Options, *J. of Derivatives*, 1995.

[120] L. ROGERS AND Z. SHI. The value of an Asian option, *J. Appl. Probab.*, 32 (4), pp. 1077–1088, 1995.

[121] E. ROXIN. Axiomatic Approach in Differential Games, *J. Optim. Theory Appl.*, 3, pp. 153–163, 1969.

[122] M. RUBINSTEIN, Implied binomial trees, *The Journal of Finance*, 69 (3), pp. 771–818, 1994.

[123] W. RUDIN. *Analyse réelle et complexe*, Masson, 1992.

[124] L. SCHWARTZ. *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[125] P. SORAVIA. Estimates of Convergence of Fully Discrete Schemes for the Isaacs Equation of Pursuit-Evasion Differential Games via Maximum Principle, *SIAM J. Control Optim.*, 36 (1), pp. 1–11, 1998.

[126] D.W. STROOCK AND S.R.S. VARADHAN. *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[127] D.W. STROOK AND S.R.S. VARADHAN. Diffusion processes with continuous coefficients, I, II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 22, pp. 345–400; 479–530, 1969.

[128] A.I. SUBBOTIN. *Generalized Solutions of First-Order PDEs, the Dynamical Optimization Perspective*, Birkhaüser, 1995.

[129] A.I. SUBBOTIN. Constructive theory of positional differntial games and generalized solutions to Hamilton-Jacobi equations. *Stochastic and Differential Games*, M. Bardi, T. Raghavan and T. Parthasarathy, eds, Birkhäuser, 1999.

[130] A. TARASYEV. Approximation schemes for constructing minimax solutions of Hamilton-Jacobi equations, *J. Appl. Maths Mechs.*, 58 (2), pp. 207–221, 1994.

[131] V. Thomée. *Galerkin finite element methods for Parabolic Problems*, Springer, 1997.

[132] M. Tikhonov. Regularization of incorrectly posed problems. *Soviet Mathematics*, 4, pp. 1624–1627, 1963.

[133] P. Varaiya. On the existence of solutions to a differential game, *SIAM J. Control Optim.*, 5 (1), pp. 153–162, 1967.

[134] P. Varaiya and J. Lin. Existence of saddle points in differential games, *SIAM. J. Control*, 7, 1967.

[135] L. Wang. On the regularity theory of Fully Non Linear Parabolic Equations. *I, CPAM XLV*, pp. 27–76, 1992.

[136] R. Zvan, P.A. Forsyth and K.R. Vetzal. Robust numerical methods for PDE models of Asian options, *J. Comp. Finance*, 1(2), Winter 1997/98.

Index

Résumé

Cette thèse présente une combinaison de techniques d'équations aux dérivées partielles et de probabilités, au service de divers problèmes de Mathématiques Appliquées. Des méthodes de régularisation permettent d'aborder ces problèmes au plan numérique.

La première partie, "Jeux Différentiels", a pour objet la détermination, numérique notamment, des barrières (discontinuités) des jeux de poursuite évasion, *via* l'introduction de jeux auxiliaires en distance minimum. On propose un schéma numérique sur maillage destructuré pour les solutions de tels jeux. L'approche numérique est ensuite validée sur un jeu résolu analytiquement. On établit enfin un résultat de convergence par des méthodes probabilistes 'à la Kushner' pour des problèmes de jeux différentiels.

La deuxième partie, "Mathématiques Financières", traite de méthodes numériques par équations aux dérivées partielles en finance — méthodes directes, dont l'étude de conditions aux bords transparentes ou d'un *put* américain sur moyenne arithmétique, et inverses, avec l'étude d'un problème de calibration de la dynamique d'un sous-jacent à partir des prix des produits dérivés observés sur les marchés. Si le problème de calibration pure est sous-déterminé, il devient en revanche bien posé par régularisation harmonique, dans une approche de type Tikhonov, comme il découle de propriétés qualitatives des prix de *call* et de bornes quant à leurs sensibilités dans un modèle de Black-Scholes à volatilité locale.

Mots-Clefs : Jeu différentiel, (in-)équation d'Isaacs, barrière, solution de viscosité, schéma numérique, maillage destructuré, chaîne de Markov, servomécanisme.

Option à barrière, *put* asiatique, différences et éléments finis, équations de Black-Scholes et Dupire, calibration, problème inverse, solution forte, estimations a priori, fonction de Green, analyse de perturbations.

Abstract

This PhD Dissertation presents a combination of techniques of partial differential equations and probabilities, to the benefit of various problems in Applied Mathematics. Regularization methods allow to tackle these problems from the numerical viewpoint.

The first part, "Differential Games", deals with the determination, numerical especially, of the barriers (discontinuities) of pursuit evasion games, through the introduction of auxiliar games in minimum distance. One proposes a numerical scheme on unstructured mesh for the solution of such games. Afterwards the numerical approach is validated on an analytically resolved game. Lastly a convergence result using probabilistic tools in the Kushner way is established for differential games.

The second part, "Mathematical Finance", is about numerical methods by partial differential equations in Finance — direct methods, among which, the study of transparent boundary conditions or of an american *put* on arithmetical average, and inverse ones, with the study of a problem of calibration of the dynamics of an underlying asset, on the prices of the derivatives observed on the markets. Whereas the pure calibration problem is under-determined, it becomes on the other hand well-posed through harmonic regularization, following a seminal approach of Tikhonov, as it follows from qualitative properties of the *call* prices and from bounds as for their sensitivities in a Black-Scholes model with local volatility.

Keywords : Differential game, Isaacs (in-)equation, barrier, viscosity solution, numerical scheme, unstructured mesh, Markov chain, servomecanism.

Barrier option, Asian *put*, finite differences and elements, Black-Scholes and Dupire equations, calibration, inverse problem, strong solution, a priori estimates, Green funtion, perturbation analysis.