Présentation du cours “Analyse stochastique”’, par Shiqi Song

1 Un mot sur l’origine du cours

La formule de Black-Scholes s’écrit en terme du mouvement Brownien (cf. le livre de Karatzas-Shreve ou Revuz-Yor), alors que le FTAP (the fundamental theorem of asset pricing of Delbaen-Schachermayer) a été établi à la base de la théorie générale des processus (de Dellacherie-Meyer, un sujet bien plus vaste que le mouvement brownien). Du coup l’enseignement des mathématiques financières est largement limité au cas du mouvement Brownien. Ceci est dommageable pour les étudiants, car ils sont ainsi privés d’une vision plus intrinsèque et d’une méthodologie plus puissante dans le traitement mathématique des marchés financies. D’où l’idée de ce cours sur le modèle exponentiel de Lévy.

Il est bien connu que le mouvement Browien est trop simple pour reproduire les mouvements erratiques du marché financier. Il est donc important de pouvoir sortir du cadre gaussien de Black-Scholes. Le modéle exponentiel de Lévy, né dans les années 90, est une des extensions les plus naturelles du modèle de Black-Scholes.

Concernant le choix du modèle exponentiel de Lévy pour notre cours, celui-ci est surtout une plate-forme idéale pour initier les étudiants en mathématique financière au calcul des semimartingales. Le modéle exponentiel de Lévy est suffisamment complexe pour invoquer, dans son étude, pratiquement tous les aspects du calcul des semimartingales. En même temps, parmis tous les modèles qui appellent au calcul des semimartingales, le modèle exponentiel de Lévy reste un des plus simples, ce qui permet aux étudiants d’entrer vite dans le sujet, sans avoir toutes les difficultés techniques. Ce modèle est idéal aussi parce qu’il fournit, pour l’étude du calcul des semimartingales, un cadre concret et motivant, compatible avec un parcours d’ingénierie financiére, alors qu’un cours de calcul des semimartingale seul ne saurait être cohérent avec un tel parcours.

2 Le modèle exponentiel de Lévy

Le modèle exponentiel de Lévy est un modèle mathématique des processus de prix dans un marché financier. Le modèle est introduit dans le but d’étudier les problématiques fondamentales de pricing, couverture, calibration, implementation numérique, etc.. Cette étude est rendue possible par le fait que la structure probabiliste du modèle, concernant la loi, la filtration, l’arbitrage, la mesure de saut, la representation des martingales, etc., est parfaitement connue. Notons que le mouvement Brownien est un processus de Lévy (le seul processus de Lévy qui soit homogène et continu). Le modèle exponentiel de Lévy est donc une extension directe du modèle de Black-Scholes, obtenue en remplaçant le mouvement Brownien par un processus de Lévy plus général. Les motivations et les avantages du modèle exponentiel de Lévy en général par rapport au modèle de Black-Scholes sont bien expliqués dans la littérature.

La meilleure référence sur le sujet est sans doute le livre de Cont-Tankov de quelques 500 pages. Mais, il existe de nombreux textes introductifs, plus accessibles sur le sujet, écrits par, par exemple, Eberlain, Kyprianou, Papapantoleon, Tankov, etc.. Il existe surtout un certain nombre d’articles de recherche originaux.

3 Un aperçu du calcul des semimartingales et des processus de Lévy

La liste des notions du calcul des semimartingales à connaître pour comprendre pleinement le modèle exponentiel de Lévy est assez longue :

1. Les notions liées à la filtration, notamment les processus prévisibles ou optionnels
2. La projection prévisible et la projection duale prévisible
3. Les martingales : bornées, de carré intégrables, uniformément intégrables, locales.
4. Les inégalités des martingales, et les espaces de martingales
5. Les semimartingale et leurs décompositions diverses
6. L'intégrale stochastique par rapport aux semimartingales (de dimension quelconque), et la formule d'Ito
7. Les mesures aléatoires à valeurs entières. Le processus ponctuel de Poisson
8. L'intégrale stochastique par rapport à une mesure aléatoire et la formule d'Ito correspondante
9. Les caractéristiques locale d'une semimartingale (le triplet) et la représentation intégrale d'une semimartingale
10. Les équations différentielles stochastiques
11. Les changements des probabilités et les formules de Girsanov
12. La représentation prévisible des martingales

Dans notre cours, le calcul des semimartingales est appliqué pour obtenir les propriétés fondamentales des processus de Lévy. Ce sont notamment

1. La caractérisation du processus de Lévy par sa caractéristique locale (le triplet).
2. La mesure des sauts, le processus ponctuel de Poisson associé, et la mesure de Lévy
3. La formule de Lévy-Khintchine
4. Les propriétés trajectorielles
5. La représentation prévisible des martingales de la filtration de Lévy
6. Les changements de mesure préservant la propriété de Lévy, la transformation d'Esscher
7. Les propriétés relatives à l'arbitrage

4 Déroulement du cours

La pédagogie du cours est la suivante :

1. Eléments de base concernant le calcul des semimartingales, c'est-à-dire les notions et les définitions, les propriétés fondamentales, les modèles ou les exemples les plus importants, les références classiques, les applications essentielles. (Les preuves ne sont pas présentées dans cette première approche du sujet.)

2. Eléments de base concernant les processus de Lévy, incluant une compréhension des idées essentielles des preuves des résultats les plus importants comme la formule de Lévy Khintchine, la transformation d'Esscher , etc..

3. Eléments de base concernant le modèle exponentiel de Lévy.

4. Le nombre d'heures du cours ne permet pas une présentation linéaire de l'ensemble des connaissances ci-dessus. Ainsi ces éléments correspondent à une liste de lectures que les étudiants doivent largement faire par eux-mêmes, suivant les exemples et une méthodologie données en cours.

5. Les aspects fondamentaux du modèle exponentiel de Lévy sont ensuite classés en qutre catégories : pricing, couverture, calibration, implementation numérique, et chaque étudiant est invité à se spécialiser dans un de ces aspects fondamentaux. Des sujets sont explicitement formulés en cours et des documents sont donnés sur chaque sujet. Chaque étudiant doit choisir un des sujets et en faire une étude théorique avec les documents correspondants. (Il s'agit d'études théoriques, même dans le cas des méthodes numériques.)

6. A la sortie du cours, un étudiant doit être capable de pouvoir lire tout article mathématique relatif au modèle exponentiel de Lévy, saisir les idées essentielles du papier, et comprendre les fondements des preuves. L'étudiant doit, en particulier, avoir une compréhension avancée sur le sujet de spécialisation qu'il a choisi.

7. A travers ce cours, chaque étudiant renforcera sa capacité d'autonomie pour aborder tout travail de modélisation mathématique dans le futur.

5 Evaluation

Des question-tests (courtes et notées) seront posées réguliérement aux étudiants pour vérifier si les lectures sont effectives. Un examen général sera organisé vers la fin du cours sur l'ensemble des connaissances et leur applications au modèle exponentiel de Lévy.

En parallèle au contrôle des connaissances générales, chaque étudiant doit écrire un rapport sur son sujet de spécialisation. Il y a des règles qui encadrent les rapports, que ce soit sur le contenu ou sur sa forme. La modalité précise des rapports est donnée en cours.