

---

Mémoire présenté pour l'obtention du

**Diplôme d'habilitation à diriger les recherches**

Discipline : Mathématiques

par

**Christophe Profeta**

---

**Contribution à l'étude asymptotique des temps de  
passage pour certains processus autosimilaires**

---

**Composition du jury**

*Rapporteurs :*

Loïc Chaumont	Professeur, Université d'Angers
Samuel Herrmann	Professeur, Université de Bourgogne
Aimé Lachal	Maître de conférences, INSA de Lyon

*Examineurs :*

Arnaud Gloter	Professeur, Université d'Évry Val d'Essonne
Monique Jeanblanc	Professeur émérite, Université d'Évry Val d'Essonne
Thomas Simon	Professeur, Université de Lille



# Remerciements

Après une dizaine d'années dans le monde de la recherche, rédiger un mémoire d'HDR était une bonne occasion pour prendre un peu de recul sur le chemin parcouru. Un des principaux challenges fût de trouver un fil conducteur afin de rendre l'ensemble, sinon agréable à lire, au moins compréhensible.

En ce sens, mes premiers remerciements s'adressent naturellement à mes trois rapporteurs. J'ai rencontré pour la première fois Loïc Chaumont à l'aéroport d'Osaka, alors que nous nous rendions à un colloque en l'honneur de Marc Yor. Ayant évidemment lu plusieurs de ses travaux sur les processus de Lévy, j'ai donc été ravi qu'il accepte de rapporter ce manuscrit dans lequel (une famille de) ceux-ci sont très présents.

Le lecteur averti se rendra peut-être compte que beaucoup des résultats présentés ici sont inspirés, de près ou de loin, des travaux d'Aimé Lachal sur l'intégrale du mouvement brownien. Etant très admiratif de tous les résultats qu'il a réussi à obtenir pour ce processus, j'ai donc été très flatté d'avoir pu soumettre ce manuscrit à son expertise.

J'attribue en grande partie mon choix de m'orienter vers le monde de la recherche (ou à tout le moins de faire un doctorat) au cours de Samuel Herrmann, que j'ai suivi il y a bientôt 15 ans, sur les martingales et les chaînes de Markov. Ces termes apparaîtront d'ailleurs à de multiples reprises dans les pages qui suivent. Je suis donc heureux qu'il ait accepté de rapporter ce manuscrit, et que la "boucle soit ainsi bouclée".

Il convient également de remercier mes trois examinateurs, qui sont tous liés d'une manière ou d'une autre au laboratoire de mathématiques d'Evry. En effet, la plupart des résultats sur les processus stables présentés ici ont été écrits en collaboration avec Thomas Simon. J'ai beaucoup apprécié nos travaux communs, et j'espère évidemment que d'autres suivront bientôt. Je suis également ravi qu'Arnaud Gloter, notre (ex-)chef malgré lui, et Monique Jeanblanc, l'icône des mathématiques financières évyennes, aient accepté de faire partie du jury.

Ces remerciements ne sauraient être complets sans une pensée pour Jean-Marie Bernard qui m'a pris sous son aile dès mon arrivée à l'IUT d'Evry. Ce fût un plaisir de travailler ensemble et de partager de bons moments entre les cours. J'en profite également pour saluer Abass et Diego, mes deux co-bureaux du LaMME, ainsi que Valérie, notre secrétaire toujours présente au moindre souci, et tous les autres membres du labo avec lesquels nous avons partagé repas, cafés, et autres discussions...

Et pour finir, une dernière pensée, mais non des moindres, pour ma Lili, ainsi que le petit nouveau, arrivé récemment, et qui aura fait tout son possible pour retarder l'écriture de ce manuscrit...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>iv</b>
<b>I Persistance et applications</b>	<b>1</b>
I.1 Intégrale d'un processus de Lévy stable . . . . .	3
I.1.1 Calcul de l'exposant de persistance . . . . .	4
I.1.2 Quelques applications . . . . .	6
I.2 Fonctionnelles additives homogènes d'un processus de Bessel biaisé . . . . .	11
I.2.1 Calcul de l'exposant de persistance . . . . .	12
I.2.2 Temps de sortie d'un intervalle . . . . .	14
<b>II Pénalisations</b>	<b>17</b>
II.1 Diffusions linéaires récurrentes . . . . .	18
II.1.1 Le cas récurrent nul . . . . .	19
II.1.2 Le cas récurrent positif . . . . .	21
II.2 Etude sous différentes horloges . . . . .	22
II.2.1 Pénalisations par le temps local . . . . .	23
II.2.2 Comparaison entre les mesures pénalisées . . . . .	25
II.3 L'intégrale du mouvement brownien . . . . .	26
II.3.1 Pénalisation par des analogues du temps local . . . . .	26
II.3.2 Pénalisation par le dernier temps de passage au niveau zéro . . . . .	28
<b>III Valeurs extrêmes</b>	<b>29</b>
III.1 Estimées de Cramér . . . . .	30
III.1.1 Processus de Lévy stables . . . . .	30
III.1.2 Cas particuliers . . . . .	32
III.1.3 Processus de Riemann-Liouville . . . . .	33
III.2 Produits de processus stables . . . . .	35
III.2.1 Asymptotiques du suprémum . . . . .	35
III.2.2 Petite digression sur les temps de séjour . . . . .	37
<b>IV Quelques résultats non asymptotiques</b>	<b>43</b>
IV.1 Temps d'entrée et de sortie d'un intervalle pour un processus de Lévy stable	43
IV.1.1 Mesures harmoniques . . . . .	44
IV.1.2 Noyaux de Green . . . . .	45
IV.2 Derniers temps de passage pour une diffusion linéaire . . . . .	47
IV.2.1 Une formule générale . . . . .	47
IV.2.2 Vers une équation intégrale . . . . .	48
IV.2.3 La méthode des images . . . . .	49
IV.3 Temps d'atteinte et perpétuités . . . . .	50
<b>Publications présentées dans ce manuscrit</b>	<b>53</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>53</b>

## Introduction

Ce manuscrit a pour objet de proposer une synthèse des principaux résultats que j'ai pu obtenir depuis mon arrivée à l'Université d'Evry Val d'Essonne.

La majorité des travaux que nous allons présenter tournent autour des problèmes de temps de passage pour des processus stochastiques. A quelques exceptions près, le fil conducteur de tous ces travaux était d'essayer de généraliser des résultats déjà connus pour le mouvement brownien à d'autres familles de processus. Ainsi, les familles que nous considérons conservent en général deux propriétés fondamentales du mouvement brownien : la propriété de Markov (ou plus généralement d'accroissements indépendants) et la propriété d'autosimilarité.

Nous avons choisi un découpage en quatre chapitres, en regroupant dans chacun des résultats issus de trois ou quatre publications.

### Chapitre I

Le chapitre I concerne l'étude de problèmes de persistance, c'est-à-dire l'étude de la probabilité qu'un processus  $X$  "persiste" à rester sous un seuil donné  $b$  pendant une longue période de temps :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{s \leq t} X_s \leq b \right), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Ce type de problème connaît un regain d'intérêt depuis quelques années, en particulier dans la littérature physique où la vitesse de décroissance a pu être calculée numériquement lors de différentes expériences. Lorsque le processus  $X$  est Markovien (typiquement une diffusion linéaire ou un processus de Lévy), on arrive en général assez bien à estimer ces probabilités, mais le problème se complique comme souvent dès que l'on sort de ce cadre.

Nos travaux ici ont porté sur l'étude de la probabilité de persistance pour des intégrales de processus de Lévy stables ainsi que de processus de Bessel biaisés. Ces processus intégrés ne sont pas en soi Markoviens, mais le couple (intégrale + intégrant) le devient. Nous proposons également plusieurs applications de nos calculs à différents problèmes liés : étude des enroulements autour de l'origine, des temps de passage successifs, du temps de sortie d'un intervalle, ...

### Chapitre II

Le deuxième chapitre rassemble différents résultats autour des pénalisations, qui sont pour la plupart une continuation des travaux de ma thèse. Le principe de la pénalisation est d'essayer de modifier, grâce à un théorème limite, certaines propriétés importantes des trajectoires d'un processus tout en en conservant d'autres. Cela revient en quelque sorte à effectuer un conditionnement par un événement de probabilité nulle (ou par une variable aléatoire presque sûrement infinie).

Nous commençons dans ce chapitre par présenter quelques résultats de pénalisations pour des diffusions linéaires, en insistant sur la distinction que nous avons observée entre le comportement des diffusions récurrentes nulles, et celles récurrentes positives.

Nous poursuivons ensuite par une étude des pénalisations via différentes horloges sous-jacentes, c'est-à-dire lorsque l'on remplace le temps déterministe par une suite croissante de temps d'arrêt. L'introduction d'un aléa supplémentaire nous permet d'obtenir des résultats universels, qui permettent d'englober les deux cas récurrents nuls et récurrents positifs, et de nous affranchir par ailleurs d'un certain nombre d'hypothèses restrictives. Enfin, nous étudions quelques pénalisations de l'intégrale du mouvement brownien, faisant ainsi écho au chapitre I dont nous réutilisons certains résultats.

### Chapitre III

Le troisième chapitre propose une étude des valeurs extrêmes d'un processus  $X$  sur un intervalle  $I$ , à savoir

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in I} X_t \geq x \right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Outre son intérêt mathématique, ce type de problème est souvent lié dans la littérature à la théorie de la ruine pour des compagnies d'assurance. Nous avons étudié cette question pour différents exemples de processus  $X$ . Les premiers sont les processus de Lévy stables assortis d'une dérive puissance. Certains cas particuliers avaient déjà été traités dans la littérature, et nous avons obtenu un résultat permettant d'unifier tous les cas. Nous nous sommes également intéressés aux processus de Riemann-Liouville stables, qui sont des processus non-Markoviens, et pour lesquels nos estimées sont en conséquence moins précises.

Dans un deuxième temps, nous avons regardé le cas d'un produit de processus symétriques stables. Ce problème n'avait apparemment jamais été traité dans la littérature, et se révèle assez complexe lorsque l'on veut regarder des estimées de la queue basse, c'est-à-dire

$$\mathbb{P} \left( \sup_{t \in I} X_t \leq \varepsilon \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Par scaling, cette question se ramène à un problème de persistance, mais notre approche étant très différente du chapitre I, nous avons choisi de la placer ici. Nous concluons ce chapitre par une petite digression sur les temps de séjour d'un produit de processus symétriques stables, en proposant un résultat général de convergence des temps de séjour positifs, avant de nous concentrer plus en détails sur le cas d'un produit de deux mouvements browniens.

### Chapitre IV

Enfin, dans un dernier chapitre, nous présentons quelques résultats non asymptotiques autour des premiers et derniers temps de passage. Le premier concerne l'étude de la mesure harmonique d'un intervalle et de son complémentaire pour les processus de Lévy stables, pour lesquels nous arrivons à traiter tous les cas de figure à l'aide de différentes identités entre fonctions hypergéométriques. Notre méthode nous permet alors d'obtenir de façon similaire la densité des fonctions de Green pour ces mêmes intervalles.

Nous proposons ensuite plusieurs résultats sur les derniers temps d'atteinte d'une barrière non constante par des diffusions linéaires. Les différentes approches sont à chaque fois illustrées par un exemple sur les processus de Bessel avec dérive. Enfin, la dernière partie, plus anecdotique, fournit une identité en loi entre une perpétuité de type Dufresne et les temps d'atteinte d'un processus de Bessel de dimension 3 avec dérive.



# Chapitre I

## Persistance et applications

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats issus des publications :

- [6] C. Profeta and T. Simon. Persistence of integrated stable processes. *Probab. Theory Relat. Fields* **162** (3), 463-485, 2015.
- [7] C. Profeta and T. Simon. Windings of the stable Kolmogorov process. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **12** (1), 115-127, 2015.
- [12] J.-F. Jabir and C. Profeta. A stable Langevin model with diffusive-reflective boundary conditions. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. **129**(11), 4269-4293, 2019.
- [14] C. Profeta. Persistence and exit times for some additive functionals of skew Bessel processes. *J. Theoret. Probab.*, <https://doi.org/10.1007/s10959-019-00966-1>, 2019.

Soit  $(X_t, t \geq 0)$  un processus à valeurs réelles partant de 0, et soit  $T_b = \inf\{t > 0, X_t \geq b\}$  le premier instant où  $X$  dépasse le niveau  $b > 0$ . L'étude de la loi de  $T_b$  est un problème classique de théorie des probabilités, pour lequel il est généralement difficile d'obtenir une expression explicite. Néanmoins, on peut observer que dans de nombreuses situations, notamment lorsque le processus est autosimilaire, la décroissance de la fonction de survie de  $T_b$  est polynomiale :

$$\mathbb{P}(T_b > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} t^{-\theta+o(1)} \tag{I.1}$$

où  $\theta$  est une constante appelée exposant de persistance, et qui généralement ne dépend pas de  $b$ . Le calcul de ces exposants offre de nombreux liens avec différents problèmes mathématiques, que ce soit en probabilité ou en physique mathématique, et deux surveys ont d'ailleurs été publiés ces dernières années sur le sujet.

Le premier de Aurzada & Simon [AS15] liste un certain nombre d'exposants connus, essentiellement autour des marches aléatoires et des processus de Lévy. Il propose également différents liens avec d'autres problèmes, tels que les zéros réels des polynômes aléatoires [DPSZ02] ou encore la structure fractionnaire de l'équation de Burger [Sin92b, MK04, Sim08].

Le deuxième survey par Bray, Majumdar & Schehr [BMS13] propose une approche beaucoup plus physique : en effet, l'exposant de persistance est considéré comme un paramètre fournissant de l'information sur tout l'historique d'un processus, et qui est parfois plus pertinent que sa structure de corrélation. Cet exposant a d'ailleurs pu être mesuré expérimentalement dans diverses situations, notamment par exemple lors de l'étude du

phénomène de condensation [MMBB<sup>+</sup>95]. Lorsque des gouttelettes se forment par évaporation sur un substrat froid, la fraction de la surface restant sèche décroît avec une vitesse polynomiale, où l'exposant  $\theta$  est approximativement égal à un.

Le calcul explicite de l'exposant de persistance (lorsqu'il existe) est en général assez difficile dès que l'on sort du cadre Markovien. On se propose ici de s'intéresser au cas d'intégrales de processus de Markov autosimilaires. L'exemple le plus classique est évidemment celui de l'intégrale  $X$  du mouvement brownien  $B$ , pour laquelle  $\theta = \frac{1}{4}$ . L'asymptotique exacte a été calculée dans un premier temps par Goldman [Gol71], dans le cas particulier où le processus démarre de la barrière, c'est-à-dire lorsque  $X_0 = b$  et  $B_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Ce résultat a par la suite été généralisé par Isozaki & Watanabe [IW94] (en passant par un théorème Taubérien), ainsi que par Groeneboom, Jongbloed & Wellner [GJW99] (via un calcul direct). Toutes les preuves reposent sur le fait que l'on dispose d'une expression explicite pour la densité du couple  $(T_b, B_{T_b})$  obtenue par McKean [McK63] lorsque  $X_0 = b$ , puis par Lachal [Lac91] dans le cas général.

Plus récemment, Aurzada & Dereich [AD13] ont prouvé que l'exposant  $\theta = \frac{1}{4}$  restait en fait valable pour l'intégrale de n'importe quel processus de Lévy à valeurs réelles centré et admettant des moments exponentiels bilatères. Leur résultat est même plus général, car il autorise également l'ajout de certains noyaux sous l'intégrale, et montre ainsi que l'exposant dépend plus de la forme du noyau que du processus concerné.

Une autre généralisation due à Izosaki & Kotani [IK00] consiste à regarder certaines fonctionnelles additives homogènes du mouvement brownien  $B$  :

$$X_t = \int_0^t (B_s^\gamma 1_{\{B_s > 0\}} - c |B_s|^\gamma 1_{\{B_s < 0\}}) ds, \quad t \geq 0, \quad (\text{I.2})$$

où  $c > 0$  et  $\gamma > -\frac{3}{2}$ . En utilisant la théorie des excursions et un théorème Taubérien, ils ont montré que l'exposant valait dans ce cas

$$\theta = \frac{2 + \gamma}{2\pi} \operatorname{Arctan} \left( \frac{\sin \left( \frac{\pi}{2 + \gamma} \right)}{c^\nu + \cos \left( \frac{\pi}{2 + \gamma} \right)} \right).$$

## Plan du chapitre

Nous nous proposons dans ce premier chapitre de généraliser les résultats précédents sur les intégrales de processus autosimilaires dans deux directions.

1. Nous allons tout d'abord calculer l'exposant de persistance de l'intégrale d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable. Ce processus n'admettant pas de moments exponentiels bilatères, le résultat d'Aurzada & Dereich [AD13] ne peut s'appliquer. Cette question a été soulevée en 2003 par Z. Shi, et résolue dans le cas spectralement négatif par Simon [Sim07], qui a montré que l'exposant valait alors  $\theta = \frac{\alpha - 1}{2\alpha}$ . Sa preuve rappelle en partie celle de Sinai [Sin92a] pour les marches aléatoires intégrées et repose sur un changement de temps par l'inverse du temps local, un argument difficilement généralisable aux autres cas. Nous présenterons ensuite des applications de nos résultats à l'étude asymptotique des enroulements du processus et de sa dérivée, ainsi qu'à l'étude d'un modèle de particule unidimensionnelle avec conditions de bord de type Maxwelliennes.

2. Dans un second temps, nous allons généraliser le résultat d'Isozaki & Kotani [IK00] en remplaçant le mouvement brownien dans (I.2) par un processus de Bessel biaisé. La méthode que nous présenterons nous permettra également d'étudier le problème du temps de sortie d'un intervalle, et d'étendre ainsi certains résultats de Lachal [Lac00, Lac06].

La plupart des résultats de persistance pour des processus intégrés que l'on peut trouver dans la littérature reposent sur des preuves trajectorielles, au travers de changement de temps. Notre approche ici est très différente car nous allons plutôt travailler avec les lois marginales des processus. L'heuristique fondamentale est la suivante : pour un processus Markovien  $Y$  autosimilaire d'indice  $H$ , en définissant

$$T_b = \inf \left\{ t > 0, \int_0^t Y_u du \geq b \right\}$$

on s'attend, du fait du scaling, à avoir une forme d'indépendance asymptotique, caractérisée par l'équivalence :

$$\mathbb{P}(T_b > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{-\theta+o(1)} \iff \mathbb{P}(Y_{T_b} > z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} z^{-\theta/H+o(1)}.$$

En pratique, nous allons donc commencer par étudier l'asymptotique de  $Y_{T_b}$ , afin de pouvoir remonter ensuite à celle de  $T_b$ .

## I.1 Intégrale d'un processus de Lévy stable

Considérons un processus de Lévy  $\alpha$ -stable  $L$  partant de 0 dont la fonction caractéristique est donnée par

$$\mathbb{E} \left[ e^{i\lambda L_1} \right] = \exp \left( -(i\lambda)^\alpha e^{i\pi\alpha\rho\text{sgn}(\lambda)} \right), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où  $\alpha \in ]0, 2]$  est le paramètre d'autosimilarité et  $\rho = \mathbb{P}(L_1 > 0)$  le paramètre de positivité. Cette formulation, pour laquelle nous référons à Zolotarev [Zol86], n'est pas la plus classique, mais s'avère la plus adaptée aux problèmes que nous considérons. Rappelons brièvement que

- i)* si  $\alpha \in ]0, 1[$  alors  $\rho \in [0, 1]$ . En particulier, si  $\rho = 0$  ou  $\rho = 1$ , alors  $|L|$  est un subordonateur. Nous excluons systématiquement ce cas dans ce chapitre.
- ii)* si  $\alpha = 1$ , alors  $\rho \in ]0, 1[$  et  $L$  est un processus de Cauchy avec dérive,
- iii)* si  $\alpha \in ]1, 2]$ , alors  $\rho \in [1 - \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}]$ . En particulier, si  $\rho = \frac{1}{\alpha}$  (resp.  $\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$ ), le processus  $L$  n'a pas de sauts positifs (resp. pas de sauts négatifs).

On définit alors l'intégrale de  $L$

$$X_t = \int_0^t L_u du, \quad t \geq 0.$$

Les deux processus  $L$  et  $X$  sont autosimilaires d'indices respectifs  $\frac{1}{\alpha}$  et  $1 + \frac{1}{\alpha}$ , de sorte que l'on a pour tout  $k > 0$  :

$$((X_{kt}, L_{kt}), t \geq 0) \stackrel{\text{(loi)}}{=} \left( (k^{1+1/\alpha} X_t, k^{1/\alpha} L_t), t \geq 0 \right).$$

Par ailleurs, le couple  $(X, L)$  est un processus Markovien, que l'on retrouve parfois sous le nom de processus de Kolmogorov (stable) dans la littérature. Nous noterons  $\mathbb{P}_{(x,y)}$  la mesure de probabilité de  $(X, L)$  lorsque le couple part du point  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

### I.1.1 Calcul de l'exposant de persistance

Commençons par observer que l'on peut se ramener au cas  $b = 0$  par translation. Pour simplifier les notations, nous allons découper le plan  $\mathbb{R}^2$  en deux parties :

$$\mathcal{P}_- = \{x < 0, y \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0, y < 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_+ = \{x > 0, y \in \mathbb{R}\} \cup \{x = 0, y > 0\}.$$

Posons alors

$$T_0 = \inf\{t > 0, X_t \geq 0\}.$$

Afin d'étudier la fonction de survie de  $T_0$ , nous allons donc commencer par déterminer la loi de  $L_{T_0}$ . Dans le cas du mouvement brownien, i.e. lorsque  $\alpha = 2$ , la densité de  $L_{T_0}$  a été explicitement calculée par Lachal [Lac91]. Dans le cas général, nous allons calculer la transformée de Mellin de  $L_{T_0}$ . Pour ce faire, fixons  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$ . En appliquant la propriété de Markov, on déduit que pour tout  $z > 0$  :

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}_{(x,y)}(X_t \in dz) dt = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \mathbb{P}_{(0,L_{T_0})}(X_t \in dz) \right] dt. \quad (\text{I.3})$$

En intégrant cette relation sur  $]0, +\infty[$  contre  $z^{\frac{s}{1+\alpha}-1}$  avec  $s \in ]0, 1[$ , et en utilisant la propriété de scaling, on obtient alors la proposition suivante.

**Proposition I.1.** *La transformée de Mellin de  $L_{T_0}$  est donnée pour  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$  et  $s \in ]0, 1[$  par :*

$$\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ L_{T_0}^{s-1} \right] = \frac{\pi \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ X_t^{\frac{s}{1+\alpha}-1} \mathbf{1}_{\{X_t > 0\}} \right] dt}{(1+\alpha)^{\frac{s}{1+\alpha}} \left( \Gamma\left(\frac{s}{1+\alpha}\right) \right)^2 \Gamma(1-s) \sin(\pi(1-\gamma)s)} \quad (\text{I.4})$$

où le paramètre  $\gamma$  est défini par

$$\gamma = \frac{\rho\alpha}{1+\alpha}.$$

Cette transformée admet un prolongement analytique dans la bande  $|s| < \frac{1}{1-\gamma}$ .

Il semble difficile d'obtenir une expression simple pour l'intégrale double du membre de droite de (I.4), mais certaines valeurs particulières peuvent néanmoins être calculées explicitement.

1. Lorsque  $x = 0$  et  $y < 0$ , l'intégrale du numérateur se simplifie et l'on obtient :

$$\mathbb{E}_{(0,y)} \left[ L_{T_0}^{s-1} \right] = \frac{\sin(\pi\gamma s)}{\sin(\pi(1-\gamma)s)} |y|^{s-1}.$$

Cette transformée peut alors s'inverser et nous retrouvons ainsi, lorsque  $\alpha = 2$ , le résultat de McKean [McK63] :

$$\mathbb{P}_{(0,y)}(L_{T_0} \in dz) = \frac{3}{2\pi} \frac{|y|^{1/2} z^{3/2}}{|y|^3 + z^3} \mathbf{1}_{\{z \geq 0\}} dz.$$

2. Lorsque  $y = 0$ , l'intégrale peut également être calculée et l'on obtient :

$$\mathbb{E}_{(x,0)} \left[ L_{T_0}^{s-1} \right] = \frac{(1+\alpha)^{\frac{1-s}{1+\alpha}} \Gamma\left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right) \Gamma\left(\frac{1-s}{\alpha+1}\right) \sin(\pi\gamma)}{\Gamma\left(\frac{s}{\alpha+1}\right) \Gamma(1-s) \sin(\pi s(1-\gamma))} |x|^{\frac{s-1}{\alpha+1}}$$

mais il n'est cette fois pas évident d'obtenir une expression simple pour la densité de  $L_{T_0}$ , excepté dans les cas  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 2$ . En particulier, lorsque  $\alpha = 2$ , nous obtenons l'identité en loi :

$$L_{T_0} \stackrel{(\text{loi})}{=} |9x|^{1/3} \left( \frac{\mathbf{\Gamma}_{5/6}}{\mathbf{B}_{1/6,1/6}} \right)^{1/3}$$

où  $\mathbf{\Gamma}_{5/6}$  et  $\mathbf{B}_{1/6,1/6}$  sont deux variables aléatoires indépendantes, suivant respectivement les lois Gamma de paramètre 5/6 et Beta de paramètres (1/6, 1/6).

Bien que l'on ne sache donc pas expliciter la loi de  $L_{T_0}$  dans le cas général, on peut néanmoins démontrer que  $s = \frac{1}{1-\gamma}$  est un pôle simple pour (I.4), et ainsi utiliser la transformée de Mellin inverse afin d'obtenir l'estimée suivante.

**Corollaire I.2.** *Supposons que  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$ . On a l'asymptotique*

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(L_{T_0} > z) \underset{z \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa h(x, y) z^{-\alpha\theta}$$

où  $\kappa$  est une constante strictement positive, l'exposant  $\theta$  vaut

$$\theta = \frac{\rho}{1 + \alpha(1 - \rho)},$$

et la fonction  $h$  est définie pour  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$  par :

$$h(x, y) = \lim_{s \uparrow \theta} (\theta - s) \mathbb{E}_{(x,y)} [L_{T_0}^{\alpha s}].$$

On en déduit en particulier que  $h$  est harmonique pour le processus tué au sens où

$$\mathbb{E}_{(x,y)} [h(X_t, L_t) \mathbf{1}_{\{T_0 > t\}}] = h(x, y).$$

La fonction  $h$  est positive, décroissante en  $x$  et  $y$ , et satisfait la propriété de scaling :

$$h(x, y) = x^{\frac{\alpha\theta}{1+\alpha}} h\left(1, yx^{-1/(\alpha+1)}\right).$$

Pour calculer l'asymptotique (I.1), nous procédons alors en deux temps. Tout d'abord, nous montrons qu'il existe deux constantes  $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 < +\infty$  telles que

$$\kappa_1 t^{-\theta} \leq \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0 > t) \leq \kappa_2 t^{-\theta}, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (\text{I.5})$$

Cette étape repose sur l'égalité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \int_0^t \mathbf{1}_{\{T_0 > t-u\}} \mathbb{E}_{(0, L_{T_0})} [(X_u)_+^{-\nu}] du \right] \\ = \int_t^{+\infty} \left( \mathbb{E}_{(x,y)} [(X_u)_+^{-\nu}] - \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \mathbb{E}_{(0, L_{T_0})} [(X_u)_+^{-\nu}] \right] \right) du, \quad t > 0, \end{aligned}$$

valable pour  $\nu \in ]\frac{\alpha}{\alpha+1}, 1[$ , que l'on démontre en prenant la transformée de Laplace de chaque côté et en appliquant la propriété de Markov. La loi de  $L_{T_0}$  étant connue, on déduit alors que le membre de droite est de l'ordre de  $t^{1-(1+1/\alpha)\nu-\theta}$ , ce qui permet d'obtenir l'estimée (I.5) à partir du membre de gauche.

Dans un second temps, puisque la fonction  $h$  est harmonique, nous pouvons considérer la  $h$ -transformée de Doob définie par :

$$\mathbb{P}_{(x,y)|\mathcal{F}_t}^\uparrow = \frac{h(X_t, L_t)}{h(x, y)} \mathbf{1}_{\{T_0 > t\}} \cdot \mathbb{P}_{(x,y)|\mathcal{F}_t}.$$

où  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  désigne la filtration naturelle du couple  $(X, L)$ . Le processus des coordonnées sous  $\mathbb{P}^\uparrow$  correspond en fait à l'intégrale d'un processus de Lévy stable conditionné à ne pas toucher 0. En utilisant la propriété de scaling pour le couple  $(X, L)$  ainsi que pour la fonction  $h$ , on a alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0 > t) &= \mathbb{E}_{(x,y)}^\uparrow \left[ \frac{h(x,y)}{h(X_t, L_t)} \right] \\ &= \frac{h(x,y)}{t^\theta} \mathbb{E}_{\left(\frac{x}{t^{1+1/\alpha}}, \frac{y}{t^{1/\alpha}}\right)}^\uparrow \left[ \frac{1}{h(X_1, L_1)} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{h(x,y)}{t^\theta} \mathbb{E}_{(0,0)}^\uparrow \left[ \frac{1}{h(X_1, L_1)} \right] \end{aligned}$$

où la limite du membre de droite est nécessairement finie du fait de (I.5). Cela nous permet donc d'obtenir le théorème suivant.

**Théorème I.3.** *Supposons que  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$ . Il existe une constante  $\kappa > 0$  telle que :*

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(T_0 > t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa h(x, y) t^{-\theta}, \quad \text{où } \theta = \frac{\rho}{1 + \alpha(1 - \rho)}.$$

On peut remarquer que l'exposant de persistance  $\theta$  est croissant en  $\rho$  ce qui est en accord avec l'intuition : plus  $\rho$  est proche de 1, plus le processus  $L$  a tendance à croître, et donc plus l'exposant doit être grand. La dépendance en  $\alpha$  semble elle plus difficile à interpréter : l'idée est probablement que plus  $\alpha$  est petit, plus  $L$  a tendance à effectuer de "grands sauts", et donc plus il est probable que l'un de ces sauts permette à l'intégrale  $X$  de passer au dessus de la barrière.

Nous proposons à présent quelques applications des calculs précédents.

## I.1.2 Quelques applications

### Enroulements

L'étude des enroulements autour de l'origine d'un processus bi-dimensionnel est un problème classique, dont le résultat le plus célèbre est certainement celui de Spitzer [Spi58] : si  $B = B^{(1)} + \mathbf{i}B^{(2)}$  est un mouvement brownien plan ne démarrant pas de l'origine, alors

$$\frac{2 \arg(B_t)}{\ln(t)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\xrightarrow{(\text{loi})}} \mathbf{C}$$

où  $\mathbf{C}$  est une variable aléatoire de Cauchy. Un résultat analogue pour les processus de Lévy isotropes a été démontré par Bertoin & Werner [BW96], avec une vitesse plus lente en  $\sqrt{\ln(t)}$ , et une limite gaussienne. Précisons que ces questions ont également été revisitées récemment par Doney & Vakeroudis [DV13], dans le cadre des enroulements des processus stables isotropes lorsque  $t \rightarrow 0$ .

Nous allons nous intéresser ici aux enroulements autour de l'origine du processus bi-dimensionnel  $Z = (X, L)$ , et généraliser ainsi les travaux dans le cas brownien de McKean [McK63]. Les résultats que nous obtenons sont qualitativement différents du théorème de Spitzer, car notre processus tourne dans le sens horaire autour de l'origine, en visitant alternativement le demi-plan droit puis le demi-plan gauche. Ce comportement permet ainsi d'obtenir une convergence presque sûre au lieu d'une convergence en loi.

Pour simplifier les notations, définissons les paramètres du processus dual  $(\bar{L}_t, t \geq 0) = (-L_t, t \geq 0)$  :

$$\bar{\rho} = 1 - \rho, \quad \bar{\theta} = \frac{1 - \rho}{1 + \alpha\rho} \quad \text{et} \quad \bar{\gamma} = \frac{(1 - \rho)\alpha}{1 + \alpha}.$$

On appelle  $\omega$  l'angle algébrique défini dans le sens trigonométrique par :

$$\omega(t) = \widehat{(Z_0, Z_t)}.$$

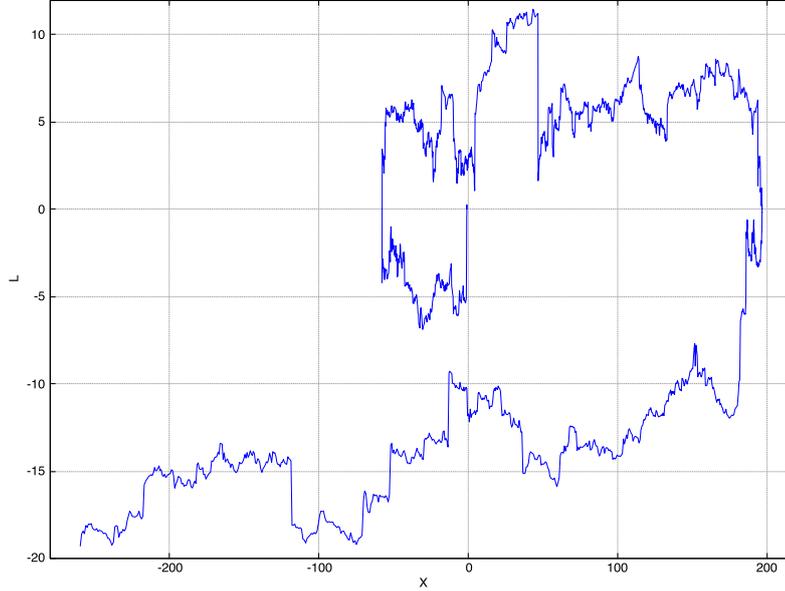


FIGURE I.1 – Une trajectoire  $(Z_t, t \leq 100)$  issue de  $Z_0 = (-1, 0)$  avec  $\alpha = 3/2$  et  $\rho = 1/2$ .

Nous obtenons alors un résultat de convergence presque sûre en temps long pour  $\omega$  dans le théorème suivant.

**Théorème I.4.** *Supposons que  $\rho \in ]0, 1[$  et  $(x, y) \neq (0, 0)$ . Alors, sous  $\mathbb{P}_{(x,y)}$ , on a la convergence presque sûre :*

$$\frac{\omega(t)}{\ln(t)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} -\frac{2 \sin(\pi\gamma) \sin(\pi\bar{\gamma})}{\alpha \sin(\pi(\gamma + \bar{\gamma}))}.$$

La preuve de ce résultat repose sur l'étude des temps de passages successifs du processus  $X$  au niveau 0 :

$$T_0^{(0)} = 0, \quad \text{et} \quad T_0^{(n)} = \inf\{t > T_0^{(n-1)}, X_t = 0\} \quad \text{pour } n \geq 1.$$

En utilisant les propriétés de scaling et de Markov de  $L$ , on peut écrire les décompositions, pour  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$T_0^{(2p)} - T_0^{(2p-1)} \stackrel{(loi)}{=} |L_{T_0}|^\alpha \times \tau^+ \times \left( \prod_{k=1}^{p-1} \ell_k^- \times \ell_k^+ \right)^\alpha$$

et

$$T_0^{(2p+1)} - T_0^{(2p)} \stackrel{(loi)}{=} |L_{T_0}|^\alpha \times \tau^- \times \left( \prod_{k=1}^{p-1} \ell_k^- \times \prod_{k=1}^p \ell_k^+ \right)^\alpha, \tag{I.6}$$

où tous les produits sont indépendants, les variables  $\tau^+$  et  $\tau^-$  étant distribuées comme  $T_0$  sous  $\mathbb{P}_{(0,\pm 1)}$ , et les variables  $(\ell_k^\pm)$  pour  $k \in \{1, \dots, p\}$  étant distribuées comme  $|L_{T_0}|$  sous  $\mathbb{P}_{(0,\pm 1)}$ . Ces expressions sous forme de produits permettent d'obtenir, grâce au lemme de Borel-Cantelli et à un théorème de grande déviation, la limite p.s.

$$\frac{1}{n} \ln \left( T_0^{(n)} \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{\pi\alpha \sin(\pi(\gamma + \bar{\gamma}))}{2 \sin(\pi\gamma) \sin(\pi\bar{\gamma})}.$$

Le résultat du théorème I.4 est alors une conséquence des identifications

$$\{\omega(t) \geq -(n-1)\pi + \theta_0\} = \{T_0^{(n)} \geq t\} \quad \text{et} \quad \{\omega(t) \leq -(n-2)\pi + \theta_0\} = \{T_0^{(n-1)} \leq t\}$$

valables dès lors que  $\theta_0 = \widehat{Z_0 Z_{T_0}} \in (-\pi, 0)$  par exemple.

Les décompositions (I.6) permettent également d'obtenir des estimées sur les temps de passage successifs. Nous utilisons dans le théorème ci-dessous la notation suivante : pour  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles, la relation d'équivalence  $f(t) \asymp g(t)$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$  signifie qu'il existe deux constantes  $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 < +\infty$  telles que  $\kappa_1 g(t) \leq f(t) \leq \kappa_2 g(t)$  pour  $t$  suffisamment grand.

**Théorème I.5.** *Supposons que  $\rho \in ]0, 1[$  et  $(x, y) \in \mathcal{P}_-$ . Pour tout  $n \geq 2$ , on a les asymptotiques lorsque  $t \rightarrow +\infty$  :*

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} > t) \asymp t^{-\theta} (\ln t)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} & \text{si } \rho < 1/2, \\ \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} > t) \asymp t^{-\bar{\theta}} (\ln t)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} & \text{si } \rho > 1/2, \\ \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} > t) \asymp t^{-\theta} (\ln t)^{n-1} & \text{si } \rho = 1/2, \end{cases}$$

où  $[a]$  désigne la partie entière de  $a$ .

L'explication derrière ces trois cas de figure est la suivante : lorsque le processus stable sous-jacent n'est pas symétrique, les excursions de  $X$  d'un côté de l'axe des abscisses ont tendance à être plus longues que celles de l'autre côté, ce qui explique la dissymétrie des formules. Les termes logarithmiques proviennent eux de phénomènes de compensation, lorsque l'on ajoute des excursions du même ordre de grandeur.

Remarquons que dans le cas du mouvement brownien  $B$ , on peut calculer l'asymptotique exacte dans le théorème I.5 à l'aide des formules de Lachal [Lac97]. Nous renvoyons pour cela le lecteur au théorème II.8 dans le chapitre II sur les pénalisations.

## Un modèle de Langevin stable avec conditions de bord Maxwelliennes

Nous présentons dans cette section l'étude d'un modèle de particule unidimensionnelle soumise à une condition de bord diffusive / réflexive. Le processus considéré  $(A, U)$  est le suivant :

$$\begin{cases} A_t = A_0 + \int_0^t U_s ds, \\ U_t = U_0 + L_t + \sum_{n \geq 1} \left( (1 - \beta_n)(q^n M_n - U_{\tau_n^-}) - \beta_n(1 + c)U_{\tau_n^-} \right) \mathbf{1}_{\{\tau_n \leq t\}} \end{cases}, \quad (\text{I.7})$$

où  $c$  et  $q$  sont deux constantes strictement positives et

i)  $(\tau_n, n \in \mathbb{N})$  sont les temps de passage successifs du processus  $A$  au niveau 0,

$$\tau_0 = 0 \quad \text{et} \quad \tau_n = \inf\{t > \tau_{n-1}, A_t = 0\} \quad \text{pour } n \geq 1,$$

ii)  $(\beta_n, n \geq 1)$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $p = \mathbb{P}(\beta_1 = 1)$ ,

iii)  $(M_n, n \geq 1)$  est une suite de variables aléatoires i.i.d. positives, sans atome en 0 et admettant un moment d'ordre  $\alpha$ ,

iv) les suites  $(\beta_n, n \geq 1)$  et  $(M_n, n \geq 1)$  sont indépendantes entre elles ainsi que de  $L$  et de  $(A_0, U_0)$ .

Schématiquement, le processus  $A$  se comporte donc comme l'intégrale d'un processus de Lévy stable tant qu'il est dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Lorsqu'il atteint la frontière 0 pour la  $n^{\text{ème}}$  fois, il est alors soit réfléchi élastiquement avec probabilité  $p$  et repart donc avec la vitesse  $U_{\tau_n} = -cU_{\tau_n^-}$ , soit une nouvelle vitesse indépendante  $U_{\tau_n} = q^n M_n$  lui est attribuée avec probabilité  $1 - p$ . Ce type de conditions de bord "double" est connu dans la littérature (en particulier physique) sous le nom de condition de bord de Maxwell, notamment lorsque  $M_n$  a pour loi la racine d'une loi gamma.

Lorsque  $p = 1$  (c'est-à-dire qu'il y a juste une réflexion élastique à la frontière) et que  $L$  est un mouvement brownien, Jacob [Jac12, Jac13] a démontré qu'il existait un seuil  $c_{\text{crit}}$  en dessous duquel le processus était absorbé en temps fini, mais que l'on pouvait néanmoins faire repartir le processus. Nous nous proposons ici de regarder les phénomènes d'absorption et d'asymptotiques des temps de passage d'un tel modèle à la lumière des résultats de la section précédente.

### Critères d'absorption

Définissons  $\tau_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$ . Nous commençons par donner des critères d'absorption en temps fini, ainsi que sur la finitude des moments du temps d'absorption.

**Théorème I.6.** *Supposons que  $A_0 = 0$  et  $U_0 > 0$  avec  $U_0^\alpha$  intégrable. On rappelle que*

$$\bar{\gamma} = \frac{\alpha(1 - \rho)}{1 + \alpha}.$$

1. Si  $p = 1$ , alors

$$\tau_\infty < +\infty \quad p.s. \quad \iff \quad c < c_{\text{crit}}$$

où

$$c_{\text{crit}} = \exp(-\pi \cot(\pi \bar{\gamma})).$$

En particulier, pour  $\lambda > 0$ ,

$$\mathbb{E}[\tau_\infty^\lambda] < +\infty \quad \iff \quad \left\{ c < c_{\text{crit}} \text{ et } c^{\alpha\lambda} \frac{\sin(\pi(\alpha\lambda + 1)\bar{\gamma})}{\sin(\pi(\alpha\lambda + 1)(1 - \bar{\gamma}))} < 1 \right\}.$$

2. Si  $p \in [0, 1[$ , alors

$$\tau_\infty < +\infty \quad p.s. \quad \iff \quad q < 1.$$

En particulier, pour  $\lambda > 0$ ,

(a) si  $p = 0$  :

$$\mathbb{E}[\tau_\infty^\lambda] < +\infty \quad \iff \quad \left\{ q < 1 \text{ et } \lambda < \frac{1 - \rho}{1 + \alpha\rho} \right\},$$

(b) si  $0 < p < 1$  :

$$\mathbb{E}[\tau_\infty^\lambda] < +\infty \quad \iff \quad \left\{ q < 1 \text{ et } c^{\alpha\lambda} \frac{\sin(\pi(\alpha\lambda + 1)\bar{\gamma})}{\sin(\pi(\alpha\lambda + 1)(1 - \bar{\gamma}))} p < 1 \right\}.$$

On distingue donc ici deux situations qui sont tout à fait intuitives. Lorsque le processus est juste soumis à une réflexion élastique à la frontière ( $p = 1$ ), il faut que la vitesse soit suffisamment réduite à chaque contact ( $c < c_{\text{crit}}$ ) pour que le processus finisse par être absorbé. Par contre, lorsqu'un renouvellement indépendant de la vitesse a lieu régulièrement ( $0 \leq p < 1$ ), le paramètre  $c$  perd de son influence, et il faut cette fois que le renouvellement, lorsqu'il se produit, réduise suffisamment la vitesse à chaque contact ( $q < 1$ ).

Ces résultats reposent tous sur la décomposition sous forme de somme du couple  $(U_{\tau_n}, \tau_n)$ . En effet, pour  $n \geq 1$ , on a grâce à la propriété de Markov et au scaling :

$$U_{\tau_n} \stackrel{(\text{loi})}{=} (1 - \beta_n)q^n M_n + \beta_n q^{g_n} M_{g_n} \prod_{i=g_n+1}^n c|\ell_i|$$

et

$$\tau_n \stackrel{(\text{loi})}{=} \xi_1 U_0^\alpha + \sum_{k=2}^n \xi_k U_{\tau_{k-1}}^\alpha \quad (\text{I.8})$$

où les variables  $(\xi_k, \ell_k)_{k \geq 1}$  sont i.i.d. de même loi que le couple  $(\tau_1, U_{\tau_1^-})$  lorsque  $(A, U)$  part de  $(0, 1)$ , et  $g_n$  représente le dernier instant avant  $n$  où la particule a diffusé à la frontière :

$$g_n = \sup\{k \leq n - 1, \beta_k = 0\} \quad \text{avec} \quad M_0 = U_0.$$

Le problème consiste donc à étudier la limite de la somme (I.8), où les variables  $(U_{\tau_k}, k \geq 1)$  ne sont évidemment pas indépendantes (excepté si  $p = 0$ ). L'idée est de regarder ces sommes comme des séries entières en  $q$  ou  $c$  suivant les cas, ce qui permet ainsi d'obtenir des critères de convergence p.s. Pour étudier la finitude des moments, on montre alors que  $\tau_\infty$  est solution d'une équation de renouvellement dont l'étude a été faite par Goldie [Gol91].

### Asymptotique des temps de passage

On suppose à présent que le processus n'est pas absorbé :  $\tau_\infty = +\infty$  p.s. On s'intéresse alors à la vitesse de divergence de la série  $(\tau_n, n \geq 1)$ .

**Théorème I.7.** *Supposons que  $\tau_\infty = +\infty$  p.s. On a les asymptotiques suivantes.*

1. Lorsque  $p = 1$  :

(a) si  $c > c_{\text{crit}}$  :

$$\frac{\ln(\tau_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \alpha (\pi \cot(\pi \bar{\gamma}) + \ln(c)).$$

(b) si  $c = c_{\text{crit}}$  : pour tout  $0 < \lambda < 2$ ,

$$\frac{\ln(\tau_n)}{n^{1/\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

2. Lorsque  $p \in [0, 1[$  :

(a) si  $q > 1$  :

$$\frac{\ln(\tau_n)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \alpha \ln(q).$$

(b) si  $q = 1$  et  $p = 0$  : pour tout  $0 < \lambda < \frac{1-\rho}{1+\alpha\rho}$ ,

$$\frac{\tau_n}{n^{1/\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

(c) si  $q = 1$  et  $0 < p < 1$  : pour tout  $\lambda > 0$  tel que  $c^{\alpha\lambda} \frac{\sin(\pi(\alpha\lambda+1)\bar{\gamma})}{\sin(\pi(\alpha\lambda+1)(1-\bar{\gamma}))} p < 1$  :

$$\frac{\tau_n}{n^{1/\lambda}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} 0.$$

La preuve de ce résultat repose à nouveau sur l'utilisation de la décomposition (I.8), couplée à l'inégalité de Markov et au lemme de Borel-Cantelli. Pour les deux cas où les vitesses sont polynomiales, on utilise plutôt un théorème dû à Petrov [Pet73] qui établit un lien entre la vitesse de divergence p.s. des sommes partielles d'une série et la vitesse de divergence de ces moments.

Enfin, nous montrons également dans [12] l'existence d'une fonction trace pour l'équation cinétique associée au modèle (I.7), dans le cas où  $q = 1$  et où le processus sous-jacent  $L$  est symétrique.

## I.2 Fonctionnelles additives homogènes d'un processus de Bessel biaisé

Considérons à présent un processus de Bessel biaisé  $Y$  de dimension  $\delta \in [1, 2[$  et de paramètre d'asymétrie  $\eta \in ]-1, 1[$ .  $Y$  est une diffusion dont la mesure de vitesse  $m$  et la fonction d'échelle  $s$  sont données respectivement par :

$$m(dy) = \begin{cases} \frac{1}{1-\eta} y^{\delta-1} dy & \text{pour } y > 0, \\ \frac{1}{1+\eta} |y|^{\delta-1} dy & \text{pour } y < 0. \end{cases} \quad \text{et} \quad s(y) = \begin{cases} \frac{1-\eta}{2-\delta} y^{2-\delta} & \text{pour } y > 0, \\ -\frac{1+\eta}{2-\delta} |y|^{2-\delta} & \text{pour } y < 0. \end{cases}$$

Intuitivement,  $Y$  peut être construite à partir d'un processus de Bessel  $R$  classique, c'est-à-dire de l'unique solution positive de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} R_t = B_t + \int_0^t \frac{\delta-1}{2R_u} du, & \text{si } \delta \in (1, 2), \\ R_t = |B_t|, & \text{si } \delta = 1 \end{cases}, \quad t \geq 0,$$

où  $B$  est un mouvement brownien, en échangeant le signe de chaque excursion de  $R$  indépendamment avec probabilité  $\frac{1-\eta}{2}$ .

Les processus de Bessel biaisés ont été introduits pour la première fois par Barlow, Pitman & Yor dans les deux articles compagnons [BPY89a, BPY89b], où ils sont présentés comme un cas particulier de processus de Walsh (en choisissant comme espace d'états simplement l'union de deux demi-droites). Ils apparaissent également chez Watanabe [Wat98] dans son survey sur les applications de la théorie de Krein aux diffusions linéaires, où leur propriété d'invariance par inversion du temps est soulignée. L'étude de l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus de Bessel biaisé a été entreprise par Blei [Ble12], tandis que le semi-groupe a été calculé par exemple par Alili & Aylwin [AA19] (dans un cas un peu plus général). Notons également que le cas du mouvement brownien biaisé (i.e.  $\delta = 1$ ) a reçu lui une attention considérable dans la littérature, et nous référons au survey de Lejay [Lej06] pour une présentation globale.

Pour  $\gamma > 0$  et  $c > 0$ , définissons  $V_\gamma(y) = |y|^\gamma (\mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} - c\mathbf{1}_{\{y < 0\}})$  et considérons la fonctionnelle additive homogène

$$X_t = \int_0^t V_\gamma(Y_u) du, \quad t \geq 0.$$

On note  $\mathbb{P}_{(x,y)}$  la loi du couple  $(X, Y)$  lorsqu'il part de  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , avec la convention  $\mathbb{P} = \mathbb{P}_{(0,0)}$ . Le couple  $(X, Y)$  est Markovien et satisfait la propriété de scaling : pour tout  $k > 0$ ,

$$((X_{kt}, Y_{kt}), t \geq 0) \stackrel{(\text{loi})}{=} \left( (k^{1+\frac{\gamma}{2}} X_t, k^{\frac{1}{2}} Y_t), t \geq 0 \right).$$

Définissons pour  $b \in \mathbb{R}$  le temps d'arrêt

$$T_b = \inf\{t > 0, X_t = b\}.$$

La démarche que nous avons appliquée dans la section I.1 pour calculer l'exposant de persistance de l'intégrale d'un processus de Lévy stable peut s'appliquer, dans les grandes lignes, au cas des processus de Bessel biaisés. Une difficulté néanmoins vient du fait que l'on ne dispose pas de la loi de la variable aléatoire  $X_1$ , donc que l'on ne peut pas utiliser telle quelle l'équation (I.3) pour obtenir la transformée de Mellin de  $Y_{T_b}$ . Le problème peut être néanmoins contourné en utilisant le fait que  $Y$  est à trajectoires continues, et en regardant un temps d'arrêt légèrement plus grand, à savoir :

$$\zeta_b = \inf\{t > 0, X_t \geq b \text{ et } Y_t = 0\}. \quad (\text{I.9})$$

La propriété de Markov, couplée au scaling, permet d'obtenir la transformée de Mellin de  $Y_{T_b}$  en fonction de celle de  $X_{\zeta_b} - b$ . On obtient pour  $(x, y) \in \{x < b \text{ et } y \in \mathbb{R}\} \cup \{x = b \text{ et } y < 0\}$  :

$$\mathbb{E}_{(x,y)} [Y_{T_b}^s] = \left( \frac{2 + \gamma}{\sqrt{2}} \right)^{\frac{2s}{2+\gamma}} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma\left(\nu - \frac{s}{2+\gamma}\right)} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ (X_{\zeta_b} - b)^{\frac{s}{2+\gamma}} \right], \quad s \in (\beta - 1, \beta), \quad (\text{I.10})$$

où l'on a posé :

$$\beta = \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \left( \frac{\sin(\nu\pi)}{c^\nu \frac{1-\eta}{1+\eta} + \cos(\nu\pi)} \right) \quad \text{et} \quad \nu = \frac{2 - \delta}{2 + \gamma}. \quad (\text{I.11})$$

Le problème se ramène donc à étudier la variable  $X_{\zeta_b} - b$ .

### I.2.1 Calcul de l'exposant de persistance

Notre objectif à présent est donc de réussir à calculer le membre de droite de (I.10). En utilisant la propriété de Markov et le scaling, on peut écrire pour  $r \in ]\frac{2}{2+\gamma}, 1[$  :

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ (t^{1+\frac{\gamma}{2}} X_1 - b)_+^{-r} \mathbf{1}_{\{Y_1 \leq 0\}} \right] dt \\ &= \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ (X_{\zeta_b} - b)^{\frac{2}{2+\gamma} - r} \right] \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[ (1 + u^{1+\frac{\gamma}{2}} \widehat{X}_1)_+^{-r} \mathbf{1}_{\{\widehat{Y}_1 \leq 0\}} \right] du \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

où le couple  $(\widehat{X}, \widehat{Y})$  a même loi que  $(X, Y)$ . En définissant

$$\sigma_0 = \inf\{t \geq 0, Y_t = 0\}$$

et en décomposant les intégrales de (I.12) suivant le signe de  $\widehat{X}_1$ , on obtient alors l'expression :

$$\mathbb{E}_{(x,y)} [(X_{\zeta_b} - b)^s] = \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{2+\gamma}\right) \mathbb{E}_{(x,y)} [(b - X_{\sigma_0})_+^s]}{\sin\left(\frac{2\pi}{2+\gamma} - \pi s\right) - \frac{M_-}{M_+} \sin(\pi s)} + \mathbb{E}_{(x,y)} [(X_{\sigma_0} - b)_+^s]$$

où les moments  $M_+$  et  $M_-$  sont donnés par :

$$M_+ = \mathbb{E} \left[ X_1^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{X_1 > 0, Y_1 \leq 0\}} \right] \quad \text{et} \quad M_- = \mathbb{E} \left[ |X_1|^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{X_1 < 0, Y_1 \leq 0\}} \right].$$

La variable aléatoire  $X_{\sigma_0}$  étant distribuée comme l'inverse d'une loi gamma (voir par exemple [Ç15]), il nous reste donc à calculer le ratio  $M_-/M_+$ . Bien que l'on ne dispose pas de la loi jointe du couple  $(X_1, Y_1)$ , le calcul de ces moments très spécifiques est néanmoins possible. En effet, on peut remarquer que

$$2M_{\pm} = \mathbb{E} \left[ |X_1|^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{Y_1 \leq 0\}} \right] \pm \mathbb{E} \left[ \text{sgn}(X_1) |X_1|^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{Y_1 \leq 0\}} \right]$$

de sorte qu'en définissant l'intégrale

$$\Upsilon = \int_0^{+\infty} \mathbb{E} \left[ e^{-iX_t} \mathbf{1}_{\{Y_t \leq 0\}} \right] dt \quad (\text{I.13})$$

on observe alors que

$$\begin{aligned} \Re(\Upsilon) &= \frac{2}{2+\gamma} \Gamma\left(\frac{2}{2+\gamma}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2+\gamma}\right) \mathbb{E} \left[ |X_1|^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{Y_1 \leq 0\}} \right] \\ \Im(\Upsilon) &= -\frac{2}{2+\gamma} \Gamma\left(\frac{2}{2+\gamma}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2+\gamma}\right) \mathbb{E} \left[ \text{sgn}(X_1) |X_1|^{-\frac{2}{2+\gamma}} \mathbf{1}_{\{Y_1 \leq 0\}} \right]. \end{aligned}$$

Le calcul de  $\Upsilon$  peut être alors effectué grâce à une adaptation de la formule de Feynman-Kac (la clé étant l'absence d'exponentielle devant l'espérance dans (I.13), ce qui permet de résoudre explicitement l'équation différentielle associée), et on obtient

$$\mathbb{E}_{(x,y)} [(X_{\zeta_b} - b)^s] = \frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\beta - s))} \mathbb{E}_{(x,y)} [(b - X_{\sigma_0})_+^s] + \mathbb{E}_{(x,y)} [(X_{\sigma_0} - b)_+^s].$$

La preuve de la formule de Feynman-Kac dans ce cas particulier repose sur l'application de la formule d'Itô-Tanaka symétrisée (voir par exemple Lejay [Lej06, Section 5.1]), et nécessite donc que le processus concerné soit une semimartingale, ce qui nous restreint au cas  $\delta \in [1, 2[$ . En procédant ensuite comme dans la section I.1, on arrive alors au théorème suivant :

**Théorème I.8.** *Supposons que  $\{x < b \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$  ou  $\{x = b \text{ et } y < 0\}$ . Alors, il existe une constante  $\kappa > 0$  indépendante de  $(x, y)$  telle que*

$$\mathbb{P}_{(x,y)} (T_b > t) \sim \kappa h(b - x, y) t^{-\theta}, \quad t \rightarrow +\infty,$$

où  $\theta = \frac{2+\gamma}{2}\beta$  et la fonction  $h$  est définie par

$$h(x, y) = \begin{cases} \mathbb{E}_{(0,y)} \left[ (x - X_{\sigma_0})_+^{\frac{2\theta}{2+\gamma}} \right] & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Notons que, dans le cas du mouvement brownien, cette représentation de  $h$  sous forme d'espérance apparaît déjà dans [IK00].

### I.2.2 Temps de sortie d'un intervalle

Les calculs précédents peuvent s'adapter au cas d'un intervalle  $[a, b]$  avec  $a < b$ . Définissons

$$T_{ab} = \inf\{t > 0, X_t \notin [a, b]\}.$$

L'étude du temps de sortie d'un intervalle pour les fonctionnelles homogènes additives du mouvement brownien a été effectuée par Lachal [Lac00, Lac06]. L'approche utilisée dans [Lac00] mêle à la fois théorie des excursions et formule de Feynman-Kac, et permet d'obtenir la loi de  $B_{T_{ab}}$  lorsque  $B_0 = 0$ , ainsi que des estimées sur les moments de  $T_{ab}$ . Le cas  $B_0 \neq 0$  est par la suite traité dans [Lac06], où l'auteur réussit à calculer explicitement la loi de  $B_{T_{ab}}$  lorsque  $X_0 = a$  ou  $b$ . Toutes les densités obtenues sont assez compliquées et font intervenir diverses fonctions spéciales ; néanmoins l'auteur observe également une formule relativement simple pour une transformée de Laplace modifiée de  $B_{T_{ab}}$  lorsque  $a < x < b$  :

$$\mathbb{E}_{(x,0)} \left[ B_{T_{ab}} e^{-\lambda B_{T_{ab}}} \mathbf{1}_{\{B_{T_{ab}} > 0\}} \right] = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \frac{\Gamma(\nu)}{(x-a)^{\nu-\beta} (b-x)^{-\beta}} \frac{(\lambda A(b-a) + 1)^{\nu-\beta}}{\lambda A(b-x) + 1} \quad (\text{I.15})$$

où l'on a posé  $A = \frac{(\gamma+2)^2}{2}$ . Cette formule est en fait la clé des calculs qui suivent, et nous en proposons une interprétation probabiliste ci-dessous (I.17). Notons finalement que la queue de la fonction de survie de  $T_{ab}$  a été étudiée par Lachal & Simon [LS10] qui ont prouvé l'existence d'une constante positive  $\mathcal{K}$  finie et non nulle telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{-1} \ln(\mathbb{P}(T_{a,b} > t)) = -\mathcal{K}.$$

Afin d'étendre les résultats de Lachal aux processus de Bessel biaisés, définissons pour  $a < b$  :

$$\zeta_a = \inf\{t > 0, X_t < a \text{ et } Y_t = 0\}, \quad \zeta_b = \inf\{t > 0, X_t > b \text{ et } Y_t = 0\}$$

et

$$\zeta_{ab} = \zeta_a \wedge \zeta_b = \inf\{t > 0, X_t \notin [a, b] \text{ et } Y_t = 0\}.$$

Comme précédemment, au lieu d'étudier directement  $Y_{T_{ab}}$ , nous allons dans un premier temps nous concentrer sur  $X_{\zeta_{ab}}$ . En particulier, en procédant comme pour (I.12), on obtient le système d'équations

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ (X_{\zeta_{ab}} - b)^s \mathbf{1}_{\{X_{\zeta_{ab}} > 0\}} \right] \frac{\sin(\pi(\beta - s))}{\sin(\pi\beta)} + \mathbb{E} \left[ (b - X_{\zeta_{ab}})^s \mathbf{1}_{\{X_{\zeta_{ab}} < 0\}} \right] &= (b - x)^s \\ \text{et} \\ \mathbb{E} \left[ (a - X_{\zeta_{ab}})^s \mathbf{1}_{\{X_{\zeta_{ab}} < 0\}} \right] \frac{\sin(\pi(\alpha - s))}{\sin(\pi\alpha)} + \mathbb{E} \left[ (X_{\zeta_{ab}} - a)^s \mathbf{1}_{\{X_{\zeta_{ab}} > 0\}} \right] &= (x - a)^s, \end{aligned} \quad (\text{I.16})$$

où  $\beta$  est donné par (I.11), et par symétrie,

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \left( \frac{\sin(\nu\pi)}{c^{-\nu} \frac{1+\eta}{1-\eta} + \cos(\nu\pi)} \right).$$

On peut remarquer que la dépendance du système (I.16) en les paramètres initiaux  $\delta, \eta, \gamma$  et  $c$  n'apparaît qu'au travers de  $\alpha$  et  $\beta$ . L'unique solution est alors donnée pour  $z > 0$  par :

$$\mathbb{P}_{(x,0)}(X_{\zeta_{ab}} - b \in dz) = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}{b-x+z} \frac{z^{-\beta}}{(b-a+z)^\alpha} dz$$

et

$$\mathbb{P}_{(x,0)}(a - X_{\zeta_{ab}} \in dz) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{(x-a)^\alpha (b-x)^\beta}{x-a+z} \frac{z^{-\alpha}}{(b-a+z)^\beta} dz.$$

Ce résultat permet par exemple de calculer la probabilité que  $X$  atteigne l'une des bornes avant l'autre. En effet, en observant que

$$\mathbb{P}_{(x,0)}(X_{\zeta_{ab}} > b) = \mathbb{P}_{(x,0)}(T_b < T_a)$$

on obtient alors le théorème suivant.

**Théorème I.9.** *La probabilité que  $X$  atteigne le niveau  $b$  avant le niveau  $a$  est donnée par*

$$\mathbb{P}_{(x,0)}(T_b < T_a) = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^\alpha {}_2F_1\left[\begin{matrix} \alpha & 1-\beta \\ 1+\alpha \end{matrix}; \frac{x-a}{b-a}\right].$$

où  ${}_2F_1$  désigne la fonction hypergéométrique usuelle définie par :

$${}_2F_1\left[\begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix}; z\right] = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} z^n.$$

La propriété de Markov permet alors de remonter à la loi de  $Y_{T_{ab}}$  au travers de la formule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(x,0)}(X_{\zeta_{ab}} - b \in dz) &= \mathbb{E}_{(x,0)} \left[ \mathbb{P}_{(0, Y_{T_{ab}})}(X_{\sigma_0} \in dz) \mathbf{1}_{\{Y_{T_{ab}} > 0\}} \right] \\ &= \frac{z^{-\nu-1}}{\Gamma(\nu) A^\nu} \mathbb{E}_{(x,0)} \left[ Y_{T_{ab}}^{2-\delta} \exp\left(-\frac{Y_{T_{ab}}^{2+\gamma}}{Az}\right) \mathbf{1}_{\{Y_{T_{ab}} > 0\}} \right] dz \quad (\text{I.17}) \end{aligned}$$

où l'on rappelle que  $A = \frac{(2+\gamma)^2}{2}$ . Cette transformée de Laplace modifiée de  $Y_{T_{ab}}$  est analogue à la formule (I.15) observée par Lachal dans [Lac06]. Son inversion permet ainsi d'obtenir la densité de  $Y_{T_{ab}}$ .

**Théorème I.10.** *Supposons que  $a < x < b$ . La densité de probabilité de la variable aléatoire  $Y_{T_{ab}}$  s'écrit :*

$$\mathbb{P}_{(x,0)}(Y_{T_{ab}} \in dz)/dz = \begin{cases} D_+ \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^\alpha \frac{z^{\gamma+\alpha(\gamma+2)+\delta-1}}{(b-x)^{1-\beta}} \exp\left(-\frac{z^{\gamma+2}}{A(b-x)}\right) \\ \quad \times {}_1F_1\left[\begin{matrix} \alpha \\ 1+\alpha \end{matrix}; \frac{(x-a)z^{\gamma+2}}{A(b-x)(b-a)}\right] & \text{si } z > 0, \\ D_- \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^\beta \frac{|z|^{\gamma+\beta(\gamma+2)+\delta-1}}{(x-a)^{1-\alpha}} \exp\left(-\frac{c|z|^{\gamma+2}}{A(x-a)}\right) \\ \quad \times {}_1F_1\left[\begin{matrix} \beta \\ 1+\beta \end{matrix}; \frac{c(b-x)|z|^{\gamma+2}}{A(x-a)(b-a)}\right] & \text{si } z < 0, \end{cases}$$

où les constantes  $D_+$  et  $D_-$  sont données par

$$D_+ = \frac{\Gamma(\nu) \sin(\pi\beta)}{A^{1-\beta} \pi\nu} \frac{2-\delta}{\Gamma(1+\alpha)} \quad \text{et} \quad D_- = \Gamma(\nu) \left(\frac{c}{A}\right)^{1-\alpha} \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\nu} \frac{2-\delta}{\Gamma(1+\beta)}$$

et  ${}_1F_1$  désigne la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer définie par :

$${}_1F_1\left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}; z\right] = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n}{(c)_n} z^n.$$

Les expressions lorsque  $y \neq 0$  peuvent ensuite être obtenues grâce à la propriété de Markov, en utilisant le fait que le processus  $Y$  est à trajectoires p.s. continues.



## Chapitre II

# Pénalisations

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats issus des publications :

- [1] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. **46** (4) :681-718, 2010.
- [2] C. Profeta. Penalizing null recurrent diffusions. *Electron. J. Probab.* **17**, no. 69, 1-23, 2012.
- [5] C. Profeta. Some limiting laws associated with the integrated Brownian motion. *ESAIM : P&S*, Vol. **19**, 148-171, 2015.
- [11] C. Profeta, K. Yano and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. *J. Math. Soc. Japan.*, Vol. **71**, Number 1, 203-233, 2019.

Le principe de la pénalisation est d'essayer de modifier certaines propriétés importantes des trajectoires d'un processus en essayant de lui imposer, par une forme de conditionnement, un comportement qui ne lui est pas naturel. L'exemple le plus classique de pénalisation est probablement la construction de ponts de processus, c'est-à-dire le conditionnement d'un processus aléatoire à se trouver en un point précis à un instant précis, ce qui est généralement contre nature.

En pratique, la démarche consiste à mettre un poids sur la loi du processus afin de favoriser les trajectoires que l'on souhaite, puis de passer à la limite. Mathématiquement, on considère donc un processus  $(X_t, t \geq 0)$  défini sur un espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  et on dit qu'un processus à valeurs positives  $(\Gamma_t, t \geq 0)$  satisfait le principe de pénalisation s'il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}^{(\Gamma)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que :

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Lambda_u} \Gamma_t]}{\mathbb{E}[\Gamma_t]} = \mathbb{Q}^{(\Gamma)}(\Lambda_u).$$

Dans la majorité des cas classiques, la mesure  $\mathbb{Q}^{(\Gamma)}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}$  sur toutes les tribus  $\mathcal{F}_u$  pour  $u > 0$  fini, mais est singulière par rapport à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_\infty$ .

Ce type de problème a été très largement étudié par Roynette, Vallois & Yor dans le cadre du mouvement brownien (ou plus généralement des processus de Bessel) au cours d'une série d'articles, numérotés de I à IX : [RVY06c, RVY06a, RVY05, RVY07, RVY08, RVY09b, RVY09a, RY08, RY10]. Par la suite, Najnudel, Roynette & Yor ont réussi à obtenir dans [NRY09] un cadre unifié pour toute une partie des pénalisations

browniennes via la construction d'une mesure  $\sigma$ -finie  $\mathcal{W}$  étroitement liée aux derniers temps de passage. Différentes généralisations de  $\mathcal{W}$  ont ensuite été proposées par Najnudel & Nikeghbali [NN10, NN13] en lien avec une famille remarquable de sous-martingales.

Entre temps, d'autres travaux ont suivi pour différentes familles de processus : citons entre autres les marches aléatoires et les chaînes de Markov [Deb09, Deb12, NRY09], les processus de Lévy  $\alpha$ -stable [YYY09], certaines diffusions linéaires [SV09]... Dans tous ces travaux, les auteurs observent des phénomènes assez similaires à ceux obtenus pour le mouvement brownien. Nous verrons que cela est essentiellement dû au fait que les processus étudiés sont Markoviens récurrents nuls.

## Plan du chapitre

Nos travaux sur ce sujet se sont donc orientés dans trois directions.

1. Nous avons tout d'abord obtenu différents théorèmes de pénalisation lorsque  $X$  est une diffusion linéaire récurrente à valeurs positives. Il s'avère que dans ce cas, les résultats ne sont pas les mêmes suivant que  $X$  est récurrente nulle (comme le mouvement brownien ou les processus de Bessel) ou récurrente positive.
2. Les résultats précédents reposent tous sur une hypothèse de décroissance polynomiale de la résolvante de  $X$ . Pour éliminer cette hypothèse, nous nous sommes alors intéressés avec K. Yano et Y. Yano à des pénalisations via des horloges aléatoires. L'ajout d'un aléa supplémentaire nous ainsi permis d'obtenir des résultats universels, ne demandant que très peu d'hypothèses, et valables à la fois pour des diffusions récurrentes nulles et récurrentes positives.
3. Enfin, nous avons étudié des pénalisations d'un exemple de processus non-Markovien, à savoir l'intégrale du mouvement brownien. A une exception près, les phénomènes que l'on observe dans ce cas sont globalement similaires au cas du mouvement brownien classique.

## II.1 Diffusions linéaires récurrentes

Commençons par fixer quelques notations. Soit  $\ell \in ]0, +\infty]$ . On se donne une diffusion linéaire  $X$  à valeurs dans  $I = [0, \ell]$  avec 0 une frontière instantanément réfléchissante. On note  $\mathbb{P}_x$  sa loi lorsque  $X_0 = x$  et  $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  sa filtration naturelle, avec  $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$ .

Pour caractériser  $X$ , on suppose que sa fonction d'échelle  $s$  est nulle en 0, que sa mesure de vitesse  $m(dx) = m(x)dx$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, et on note  $q(t; x, y)$  sa densité de transition par rapport à  $m$  de sorte que

$$\mathbb{P}_x(X_t \in dy) = q(t; x, y)m(dy).$$

Pour  $a \in I$ , on définit le temps local de  $X$  au niveau  $a$  par la formule :

$$L_t^a := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{m([a, a + \varepsilon])} \int_0^t \mathbf{1}_{[a, a + \varepsilon[}(X_s) ds$$

ainsi que  $(\tau_l^a, l \geq 0)$  son inverse continu à droite

$$\tau_l^a := \inf\{t \geq 0, L_t^a > l\}.$$

Lorsque  $X_0 = a$ , le processus  $(\tau_l^a, l \geq 0)$  est un subordonateur, et nous noterons  $\nu^{(a)}$  sa mesure de Lévy, avec la convention que  $\nu = \nu^{(0)}$ .

### II.1.1 Le cas récurrent nul

Nous supposons dans cette section que  $\ell = +\infty$  est une barrière naturelle et que  $X$  est récurrente nulle, c'est-à-dire que  $m([0, +\infty[) = +\infty$ . L'origine de ce travail provient d'un article de Salminen & Vallois [SV09], qui ont montré que le principe de pénalisation était satisfait pour des fonctionnelles de la forme  $(\Gamma_t = f(L_t^0), t \geq 0)$  avec  $f$  une fonction positive, décroissante et à support compact dès lors que la mesure de Lévy  $\nu$  restreinte à l'intervalle  $[1, +\infty[$  était sous-exponentielle. Rappelons qu'une mesure  $\mu$  est dite sous-exponentielle ( $\mu$  appartient à la classe  $\mathcal{S}$ ) si, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu^{*2}([t, +\infty[)}{\mu([t, +\infty[)} = 2,$$

où  $\mu^{*2}$  désigne la convolution de  $\mu$  avec elle-même. Les principaux exemples de mesures sous-exponentielles sont données par les mesures dont la queue est à variations régulières, c'est-à-dire :

$$\mu([t, +\infty[) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\eta(t)}{t^\beta}$$

où  $\beta \geq 0$  et  $\eta$  est une fonction à variations lentes. Lorsque  $\beta \in ]0, 1[$ , nous dirons qu'une telle mesure appartient à la classe  $\mathcal{R}$ . Enfin remarquons également qu'une mesure sous-exponentielle satisfait toujours à la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mu([t+x, +\infty[)}{\mu([t, +\infty[)} = 1.$$

En notant  $\mathcal{L}$  l'ensemble de telles mesures, nous obtenons ainsi la série d'inclusions :

$$\mathcal{R} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{L}$$

Nous avons donc regardé quels types de pénalisations nous pouvions obtenir en relaxant ou en durcissant la condition de Salminen & Vallois. Lorsque l'on souhaite prouver un théorème de pénalisation, la première étape consiste toujours à étudier l'asymptotique de  $\mathbb{E}_x[\Gamma_t]$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous avons ainsi pu obtenir dans [2] le résultat suivant :

**Lemme II.1.** *Soit  $F$  une fonctionnelle positive  $(\mathcal{F}_t)$ -adaptée telle que pour tout  $x \geq 0$*

$$0 < \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right] < +\infty$$

et soit  $g_a^{(t)} = \sup\{s \leq t, X_s = a\}$ . Supposons que

a) soit  $\nu$  appartient à la classe  $\mathcal{L}$ , et  $\Gamma_t = \int_0^t F_{g_a^{(s)}} ds$ ,

b) soit  $\nu$  appartient à la classe  $\mathcal{R}$  et  $\Gamma_t = F_{g_a^{(t)}}$  avec  $F$  décroissante.

Alors, on a l'asymptotique

$$\mathbb{E}_x [\Gamma_t] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \Phi(x)\eta(t)$$

où

$$\Phi(x) = \mathbb{E}_x[F_0](s(x) - s(a))_+ + \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{+\infty} F_u dL_u^a \right]$$

et

$$\eta(t) = \begin{cases} \int_0^t \nu([s, +\infty[) ds & \text{dans le cas (a),} \\ \nu([t, +\infty[) & \text{dans le cas (b).} \end{cases}$$

Le point important ici est que la vitesse de décroissance  $\eta$  ne dépend ni de la fonctionnelle  $F$ , ni du point de départ  $x$ . En appliquant le propriété de Markov, on aboutit alors au théorème de pénalisation suivant :

**Théorème II.2.** *On se place sous les hypothèses du lemme II.1.*

*Le principe de pénalisation est satisfait par la fonctionnelle  $(\Gamma_t, t \geq 0)$ , i.e. il existe une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}_x^{(F)}$  sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ , qui est la même dans les deux cas a) et b), telle que*

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\Lambda_u} \Gamma_t]}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} = \mathbb{Q}_x^{(F)}(\Lambda_u).$$

Par ailleurs,

1. La mesure  $\mathbb{Q}_x^{(F)}$  est faiblement absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}_x$  :

$$\forall t \geq 0, \quad \mathbb{Q}_{x|\mathcal{F}_t}^{(F)} = \frac{M_t(F)}{\Phi(x)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_t}$$

où la martingale  $(M_t(F), t \geq 0)$  est donnée par :

$$M_t(F) = F_{g_a^{(t)}}(s(X_t) - s(a))_+ + \mathbb{E}_x \left[ \int_t^{+\infty} F_u dL_u^a | \mathcal{F}_t \right].$$

2. Définissons  $g_a := \sup\{s \geq 0, X_s = a\}$ . Alors, sous  $\mathbb{Q}_x^{(F)}$  :

- i)  $g_a$  est fini p.s.,
- ii) conditionnellement à  $g_a$ , les processus  $(X_u, u \leq g_a)$  et  $(X_{g_a+u}, u \geq 0)$  sont indépendants,
- iii) le processus  $(X_{g_a+u}, u \geq 0)$  est transient, tend vers  $+\infty$  et sa loi ne dépend pas du choix de la fonctionnelle  $F$ .

En procédant comme dans [NRY09], on peut alors montrer que  $\mathbb{Q}_x^{(F)}$  admet la représentation intégrale :

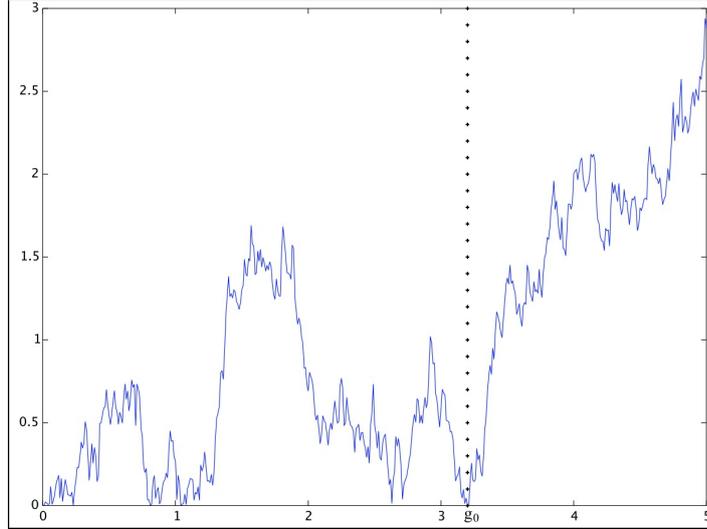
$$\mathbb{Q}_x^{(F)} = \frac{1}{\Phi(x)} \left( \int_0^{+\infty} du q(u; x, a) F_u \mathbb{P}^{x,u,a} \circ \mathbb{P}_a^{\uparrow} + (s(x) - s(a))_+ F_0 \mathbb{P}_x^{\uparrow} \right)$$

où  $\mathbb{P}^{x,u,a}$  désigne la loi du pont de  $X$  de longueur  $u$ , entre  $x$  et  $a$ ,  $\mathbb{P}_x^{\uparrow}$  la loi de  $X$  partant de  $x \geq a$  et conditionné à ne pas toucher  $a$ , et enfin  $\circ$  désigne l'opérateur de concaténation des trajectoires au sens de Biane & Yor [BY87].

L'intuition derrière ce résultat est la suivante : si on regarde simplement notre diffusion initiale  $X$  sur le segment  $[0, t]$ , alors d'après Salminen [Sal97] (ou bien Millar [Mil77] pour un cas plus général), conditionnellement à  $g_a^{(t)}$ , les deux processus  $(X_u, u \leq g_a^{(t)})$  et  $(X_{g_a^{(t)}+u}, u \leq t - g_a^{(t)})$  sont indépendants, le premier se comportant comme un pont et le deuxième comme  $X$  conditionné à ne pas toucher  $a$ . En laissant tendre  $t$  vers l'infini, on construit alors un processus qui satisfait au même découpage, mais sur  $[0, +\infty[$ .

Pour obtenir ce résultat, la principale difficulté est en fait de prouver le lemme II.1, c'est-à-dire d'étudier l'asymptotique de  $\mathbb{E}_x[\Gamma_t]$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . En s'appuyant sur la décomposition des trajectoires présentée ci-dessus, on peut écrire pour  $\lambda > 0$  :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \left[ F_{g_a^{(t)}} \right] dt &= \mathbb{E}_x[F_0] \frac{1 - \mathbb{E}_x[e^{-\lambda T_a}]}{\lambda} \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{P}^{x,t,a}(F_t) q(t; x, a) dt \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \nu^{(a)}([t, +\infty[) dt. \end{aligned}$$


 FIGURE II.1 – Exemple d’une trajectoire d’un processus pénalisé lorsque  $a = 0$ .

On observe donc que l’asymptotique recherchée est liée à celles de  $\mathbb{P}_x(T_a > t)$  et de  $\nu^{(a)}([t, +\infty[)$ . On montre alors, grâce aux hypothèses, que ces deux asymptotiques sont globalement du même ordre de grandeur que  $\nu([t, +\infty[)$ . Dans le cas (a), le résultat s’obtient ensuite directement grâce à un théorème Taubérien, tandis que dans le cas (b), il faut estimer les produits de convolution "à la main" et utiliser le fait que l’on travaille avec une mesure de Lévy.

### II.1.2 Le cas récurrent positif

On considère à présent une diffusion linéaire récurrente  $X$  réfléchi sur  $I = [0, \ell]$  avec  $\ell < +\infty$ . On suppose que  $X$  est à échelle naturelle (c’est-à-dire  $s(x) = x$ ) et que  $m([0, \ell]) < +\infty$  de sorte que  $X$  est récurrente positive. Dans [1], nous avons étudié la pénalisation de  $X$  par la fonctionnelle  $\Gamma = \left( e^{\pm \alpha L_t^0}, t \geq 0 \right)$  où  $\alpha > 0$ . Pour faire le lien avec la section précédente, nous nous limiterons à regarder le cas où  $\Gamma$  est décroissante, c’est-à-dire que nous allons chercher à diminuer le temps que passe  $X$  au voisinage de 0. Pour  $\lambda > 0$ , on note  $u_\lambda$  le noyau résolvant de  $X$  :

$$u_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} q(t; x, y) dt. \quad (\text{II.1})$$

Cette fonction admet une extension méromorphe dans  $\mathbb{C}$  et on dénote par  $r$  la plus petite solution positive de l’équation  $\alpha u_{-r^2}(0, 0) = -1$ . Le résultat que nous avons obtenu dans ce cas est le suivant.

**Théorème II.3.** *Supposons qu’il existe  $\beta > 0$  et  $\varepsilon > 0$  tels que pour  $z \in \mathbb{C}$  avec  $-r - \varepsilon \leq \Re(z) \leq 0$ , on ait :*

$$u_z(0, 0) \Big|_{|z| \rightarrow +\infty} = \mathcal{O} \left( \frac{1}{|z|^\beta} \right).$$

Alors :

1. On a l’asymptotique

$$\mathbb{E}_x \left[ e^{-\alpha L_t^0} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} \frac{u_{-r^2}(0, x)}{\frac{\partial}{\partial z} u_z(0, 0) \Big|_{z=-r^2}} \exp(-r^2 t). \quad (\text{II.2})$$

2. Il existe une mesure  $\mathbb{Q}_x^{(-\alpha)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que

$$\forall s \geq 0, \forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_x \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_s} e^{-\alpha L_t^0} \right]}{\mathbb{E}_x \left[ e^{-\alpha L_t^0} \right]} = \mathbb{Q}_x^{(-\alpha)}(\Lambda_s) = \mathbb{E}_x \left[ M_s^{(-\alpha)} \mathbf{1}_{\Lambda_s} \right]$$

où la martingale  $M^{(-\alpha)}$  s'écrit :

$$M_s^{(-\alpha)} := \exp \left( r^2 s - \alpha L_s \right) \frac{u_{-r^2}(0, X_s)}{u_{-r^2}(0, x)}, \quad s \geq 0.$$

3. Sous  $\mathbb{Q}_x^{(-\alpha)}$ , le processus pénalisé  $X^{(-\alpha)}$  reste une diffusion linéaire récurrente positive réfléchie sur  $[0, \ell]$  dont la fonction d'échelle et la mesure de vitesse sont données par

$$s^{(-\alpha)}(x) = \int_0^x \left( \frac{u_{-r^2}(0, 0)}{u_{-r^2}(0, y)} \right)^2 dy \quad \text{et} \quad m^{(-\alpha)}(x) = \frac{u_{-r^2}(0, x)}{u_{-r^2}(0, 0)} m(x).$$

Ce théorème présente deux différences fondamentales par rapport au cas récurrent nul.

- i) En premier lieu, dans l'asymptotique (II.2), la vitesse de décroissance dépend du choix du poids  $\Gamma$ , c'est-à-dire ici de  $\alpha$ . Ce n'était évidemment pas le cas dans le lemme II.1 où la fonction  $\eta$  était indépendante de  $F$ .
- ii) En second lieu, on déduit du point 3. que  $\mathbb{Q}^{(-\alpha)}(L_\infty^0 = +\infty) = 1$ , ce qui signifie que dans ce cas, la pénalisation par une exponentielle décroissante n'est pas suffisante pour rendre le processus transient. Néanmoins, on peut tout de même se convaincre que le temps local a été réduit en un certain sens. En effet, les processus  $X$  et  $X^{(-\alpha)}$  étant des diffusions linéaires récurrentes positives, ils convergent tout deux en loi vers des variables aléatoires  $X_\infty$  et  $X_\infty^{(-\alpha)}$ . On peut alors montrer que pour  $\varepsilon$  suffisamment petit,

$$\mathbb{Q}^{(-\alpha)} \left( X_\infty^{(-\alpha)} < \varepsilon \right) < \mathbb{P}(X_\infty < \varepsilon)$$

ce qui signifie heuristiquement que le processus pénalisé passe bien moins de temps au voisinage de 0 que le processus initial.

La preuve de ce résultat est, dans l'esprit, similaire à celles du cas récurrent nul. Pour calculer l'asymptotique de  $\mathbb{E}_x \left[ e^{-\alpha L_t^0} \right]$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ , on écrit pour  $\lambda > 0$  grâce au théorème de Fubini :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \mathbb{E}_x \left[ e^{-\alpha L_t^0} \right] dt = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - \frac{\alpha u_\lambda(x, 0)}{\alpha u_\lambda(0, 0) + 1} \right) \quad (\text{II.3})$$

ce qui ramène le problème à l'étude de la résolvante de  $X$ . L'idée est ensuite de prolonger analytiquement cette relation pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  puis d'appliquer le théorème des résidus sur un contour bien choisi.

## II.2 Etude sous différentes horloges

Dans un souci d'universalité, les résultats que nous avons obtenus précédemment ont deux inconvénients :

- Ils reposent tous deux sur une hypothèse de décroissance plus ou moins polynomiale de la résolvante, ou de manière équivalente de la mesure de Lévy de l'inverse du temps local.

- Ces résultats diffèrent fondamentalement suivant que l'on regarde une diffusion récurrente nulle ou récurrente positive.

Les pénalisations que nous avons regardées précédemment étaient toutes basées sur un temps  $t$  déterministe que l'on laissait tendre vers  $+\infty$ . Nous allons regarder ici des pénalisations à l'aide de différentes horloges, c'est-à-dire de suites de temps aléatoires convergeant p.s. vers l'infini. Cette idée apparaît déjà dans les travaux de Knight [Kni69] sur les processus tabous, ou plus récemment dans Yano & Yano [YY15] dans l'étude de différents conditionnements possibles d'une diffusion à ne pas toucher 0. Nous présentons ci-dessous des résultats simplifiés de pénalisation pour différentes horloges.

### II.2.1 Pénalisations par le temps local

Nous considérons toujours une diffusion linéaire définie sur  $I = [0, \ell)$  avec 0 une frontière instantanément réfléchissante, et  $\ell \in ]0, +\infty]$ . On suppose à nouveau que  $X$  est à échelle naturelle, et pour simplifier, nous énoncerons nos résultats dans le cas où  $X_0 = 0$ . Posons

$$\pi_0 = \frac{1}{m(I)} \quad \text{et} \quad h_0(x) = x - \pi_0 \int_0^x m(y) dy.$$

Notre objectif à présent est d'obtenir, pour certaines suites de temps d'arrêt  $(\eta_r, r \geq 0)$  tendant vers  $+\infty$  p.s., l'existence d'une mesure  $\mathbb{Q}^{(\eta)}$  telle que

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\Lambda_u} f(L_{\eta_r}^0)]}{\mathbb{E} [f(L_{\eta_r}^0)]} = \mathbb{Q}^{(\eta)}(\Lambda_u).$$

Moralement, le problème consiste donc à étudier la famille de martingales  $(N^r, r \geq 0)$  définies par :

$$N_t^r = \mathbb{E} [f(L_{\eta_r}^0) | \mathcal{F}_t], \quad t \geq 0.$$

La preuve des théorèmes qui suivent se découpe à chaque fois en trois temps : on calcule tout d'abord l'asymptotique de  $\mathbb{E} [f(L_{\eta_r}^0)]$  lorsque  $r \rightarrow +\infty$ , puis on étudie la convergence p.s. de la famille  $(N^r)$  en utilisant la bonne renormalisation, pour enfin établir sa convergence  $L^1$ . Nous présentons ici quatre exemples de pénalisations par différentes horloges, puis nous proposons une étude comparative des mesures pénalisées obtenues.

### Horloge exponentielle

Commençons par regarder le cas le plus simple, à savoir celui d'une horloge exponentielle ( $\mathbf{e}_\lambda = \mathbf{e}/\lambda$ ,  $\lambda > 0$ ) où  $\mathbf{e}$  est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, indépendante de  $X$ . Il est bien connu que nombre de résultats en probabilité se simplifient lorsqu'on les regarde au travers d'une horloge exponentielle.

**Théorème II.4.** *Soit  $f$  une fonction positive d'intégrale égale à 1 sur  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une mesure  $\mathbb{Q}^{(h_0, f)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que*

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\Lambda_u} f(L_{\mathbf{e}_\lambda}^0)]}{\mathbb{E} [f(L_{\mathbf{e}_\lambda}^0)]} = \mathbb{Q}^{(h_0, f)}(\Lambda_u) = \mathbb{E} [M_u^{h_0, f} \mathbf{1}_{\Lambda_u}]$$

où la  $\mathbb{P}$ -martingale  $M^{h_0, f}$  est définie par

$$M_t^{h_0, f} = h_0(X_t) f(L_t) + \int_0^{+\infty} f(L_t + r) dr + \pi_0 \int_0^t f(L_r) dr, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.4})$$

Il est intéressant de noter que ce résultat ne présuppose aucune condition sur le comportement de la diffusion, ni sur la frontière  $\ell$ . La preuve repose sur une généralisation de la formule (II.3) que l'on démontre grâce à la théorie des excursions :

$$\mathbb{E}_x[f(L_{e_\lambda})] = f(0) \left(1 - \frac{u_\lambda(x, 0)}{u_\lambda(0, 0)}\right) + \frac{u_\lambda(x, 0)}{(u_\lambda(0, 0))^2} \int_0^\infty f(z) e^{-z/u_\lambda(0, 0)} dz. \quad (\text{II.5})$$

### Horloge à partir des temps d'atteintes

Choisissons à présent comme horloge  $T_a = \inf\{t \geq 0, X_t = a\}$  le premier temps d'atteinte du niveau  $a \in I$  par  $X$ . On suppose dans ce cas que  $\ell$  est une barrière naturelle, afin que

$$\lim_{a \uparrow \ell} T_a = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

**Théorème II.5.** *Soit  $f$  une fonction positive d'intégrale égale à 1 sur  $\mathbb{R}^+$ . Il existe une mesure  $\mathbb{Q}^{(s,f)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que*

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{a \uparrow \ell} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Lambda_u} f(L_{T_a}^0)]}{\mathbb{E}[f(L_{T_a}^0)]} = \mathbb{Q}^{(s,f)}(\Lambda_u) = \mathbb{E}[M_u^{s,f} \mathbf{1}_{\Lambda_u}]$$

où  $M^{s,f}$  est la  $\mathbb{P}$ -martingale définie par

$$M_t^{s,f} = X_t f(L_t) + \int_0^{+\infty} f(L_t + r) dr, \quad t \geq 0. \quad (\text{II.6})$$

Remarquons ici que si  $\pi_0 = 0$ , alors  $h_0(x) = s(x) = x$  et les deux mesures  $\mathbb{Q}^{(h_0,f)}$  et  $\mathbb{Q}^{(s,f)}$  sont alors égales. C'est en particulier le cas pour le mouvement brownien, ou plus généralement pour les processus de Bessel de dimension  $\delta \in ]0, 2[$ . Par contre, dès lors que  $\pi_0 > 0$ , c'est-à-dire que  $X$  est récurrente positive, nous obtenons deux martingales  $M^{h_0,f}$  et  $M^{s,f}$  différentes, que l'on peut voir comme deux généralisations possibles des martingales d'Azéma-Yor.

La première partie de la preuve de ce résultat s'obtient en appliquant la formule précédente (II.5) au processus  $(X_{t \wedge T_a}, t \geq 0)$ . En laissant tendre  $\lambda$  vers 0, on obtient alors pour  $x < a$  :

$$\mathbb{E}_x[f(L_{T_a})] = \frac{1}{a} \left( x f(0) + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \int_0^\infty e^{-u/a} f(u) du \right).$$

### Horloge à partir de l'inverse du temps local

Choisissons ici comme horloge  $(\tau_u^a, a \in I)$  pour un certain  $u > 0$  fixé. A nouveau, pour s'assurer que

$$\lim_{a \uparrow \ell} \tau_u^a = +\infty \quad \mathbb{P} - p.s.$$

nous supposons que  $X$  est récurrente et  $\ell$  est, soit une frontière naturelle, soit une frontière entrante.

**Théorème II.6.** *Soit  $f$  une fonction positive d'intégrale égale à 1 sur  $\mathbb{R}^+$ . On a*

$$\forall t \geq 0, \forall \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, \quad \lim_{a \uparrow \ell} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\Lambda_t} f(L_{\tau_u^a}^0)]}{\mathbb{E}[f(L_{\tau_u^a}^0)]} = \mathbb{Q}^{(s,f)}(\Lambda_t) = \mathbb{E}[M_t^{s,f} \mathbf{1}_{\Lambda_t}]$$

où la mesure  $\mathbb{Q}^{(s,f)}$  et la martingale  $M^{s,f}$  sont définies dans le théorème II.5.

Notons que bien que l'on retrouve la même mesure pénalisée que dans le théorème II.5, les preuves des deux théorèmes sont assez différentes. On peut toutefois observer que l'on a l'égalité en loi  $\tau_u^a \stackrel{(\text{loi})}{=} T_a + \widehat{\tau}_u^a$  où  $\widehat{\tau}_u^a$  est l'inverse du temps local d'une copie indépendante de  $X$  issue de  $a$ , mais ce résultat à lui seul ne permet pas de passer d'un théorème à l'autre.

L'idée ici est de montrer que lorsque  $X_0 = a$ , le processus  $(L_{\tau_u^a}^0, u \geq 0)$  est un processus de Poisson composé dont la transformée de Laplace est donnée par

$$\mathbb{E}_a \left[ e^{-\lambda L_{\tau_u^a}^0} \right] = e^{-\frac{u\lambda}{1+\lambda a}}. \quad (\text{II.7})$$

Cette transformée de Laplace peut s'inverser explicitement, ce qui permet d'obtenir la loi de  $L_{\tau_u^a}$  à l'aide de fonctions de Bessel modifiées.

Concluons finalement cette section en choisissant pour horloge  $(\tau_u^a, u > 0)$  avec cette fois  $a \in I$  fixé. On suppose toujours que  $X$  est récurrente et que  $\ell$  est, soit une frontière naturelle, soit une frontière entrante. Par contre, nous allons nous restreindre au cas où  $f(u) = \beta e^{-\beta u}$  est une fonction exponentielle avec  $\beta > 0$ , pour laquelle on dispose de la transformée de Laplace (II.7).

**Théorème II.7.** *Il existe une mesure  $\mathbb{Q}^{(\beta,a)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que*

$$\forall t \geq 0, \forall \Lambda_t \in \mathcal{F}_t, \quad \lim_{u \uparrow +\infty} \frac{\mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_t} e^{-\beta L_{\tau_u^a}^0} \right]}{\mathbb{E} \left[ e^{-\beta L_{\tau_u^a}^0} \right]} = \mathbb{Q}^{(\beta,a)}(\Lambda_t) = \mathbb{E} \left[ M_t^{\beta,a} \mathbf{1}_{\Lambda_t} \right]$$

où la  $\mathbb{P}$ -martingale  $M^{\beta,a}$  est définie par :

$$M_t^{\beta,a} = (1 + \beta(X_t \wedge a)) \exp \left( -\beta L_t^0 + \frac{\beta}{1 + \beta a} L_t^a \right), \quad t \geq 0.$$

Dans le cas du mouvement brownien, ce type de martingale faisant intervenir plusieurs temps locaux a été étudié par Roynette, Vallois & Yor [RVY06b] dans le cadre des pénalisations de type Feynman-Kac, puis généralisé dans [RY10] pour des fonctionnelles additives.

## II.2.2 Comparaison entre les mesures pénalisées

L'objectif des pénalisations présentées ci-dessus était de limiter le temps que passe la diffusion au voisinage de 0. Afin de comparer les efficacités de ces différentes pénalisations, on peut s'intéresser plus précisément à la variable aléatoire  $L_\infty^0$ , qui rappelons-le est p.s. infinie sous  $\mathbb{P}$ . En appliquant le théorème d'arrêt de Doob à nos trois martingales  $M^{s,f}$ ,  $M^{h_0,f}$  et  $M^{\beta,a}$ , on obtient alors trois situations différentes :

- i)  $\mathbb{Q}^{s,f}$  est une pénalisation forte :  $\mathbb{Q}^{s,f}(L_\infty^0 < +\infty) = 1$  dans tous les cas.
- ii)  $\mathbb{Q}^{h_0,f}$  est une pénalisation intermédiaire :

$$\begin{cases} \mathbb{Q}^{h_0,f}(L_\infty^0 < +\infty) = 1 & \text{si } \pi_0 = 0, \\ \mathbb{Q}^{h_0,f}(L_\infty^0 < +\infty) = 0 & \text{si } \pi_0 > 0. \end{cases}$$

- iii)  $\mathbb{Q}^{\beta,a}$  est une pénalisation faible :  $\mathbb{Q}^{\beta,a}(L_\infty^0 < +\infty) = 0$  dans tous les cas.

Notons que lorsque  $L_\infty^0 < +\infty$  sous l'une des mesures pénalisées, la loi de  $L_\infty^0$  est toujours absolument continue de densité  $f$ .

## II.3 L'intégrale du mouvement brownien

Pour conclure ce chapitre sur les pénalisations, nous allons à présent nous concentrer sur le cas de l'intégrale du mouvement brownien :

$$X_t = \int_0^t B_u du, \quad t \geq 0,$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard. On note comme précédemment  $\mathbb{P}_{(x,y)}$  la loi du couple  $(X, B)$  lorsque  $(X_0, B_0) = (x, y)$ , et on pose

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(X_t \in du, B_t \in dv) = p_t(x, y; u, v) dudv.$$

Les lois de nombreuses fonctionnelles du couple  $(X, B)$  ont été calculées par Lachal : citons entre autres les temps d'atteinte successifs [Lac97], les derniers temps de passage [Lac94], la loi des excursions [Lac03], l'étude des temps de sortie d'un intervalle [Lac00, Lac06], ...

Le conditionnement de  $X$  à rester positif (en d'autres termes la pénalisation de  $X$  par son premier temps d'atteinte) a été étudiée en détail dans [GJW99]. Nous nous proposons ici de commencer par regarder la pénalisation de  $X$  par son  $n^{\text{ème}}$  temps de passage.

### II.3.1 Pénalisation par des analogues du temps local

Nous allons, dans un premier temps, essayer de généraliser les résultats de pénalisation par le temps local obtenus dans la section II.1 au cas de l'intégrale du mouvement brownien. Définissons pour ce faire les temps de passage successifs

$$T_0^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad T_0^{(n)} = \inf\{t > T_0^{(n-1)}, X_t = 0\}, \quad n \geq 1.$$

La suite  $(T_0^{(n)}, n \geq 0)$  est en quelque sorte l'analogue de l'inverse du temps local en 0  $(\tau_u^0, u \geq 0)$  pour les diffusions étudiées précédemment. Fixons un seuil  $n \in \mathbb{N}^*$ . Dans le cas de la valeur absolue du mouvement brownien, le théorème II.2 donne avec comme fonctionnelle  $F_t = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{\tau_n^0 \geq t\}} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{L_t^0 \leq n\}}$  le résultat pour tout  $u > 0$  et tout  $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$  :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(\Lambda_u \cap \{\tau_n^0 \geq t\})}{\mathbb{P}(\tau_n^0 \geq t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}(\Lambda_u \cap \{L_t^0 \leq n\})}{\mathbb{P}(L_t^0 \leq n)} = \mathbb{E}[M_u^{(n)} \mathbf{1}_{\Lambda_u}] \quad (\text{II.8})$$

où la martingale  $M^{(n)}$  dépend explicitement de  $n$  et est donnée par

$$M_t^{(n)} = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{L_t^0 \leq n\}} |B_t| + \frac{(n - L_t^0)_+}{n}, \quad t \geq 0.$$

Par analogie, si l'on regarde à présent la pénalisation de l'intégrale du mouvement brownien par  $\Gamma_t = \frac{1}{n} \mathbf{1}_{\{T_0^{(n)} \geq t\}}$ , on obtient le résultat suivant.

**Théorème II.8.** *Soit  $x > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ .*

1. *On a l'asymptotique :*

$$\mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} \geq t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{1/4} \Gamma(1/4)}{\sqrt{\pi}(n-1)!} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^n \frac{(\ln(t))^{n-1}}{t^{1/4}} h_\infty(x, y) \quad (\text{II.9})$$

où la fonction  $h_\infty$  ne dépend pas de  $n$  et s'écrit :

$$h_\infty(x, y) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} w^{3/2} (p_t(x, y; 0, -w) - p_t(x, y; 0, w)) dt dw.$$

A des facteurs  $\sqrt{2}$  de renormalisation près, cette fonction est bien sûr la même que celle du corollaire I.2 lorsque  $\alpha = 2$ .

2. Pour tout  $u \geq 0$  et  $\Lambda_u \in \mathcal{F}_u$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{P}_{(x,y)} \left( \Lambda_u \cap \{T_0^{(n)} \geq t\} \right)}{\mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} \geq t)} = \mathbb{Q}_{(x,y)}^\uparrow(\Lambda_u)$$

où  $\mathbb{Q}^\uparrow$  désigne la loi de  $X$  conditionné à ne pas toucher 0, et ne dépend donc pas de  $n$ .

3. En particulier  $\mathbb{Q}_{(x,y)}^\uparrow(T_0 = +\infty) = 1$ .

Par conséquent, la pénalisation par le  $n^{\text{ème}}$  temps de passage conduit au même processus pénalisé que la pénalisation par le premier temps de passage, ce qui est bien sûr très différent de (II.8) pour le mouvement brownien (ou plus généralement pour les diffusions linéaires). Ce phénomène vient du fait que les temps d'atteinte successifs de  $X$  n'ont pas la même asymptotique, à cause des termes logarithmiques dans (II.9).

La preuve du point 1. repose sur un calcul d'asymptotique grâce à la loi explicite du couple  $(B_{T_0^{(n)}}, T_0^{(n)})$  obtenue par Lachal [Lac97], tandis que le point 2. repose sur l'utilisation de la propriété de Markov pour le couple  $(X, B)$ .

Notons que l'on peut également adopter un autre point de vue. Si l'on considère comme analogue du temps local  $L_t^0$  le nombre de zéros de  $X$  dans l'intervalle  $[0, t]$ , alors on peut regarder des pénalisations directement par  $N_t = \#\{s \leq t, X_s = 0\}$ . On obtient alors un résultat plus en accord avec le cas Markovien, dans le cas où l'on choisit un poids exponentiel.

**Théorème II.9.** Soit  $\lambda > 0$ .

1. On a l'asymptotique

$$\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\lambda N_t} \right] \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa_\lambda \frac{h_\lambda(x, y)}{t^{\theta_\lambda}} \quad (\text{II.10})$$

où

$$\theta_\lambda = \frac{3}{2\pi} \text{Arccos} \left( \frac{e^{-\lambda}}{2} \right) - \frac{1}{2}$$

et la fonction  $h_\lambda$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$h_\lambda(x, y) = e^{-\lambda} \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ |B_{T_0}|^{2\theta_\lambda} \right].$$

2. Il existe une mesure  $\mathbb{Q}^{(\lambda)}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$  telle que

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\lambda N_t} \mathbf{1}_{\Lambda_u} \right]}{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\lambda N_t} \right]} = \mathbb{Q}^{(\lambda)}(\Lambda_u) = \mathbb{E}_{(x,y)} \left[ M_u^{(\lambda)} \mathbf{1}_{\Lambda_u} \right]$$

où la martingale  $M^{(\lambda)}$  est donnée par

$$M_u^{(\lambda)} = e^{-\lambda N_u} h_\lambda(X_u, B_u), \quad u \geq 0.$$

Ce résultat peut bien sûr être vu comme une généralisation du cas précédent lorsque  $n = 1$ . En effet, si l'on fait tendre formellement  $\lambda$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\mathbb{P}(T_0^{(1)} > t) = \mathbb{P}(N_t = 0) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa_\infty \frac{h_\infty(x, y)}{t^{\theta_\infty}}$$

où  $\theta_\infty = \frac{1}{4}$  et la définition de  $h_\infty$  coïncide avec celle donnée dans le corollaire I.2 pour  $x > 0$  et  $y \in \mathbb{R}$ .

La preuve de ce résultat repose sur la décomposition

$$\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ e^{-\lambda N_t} \right] = -\mathbb{P}_{(x,y)}(T_0 > t) + (e^\lambda - 1) \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\lambda n} \mathbb{P}_{(x,y)}(T_0^{(n)} > t)$$

qui ramène le problème à étudier les temps de passage successifs de  $X$ . Notons que bien que  $X$  soit récurrent nul, on retrouve, en un sens, le même type de phénomène que dans le théorème II.3, c'est-à-dire que la vitesse de décroissance dans l'équivalent (II.10) dépend fortement du poids choisi (i.e.  $\theta_\lambda$  dépend de  $\lambda$ ).

### II.3.2 Pénalisation par le dernier temps de passage au niveau zéro

Nous présentons dans cette section la pénalisation de l'intégrale du mouvement brownien par le poids  $(\Gamma_t = \varphi(g_0^{(t)}), t \geq 0)$  où  $\varphi$  est une fonction décroissante à support compact sur  $[0, +\infty[$  et

$$g_0^{(t)} = \sup\{s \leq t, X_s = 0\}.$$

Ce type de pénalisation correspond ainsi à celle du théorème II.2 en choisissant pour  $F$  une fonction déterministe. Nous obtenons alors le résultat suivant.

#### Théorème II.10.

i) Il existe une mesure  $\mathbb{Q}_{(x,y)}^\varphi$  telle que

$$\forall u \geq 0, \forall \Lambda_u \in \mathcal{F}_u, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_u} \varphi(g_0^{(t)}) \right]}{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \varphi(g_0^{(t)}) \right]} = \mathbb{Q}_{(x,y)}^\varphi(\Lambda_u) = \frac{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ \mathbf{1}_{\Lambda_u} M_u^\varphi \right]}{\mathbb{E}_{(x,y)} \left[ M_0^\varphi \right]}$$

où la martingale  $M^\varphi$  est définie par

$$\begin{aligned} M_t^\varphi &= \varphi(g_0^{(t)}) (h_\infty(X_t, B_t) \mathbf{1}_{\{X_t \geq 0\}} + h_\infty(-X_t, -B_t) \mathbf{1}_{\{X_t \leq 0\}}) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} |z|^{3/2} \int_0^{+\infty} \varphi(t+s) p_s(X_t, B_t; 0, z) dz ds. \end{aligned}$$

ii) Soit  $g_0 = \sup\{u \geq 0, X_u = 0\}$ . Alors,  $\mathbb{Q}_{(x,y)}^\varphi(g_0 < +\infty) = 1$  et conditionnellement à  $g_0$  et  $B_{g_0}$  :

i) les processus  $(X_u, u \leq g_0)$  et  $(X_{u+g_0}, u \geq 0)$  sont indépendants,

ii) le processus  $(X_{u+g_0}, u \geq 0)$  a la même loi que l'intégrale du mouvement brownien partant de  $(0, B_{g_0})$  et conditionnée à rester positive si  $B_{g_0} > 0$ , ou conditionnée à rester négative si  $B_{g_0} < 0$ .

La preuve du point 1. de ce théorème repose sur des calculs explicites à partir de [Lac94], tandis que le point 2. repose sur la formule d'élargissement progressif de filtration, telle que présentée par exemple dans [MY06]. Notons que ce théorème rappelle cette fois fortement celui obtenu dans le cas classique du mouvement brownien. Nous étudions également dans [5] la pénalisation de  $X$  par son suprémum : comme pour  $g_0^{(t)}$ , les résultats sont dans ce cas sans surprise par rapport au cas brownien.

# Chapitre III

## Valeurs extrêmes

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats issus des publications :

- [9] C. Profeta. A remark on positive sojourn times of symmetric processes. *J. Appl. Prob.*, Vol. **55**, 69-81, 2018.
- [10] C. Profeta. On the supremum of products of symmetric stable processes. *Electron. Commun. Probab.*, Vol. **23**, paper no. 97, 2018.
- [13] C. Profeta and T. Simon. Cramér’s estimate for stable processes with power drift. *Electron. J. Probab.*, Vol. **24**, paper no. 17, 2019.

Nous allons nous intéresser à présent aux valeurs extrêmes d’un processus. Si  $X$  est un processus réel défini sur un intervalle  $I$ , nous aimerions estimer la quantité

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in I} X_t \geq x\right), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (\text{III.1})$$

Ce type d’étude est par exemple lié au problème de ruine pour une compagnie d’assurance. Le modèle initial, dit de Cramér–Lundberg, propose une décomposition de  $X$  sous la forme :

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i - ct, \quad t \geq 0,$$

où  $c$  est une constante strictement positive,  $N$  est un processus de Poisson et les variables aléatoires  $(\xi_i, i \in \mathbb{N}^*)$  sont i.i.d. et positives. Le premier terme représente les arrivées (ponctuelles) de sinistres, tandis que le deuxième représente la prime perçue par l’assureur. Celui-ci doit donc s’assurer que la différence  $X$  soit toujours inférieure au montant de ses réserves  $x$ . De très nombreuses généralisations ont été proposées, par exemple lorsque l’on modélise les arrivées de sinistres par un processus de Lévy [KKM04], ou bien que l’on ajoute le paiement de dividendes ou de taxes [Kyp14, Chapitre 10].

### Plan du chapitre

Notre objectif dans ce chapitre est d’étudier l’asymptotique (III.1) pour deux familles de processus.

1. Nous commencerons par considérer le cas où  $I = [0, +\infty[$  et  $X$  s’écrit comme la différence d’un processus de Lévy  $\alpha$ -stable et d’une fonction puissance  $t \rightarrow t^\gamma$  avec  $\gamma\alpha > 1$ . La difficulté vient ici du fait que lorsque  $\gamma \neq 1$ , le processus  $X$  n’est plus un processus de Lévy, et l’on ne peut donc plus utiliser les résultats de la théorie

des fluctuations. Nous présenterons également des résultats similaires lorsque l'on remplace le processus de Lévy stable par son intégrale fractionnaire.

2. Dans un second temps, nous étudierons l'asymptotique (III.1) lorsque  $I = [0, 1]$  et  $X$  est un produit de processus symétriques stables. Nous regarderons également la queue basse, à savoir l'asymptotique

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in I} X_t \leq \varepsilon\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

qui s'avère beaucoup plus difficile à obtenir.

3. Enfin, nous nous autoriserons une petite digression sur les temps de séjours de produits de processus stables, en proposant d'abord un résultat de convergence général avant de nous focaliser sur le cas d'un produit de deux mouvements browniens.

## III.1 Estimées de Cramér

### III.1.1 Processus de Lévy stables

Nous commençons par étudier le cas d'un processus de Lévy  $\alpha$ -stable  $L$  perturbé par une dérive puissance. On suppose ici que le paramètre d'autosimilarité  $\alpha \in ]0, 2]$  et que le paramètre de positivité  $\rho \in ]0, 1]$ . Notons donc que contrairement au chapitre I, nous autorisons ici les subordinateurs. Pour  $\gamma > 1/\alpha$ , on considère la variable aléatoire finie p.s.

$$\mathbf{M}_{\alpha, \rho, \gamma} = \sup_{t \geq 0} \{L_t - t^\gamma\}$$

et l'on s'intéresse dans cette partie au comportement asymptotique

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha, \rho, \gamma} \geq x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Essentiellement deux cas ont déjà été traités dans la littérature. Tout d'abord, le premier cas facile à obtenir est celui où  $\gamma = 1$  et  $\rho = \frac{1}{\alpha} < 1$ . En effet, le processus  $(L_t - t, t \geq 0)$  est alors un processus de Lévy spectralement négatif, et l'on a l'égalité classique

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha, 1/\alpha, 1} \geq x) = e^{-x}. \quad (\text{III.2})$$

Plus généralement, Bertoin & Doney [BD94] ont étudié ce type d'asymptotique lorsque  $L$  admet des moments exponentiels unilatéraux. Leur preuve repose sur l'utilisation des subordinateurs d'échelle, et est en fait une adaptation de l'approche utilisée par Feller [Fel71] pour traiter le cas des marches aléatoires.

Le second cas résolu est le cas brownien, à savoir  $\alpha = 2$  et  $2\gamma > 1$ . En effet, Hüsler & Piterbarg [HP99] ont étudié l'asymptotique (III.1) pour des processus gaussiens satisfaisant une certaine propriété de scaling et des dérivées puissances générales. Dans le cas du mouvement brownien avec dérive parabolique, leur résultat fournit par exemple l'estimée :

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{2, 1/2, 2} \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{4}{3\sqrt{3}} x^{3/2}\right). \quad (\text{III.3})$$

Cette estimée a été raffinée par [GT11], où un développement asymptotique à l'infini complet est obtenu. En fait, dans ce cas, la loi de  $\mathbf{M}_{2, 1/2, 2}$  a été calculée explicitement par Groeneboom [Gro89] et fait intervenir la fonction d'Airy. Nous généralisons ici ces deux résultats dans le théorème suivant.

**Théorème III.1.**

1. Si  $L$  admet des sauts positifs, on a l'asymptotique

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha,\rho,\gamma} \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \Gamma(\alpha - 1/\gamma) \Gamma(1 + 1/\gamma) x^{\frac{1}{\gamma} - \alpha}.$$

2. Si  $L$  n'a pas de sauts positifs, on a l'asymptotique

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha,1/\alpha,\gamma} \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\alpha - 1}{\gamma\alpha - 1}} \exp\left(-(\alpha - 1) \gamma^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\gamma\alpha - 1)^{\frac{1-\gamma\alpha}{\gamma(\alpha-1)}} x^{\frac{\gamma\alpha-1}{\gamma(\alpha-1)}}\right).$$

Remarquons que la dichotomie entre les cas avec et sans sauts positifs (ou encore de manière équivalente ici avec ou sans existence de moments exponentiels) est classique. En particulier, dans le cas avec sauts positifs, on obtient en laissant tendre formellement  $\gamma \rightarrow +\infty$  :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,1]} L_t > x\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \Gamma(\alpha) x^{-\alpha},$$

et l'on retrouve ainsi une estimée standard, voir par exemple Bertoin [Ber96].

Le point 1. de ce théorème s'obtient à l'aide de la formule de compensation pour les processus de Lévy, en remarquant que

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha,\rho,\gamma} \geq x) = \mathbb{P}(T_x < +\infty)$$

où  $T_x$  est le premier instant où  $L$  dépasse la courbe  $t \mapsto t^\gamma + x$  :

$$T_x = \inf\{t \geq 0, L_t > t^\gamma + x\}.$$

Dans ce cas, on peut également montrer que la loi renormalisée de l'overshoot  $K_x = L_{T_x} - T_x^\gamma - x$  converge vers une distribution de Pareto de paramètre  $\alpha - \frac{1}{\gamma}$  :

$$\mathcal{L}\left(\frac{K_x}{x} \mid T_x < +\infty\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \text{Pareto}(\alpha - 1/\gamma).$$

A nouveau, ce type de comportement asymptotique est en fait très différent du cas des processus de Lévy admettant des moments exponentiels finis. En effet, si l'on considère par exemple un subordonateur stable tempéré, c'est-à-dire dont la mesure de Lévy admet pour densité

$$\nu(x) = \frac{\alpha e^{-cx}}{\Gamma(1 - \alpha)x^{\alpha+1}} \mathbf{1}_{\{x>0\}} \quad \text{avec } c \in ]0, 1[,$$

et une dérive linéaire ( $\gamma = 1$ ), alors d'après la remarque 2 de [BD94], l'overshoot  $K_x$  converge sans renormalisation dans ce cas vers une variable aléatoire finie.

Le point 2. de ce théorème est lui plus compliqué à obtenir, et repose essentiellement sur la propriété de Markov ainsi que l'absence de sauts négatifs, au travers de la relation, pour  $\nu > -1$  :

$$\int_0^\infty t^\nu \mathbb{P}(L_t > t^\gamma + x) dt = \frac{1}{1 + \nu} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_x < +\infty\}} T_x^{1+\nu} \left(1 + \varphi_{\alpha,\gamma}^{-1}(T_x^{1/\alpha - \gamma} L_1^+)\right)^{1+\nu} - 1\right]$$

où  $\varphi_{\alpha,\gamma}(t) = \frac{(1+t)^{\gamma-1}}{t^{1/\alpha-1}}$ , et dans le membre de droite,  $T_x$  et  $L_1$  sont indépendants. En choisissant astucieusement la valeur de  $\nu$ , on peut ainsi obtenir une estimée de la probabilité  $\mathbb{P}(T_x < +\infty)$  (dans le membre de droite) uniquement à partir de la loi marginale de  $L$  (dans le membre de gauche).

**Remarque III.2.** Les estimées que nous obtenons lorsque  $\gamma = 2$  rappellent en un sens celles obtenues par Bertoin [Ber99] dans l'étude de l'équation de Burger avec une donnée initiale stable. Plus précisément, si l'on pose

$$\underline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,\gamma}^{[x]} = \sup_{t \in [0,x]} \{L_t - t^\gamma\} \quad \text{and} \quad \overline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,\gamma}^{[x]} = \sup_{t \geq x} \{L_t - t^\gamma\},$$

le résultat principal de [Ber99] énonce que

$$\mathbb{P}\left(\overline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]} \geq \underline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]}\right) \asymp x^{1-2\alpha}, \quad x \rightarrow +\infty$$

si  $L$  admet des sauts positifs, et

$$\ln\left(\mathbb{P}\left(\overline{\mathbf{M}}_{\alpha,1/\alpha,2}^{[x]} \geq \underline{\mathbf{M}}_{\alpha,1/\alpha,2}^{[x]}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\kappa_\alpha x^{\frac{2\alpha-1}{\alpha-1}}$$

avec une constante  $\kappa_\alpha \in ]0, +\infty[$  explicite si  $L$  n'a pas de sauts positifs. Moralement, lorsque  $x$  est grand, l'évènement

$$\left\{\overline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]} \geq \underline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]}\right\}$$

revient à regarder si le processus translaté  $L_t - L_x - (t-x)^2$  a dépassé le niveau  $x^2$  pour un certain  $t > x$ . Il n'est donc pas surprenant que les asymptotiques de

$$\mathbb{P}\left(\overline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]} \geq \underline{\mathbf{M}}_{\alpha,\rho,2}^{[x]}\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\alpha,\rho,2} \geq x^2\right)$$

soient comparables.

### III.1.2 Cas particuliers

#### Lévy stable sans sauts négatifs et dérive linéaire

Dans le cas où  $\alpha > 1$ ,  $\rho = 1 - \frac{1}{\alpha}$  et  $\gamma = 1$ , la transformée de Laplace de  $\mathbf{M}_{\alpha,1-1/\alpha,1}$  peut s'obtenir à l'aide de la formule de Zolotarev [Zol86] :

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda \mathbf{M}_{\alpha,1-1/\alpha,1}}\right] = \frac{1}{1 + \lambda^{\alpha-1}}.$$

Il s'ensuit que  $\mathbf{M}_{\alpha,1-1/\alpha,1}$  suit la loi de Mittag-Leffler de paramètre  $\alpha - 1$ , et l'on a

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\alpha,1-1/\alpha,1} > x\right) = E_{\alpha-1}(-x^{\alpha-1})$$

où la fonction de Mittag-Leffler  $E_{\alpha-1}$  est définie par

$$E_{\alpha-1}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1 + (\alpha-1)n)}.$$

On dispose dans ce cas d'un développement asymptotique complet :

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\alpha,1-1/\alpha,1} > x\right) \sim \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^{-(\alpha-1)n}}{\Gamma(1 - (\alpha-1)n)}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

### Convergence du temps d'atteinte

Dans le cas sans saut positif, c'est-à-dire  $\alpha > 1$  et  $\rho = \frac{1}{\alpha}$ , on peut également démontrer une convergence en loi du temps d'atteinte renormalisé vers une loi normale. En effet, observons tout d'abord que par scaling,  $T_x \stackrel{(\text{loi})}{=} x^{\frac{1}{\gamma}} \widehat{T}_x$  où

$$\widehat{T}_x \stackrel{(\text{loi})}{=} \inf \left\{ t \geq 0, L_t = (t^\gamma + 1)x^{1 - \frac{1}{\alpha\gamma}} \right\}.$$

Définissons ensuite pour simplifier les notations

$$\eta(s) = \frac{s^\gamma + 1}{s^{1/\alpha}} \quad \text{et} \quad s_* = \operatorname{argmin}(\eta) = (\alpha\gamma - 1)^{-1/\gamma}.$$

La fonction  $\eta$  apparaît naturellement au travers de la relation

$$\mathbb{P}(L_t \geq (t^\gamma + 1)x^{1 - \frac{1}{\alpha\gamma}}) = \mathbb{P}(L_1 \geq x^{1 - \frac{1}{\alpha\gamma}} \eta(t)).$$

Posons finalement :

$$\Delta_x = x^{\frac{\alpha\gamma - 1}{2\gamma(\alpha - 1)}} \left( s_* - \widehat{T}_x \right).$$

**Théorème III.3.** *Supposons que  $L$  n'a pas de sauts positifs. Alors, conditionnellement à l'évènement  $\{\widehat{T}_x < +\infty\}$ , l'écart  $\Delta_x$  converge lorsque  $x \rightarrow +\infty$  vers une loi normale :*

$$\mathbb{P} \left( \Delta_x \in dz \mid \widehat{T}_x < +\infty \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}} dz \quad \text{où} \quad \sigma^2 = \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} (\eta(s_*))^{-\frac{1}{1-\alpha}}}{\eta''(s_*)}.$$

Comme il est classique, le terme en  $z^2$  provient du développement limité  $\eta(s_* + z) = \eta(s_*) + \frac{z^2}{2} \eta''(s_*) + o(z^2)$ . Ce résultat, tout comme le théorème III.1, est fortement lié au fait que la fonction  $\eta$  admet un unique minimum global au point  $s_*$ . C'est donc en ce point que  $L$  va le plus probablement dépasser la frontière lorsque  $x \rightarrow +\infty$ .

### III.1.3 Processus de Riemann-Liouville

On se propose à présent de généraliser les résultats précédents au cas du processus de Riemann-Liouville, lequel est défini pour  $\beta > 0$  par

$$X_t^{(\beta)} = \int_0^t (t-s)^\beta dL_s = \beta \int_0^t (t-s)^{\beta-1} L_s ds, \quad t \geq 0.$$

Ce processus n'est bien sûr plus Markovien, mais il est autosimilaire d'indice  $\beta + 1/\alpha$ , à trajectoires p.s. continues, et sa loi marginale est donnée par

$$X_1^{(\beta)} \stackrel{(\text{loi})}{=} (1 + \alpha\beta)^{-1/\alpha} L_1.$$

Définissons alors pour  $\gamma\alpha > 1$

$$\mathbf{M}_{\alpha, \rho, \gamma}^{(\beta)} = \sup_{t \geq 0} \{ X_t^{(\beta)} - t^{\beta+\gamma} \}.$$

L'analogie du théorème III.1 dans ce cas est le suivant.

#### Théorème III.4.

1. Si  $L$  admet des sauts positifs, il existe deux constantes  $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 < +\infty$  telles que

$$\kappa_1 x^{\frac{1-\gamma\alpha}{\beta+\gamma}} \leq \mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha, \rho, \gamma}^{(\beta)} \geq x) \leq \kappa_2 x^{\frac{1-\gamma\alpha}{\beta+\gamma}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

2. Si  $L$  n'a pas de sauts positifs, on a l'estimée logarithmique

$$\ln \left( \mathbb{P}(\mathbf{M}_{\alpha,1/\alpha,\gamma}^{(\beta)} \geq x) \right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -c_{\alpha,\beta,\gamma} x^{\frac{\gamma\alpha-1}{(\alpha-1)(\gamma+\beta)}}$$

$$\text{où } c_{\alpha,\beta,\gamma} = (\alpha-1)(\gamma+\beta)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} (\alpha\beta+1)^{\frac{\gamma+\beta-1-\alpha\beta}{(\alpha-1)(\gamma+\beta)}} (\gamma\alpha-1)^{\frac{1-\gamma\alpha}{(\alpha-1)(\gamma+\beta)}}.$$

Comme pour le processus de Lévy simple, les preuves de ces deux résultats sont très différentes. Le cas avec sauts positifs repose sur la construction d'une somme télescopique de temps d'arrêt, croissante en probabilités. Nous arrivons alors à majorer les écarts entre les temps d'arrêts successifs, et ainsi obtenir une estimée de la somme.

Dans le cas sans sauts positifs, l'approche précédente ne fonctionne plus du fait de l'existence de moments positifs de tout ordre, et nous utilisons plutôt une démarche relativement similaire à celle du théorème III.1. Pour contourner l'absence de Markovianité du processus  $X^{(\beta)}$ , nous utilisons alors un lemme d'association, valable pour tout processus de Lévy  $L$ , qui énonce que si  $F$  et  $G$  sont deux fonctionnelles bornées définies sur l'espace de Skorokhod  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , toutes deux croissantes ou décroissantes, alors

$$\mathbb{E}[F(L_u, u \geq 0)G(L_u, u \geq 0)] \geq \mathbb{E}[F(L_u, u \geq 0)] \mathbb{E}[G(L_u, u \geq 0)].$$

Précisons également que dans le cas  $\beta = 1$ , le couple  $(X^{(1)}, L)$  est Markovien et nous arrivons alors à obtenir des estimées plus précises, à savoir :

$$\kappa_1 x^{\frac{1-\gamma\alpha}{2(\alpha-1)(1+\gamma)}} \leq \exp\left(c_{\alpha,1,\gamma} x^{\frac{\gamma\alpha-1}{(\alpha-1)(1+\gamma)}}\right) \mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\alpha,1/\alpha,\gamma}^{(1)} \geq x\right) \leq \kappa_2, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Au vu du cas brownien que nous allons développer ci-dessous, il est probable que la bonne asymptotique soit donnée par la borne inférieure dans l'estimée ci-dessus.

### Le cas brownien

Dans le cas du mouvement brownien, i.e.  $\alpha = 2$ , le processus  $X^{(\beta)}$  est encore gaussien, et l'on peut donc utiliser les résultats de Hüsler & Piterbarg [HP99].

**Proposition III.5.** *Supposons  $\gamma > 1/2$ .*

a) Si  $\beta \in ]-1/2, 1/2[$ , il existe une constante  $\kappa_{\beta,\gamma} > 0$  telle que

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{2,1/2,\gamma}^{(\beta)} \geq x\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \kappa_{\beta,\gamma} x^{\frac{2\beta(1-2\gamma)}{(2\beta+1)(\gamma+\beta)}} \exp\left(-c_{2,\beta,\gamma} x^{\frac{2\gamma-1}{\gamma+\beta}}\right).$$

b) Si  $\beta > 1/2$ , il existe une constante  $\tilde{\kappa}_{\beta,\gamma} > 0$  telle que

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{2,1/2,\gamma}^{(\beta)} \geq x\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \tilde{\kappa}_{\beta,\gamma} x^{\frac{1-2\gamma}{2(\gamma+\beta)}} \exp\left(-c_{2,\beta,\gamma} x^{\frac{2\gamma-1}{\gamma+\beta}}\right).$$

Nous voyons dans ce cas l'apparition de termes puissances devant les exponentielles, ce qui n'était pas le cas pour  $\beta = 0$ . La constante  $\tilde{\kappa}_{\beta,\gamma}$  peut être calculée explicitement, tandis que  $\kappa_{\beta,\gamma}$  dépend elle de la constante dite de Pickands, laquelle est définie par

$$\mathcal{H}_{2\beta+1} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \mathbb{E} \left[ \exp \left( \max_{0 \leq t \leq T} (\sqrt{2}B_H(t) - t^{2H}) \right) \right]$$

où  $B_H$  est un mouvement brownien fractionnaire d'indice de Hurst  $H = \beta + \frac{1}{2}$ . Cette constante, introduite dans [Pic69], apparaît fréquemment en théorie des valeurs extrêmes, et est encore aujourd'hui un sujet de recherche actif. En particulier, seules deux valeurs sont à ce jour explicitement connues, à savoir  $\mathcal{H}_1 = 1$  et  $\mathcal{H}_2 = \frac{1}{\pi}$ . Notons également que le résultat de [HP99] ne permet pas de traiter le cas  $\beta = \frac{1}{2}$ , pour lequel il est possible qu'un terme logarithmique apparaisse également en facteur de l'exponentielle.

### Queues basses et persistance

Ce type de comparaison entre un Lévy stable et une fonction puissance a aussi été étudié dans le cadre des problèmes de persistance. Par exemple, lorsque  $\alpha \in ]0, 1[$  et  $\rho \in ]0, 1[$ , Aurzada & Kramm [AK16] ont démontré que l'ajout d'un terme puissance dont l'exposant est plus petit que l'inverse du paramètre d'autosimilarité n'a pas d'influence sur la valeur de l'exposant de persistance. En d'autres termes, pour  $0 < \gamma < \frac{1}{\alpha}$ , on a l'asymptotique :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{[0,t]} \{L_u \pm u^\gamma\} \leq 1 \right) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} t^{-\rho+o(1)}.$$

Dans le même esprit, nous démontrons dans [13] que l'ajout d'un terme puissance suffisamment grand n'a pas d'influence sur l'asymptotique de la queue basse :

**Théorème III.6.** *Supposons que  $\gamma\alpha > 1$  et  $\rho \in ]0, 1[$ . Pour tout  $\mu \geq 0$ , on a*

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\{ \int_0^t L_u du + \mu t^{1+\gamma} \right\} \leq \varepsilon \right) \asymp \varepsilon^{\frac{\alpha\rho}{(\alpha+1)(\alpha(1-\rho)+1)}}.$$

La clé ici est de faire passer le paramètre  $\varepsilon$  dans la dérive grâce au scaling, puis d'utiliser le fait que  $\mu \geq 0$  pour obtenir des bornes dont on connaît les asymptotiques. Ce résultat reste très certainement vrai pour  $\mu < 0$ , mais notre approche ne permet pas de traiter ce cas.

## III.2 Produits de processus stables

On s'intéresse à présent à des produits de processus stables définis sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Ce type de processus s'avère assez compliqué à étudier, et la plupart des questions classiques (temps de passage, temps de séjour, ...) restent ouvertes, même dans le cas d'un simple produit de deux mouvements browniens. Nous proposons ici quelques résultats généraux sur ces processus.

### III.2.1 Asymptotiques du suprémum

Soient  $(L^{(i)}, 1 \leq i \leq n)$  des processus de Lévy  $\alpha$ -stables symétriques et indépendants avec  $\alpha \in (0, 2]$ . Nous commençons par étudier les valeurs extrêmes du suprémum du produit des  $(L^{(i)})$ .

**Théorème III.7** (Queue haute).

1. Si  $\alpha = 2$  :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \geq x \right) \asymp x^{-\frac{1}{n}} \exp \left( -\frac{n}{2} x^{\frac{2}{n}} \right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

2. Si  $\alpha \in ]0, 2[$  :

$$\mathbb{P} \left( \sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \geq x \right) \asymp \frac{(\ln(x))^{n-1}}{x^\alpha}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

La preuve de ce résultat est assez élémentaire, et repose sur le fait que les asymptotiques de  $|L_1|$  et  $\sup_{0 \leq u \leq 1} L_u$  sont du même ordre de grandeur. En effet, dans le cas

brownien, ces deux quantités ont la même loi tandis que lorsque  $\alpha < 2$ , d'après Bertoin [Ber96], il existe une constante  $k > 0$  telle que :

$$\mathbb{P}(|L_1| \geq x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2k}{x^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq 1} L_u \geq x\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{x^\alpha}. \quad (\text{III.4})$$

Il est par contre beaucoup plus difficile d'estimer la queue basse du suprémum, du fait des changements de signe. Ce type de problème a été étudié pour les processus gaussiens par Li & Shao [LS04], mais très peu de constantes sont explicitement connues. Dans notre cadre, du fait du scaling, la question est équivalente à un problème de persistance :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \leq \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq \varepsilon^{-\alpha/n}} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \leq 1\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Différents résultats existent dans la littérature sur le comportement du mouvement brownien, ou même de processus  $\alpha$ -stables dans  $\mathbb{R}^n$ , mais les domaines considérés sont généralement des cones ([BnB04], [MH02]), des paraboles ([LS02], [BnB05]), ou des ensembles convexes dépendants d'une coordonnée ([Li03], [MH07]). Ici, notre ensemble  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \prod_{i=1}^n x_i \leq 1\}$  n'étant pas convexe, nous allons devoir procéder différemment. Le résultat principal de cette section est le suivant, dans lequel on peut observer que l'exposant de persistance ne dépend pas de la dimension.

**Théorème III.8.** *Il existe deux constantes  $0 < \kappa_1 \leq \kappa_2 < +\infty$  telles que*

1. *Si  $\alpha = 2$  :*

$$\kappa_1 \varepsilon \leq \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \leq \varepsilon\right) \leq \kappa_2 \varepsilon |\ln(\varepsilon)|^n, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

2. *Si  $\alpha \in ]0, 2[$  :*

$$\kappa_1 \varepsilon^{\alpha/2} \leq \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \leq \varepsilon\right) \leq \kappa_2 \varepsilon^{\alpha/2} |\ln(\varepsilon)|, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

La principale difficulté ici est d'obtenir les bornes supérieures. L'idée la plus simple est d'essayer de minorer le produit  $\sup_{0 \leq u \leq 1} \prod_{i=1}^n L_u^{(i)}$  par  $\prod_{i=1}^n L_{\sigma_1}^{(i)}$  où  $\sigma_1$  est l'instant où l'un des processus de Lévy, disons  $L^{(1)}$ , atteint son maximum sur  $[0, 1]$ . Cette approche soulève alors deux difficultés :

- i)* La première évidemment est que le produit des autres processus  $\prod_{i=2}^n L_{\sigma_1}^{(i)}$  peut être négatif. Ce problème peut néanmoins être facilement contourné grâce à l'inégalité de Slepian, en utilisant le fait qu'un processus de Lévy symétrique stable peut s'écrire comme un mouvement brownien changé de temps par un subordonateur stable.
- ii)* La deuxième difficulté est plus subtile et provient de la loi de l'Arcsinus généralisée pour les processus stables. Il y a en effet une grande probabilité pour que  $\sigma_1$  soit proche de 0 et que donc, bien que  $L_{\sigma_1}^{(1)}$  soit grand, le produit restant  $\prod_{i=2}^n L_{\sigma_1}^{(i)}$  soit lui aussi assez proche de 0.

L'idée générale de la preuve est dans un premier temps d'arrêter le produit des  $(L^{(i)})$  à son dernier changement de signe. Cela nous conduit donc à étudier la variable aléatoire :

$$g_1 = \sup \{0 < u \leq 1, L_u L_{u-} \leq 0\},$$

où  $L$  est un processus de Lévy  $\alpha$ -stable symétrique. Dans le cas du mouvement brownien,  $g_1$  est en fait son dernier zéro sur l'intervalle  $[0, 1]$  et cette variable suit la loi de l'Arcsinus. Lorsque  $\alpha < 2$ , on peut montrer que l'asymptotique au voisinage de zéro est du même ordre de grandeur pour tout  $\alpha$  :

$$\mathbb{P}(g_1 \in dr)/dr \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{c_\alpha}{\sqrt{r}}$$

où  $c_\alpha > 0$ . En notant  $L^{(x,t,y)}$  le pont stable de longueur  $t$ , allant de  $x$  à  $y$ , on montre alors un lemme d'indépendance entre  $g_t$  et  $L$  changé de temps et renormalisé.

**Lemme III.9.** *On pose, par convention  $L_{0-} = 0$ . Conditionnellement à l'évènement  $\left\{ \frac{L_{g_1-}}{g_1^{1/\alpha}} = a \right\}$ , le processus*

$$\left( \frac{L_{ug_1-}}{g_1^{1/\alpha}}, 0 \leq u \leq 1 \right)$$

*est indépendant de  $g_1$  et a la même loi que le pont stable  $(L_{u-}^{(0,1,a)}, 0 \leq u \leq 1)$ .*

On déduit alors du scaling que le problème se ramène à étudier le produit

$$g_1^{\frac{n}{\alpha}} \sup_{u \in [0,1]} L_{u-}^{(0,1,a)} \prod_{i=2}^n L_u^{(i)}$$

où tous les termes sont indépendants. Le résultat s'obtient alors en minorant le suprémum par sa valeur au point  $u^* = \operatorname{argmax}_{1/2 \leq s \leq 1} L_{s-}^{(0,1,a)}$ . Dans le cas du mouvement brownien, les  $n+1$  termes sont alors tous du même ordre de grandeur  $\varepsilon$ , ce qui explique l'apparition de la compensation  $|\ln(\varepsilon)|^n$ . Lorsque  $\alpha < 2$ , l'asymptotique est seulement donnée par  $g_1$  et le pont, d'où l'apparition d'un seul logarithme.

Notons qu'il existe de nombreux résultats similaires au lemme III.9 dans la littérature, que l'on peut trouver par exemple dans Bertoin [Ber96, chapitre VIII]. En particulier, on obtient le même type de résultat lorsque l'on remplace  $g_1$  par le dernier zéro de  $L$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  (dans le cas où  $\alpha > 1$ ), ou encore lorsque l'on remplace  $g_1$  par le dernier instant où  $L$  est égal à son minimum sur l'intervalle  $[0, 1]$ . Nous référons également à [CUB11] pour des constructions de ponts Markoviens dans le même esprit, mais dans un cadre plus général.

### III.2.2 Petite digression sur les temps de séjour

Nous nous autorisons ici une petite digression sur les produits de processus en nous intéressant à leur temps de séjour. Pour  $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$  des processus i.i.d et symétriques, on pose :

$$\mathcal{A}_n = \int_0^1 \mathbf{1}_{\{\prod_{i=1}^n X_u^{(i)} \geq 0\}} du.$$

La variable aléatoire  $\mathcal{A}_n$  peut donc être interprétée comme le temps passé par un processus  $n$ -dimensionnel (dont les composantes sont indépendantes) dans les orthants symétriques.

Lorsque  $n = 1$ , la variable  $\mathcal{A}_1$  a été très largement étudiée pour de nombreuses familles de processus. Le résultat le plus célèbre est très certainement le cas des processus

de Lévy symétriques dont la loi n'a pas d'atome pour lesquels  $\mathcal{A}_1$  suit la loi de l'Arcsinus, voir par exemple Gettoor & Sharpe [GS94]. Lorsque  $n = 2$ , la variable  $\mathcal{A}_2$  correspond au temps passé par le processus  $X^{(1)} + iX^{(2)}$  dans les premiers et troisièmes quadrants du plan complexe. Dans le cas du mouvement brownien plan, des tentatives pour calculer la loi de  $\mathcal{A}_2$  ont été proposées, notamment par Ernst & Shepp [ES17] qui ont essayé de calculer sa double transformée de Laplace, sans toutefois réussir à finir les calculs.

Plus généralement, l'étude des temps de séjours du mouvement brownien plan dans un cône a reçu une attention considérable. En particulier, Mountford [Mou90] a prouvé que si  $\mathcal{C}_\theta$  est un cône convexe d'angle  $\theta$  dont le sommet est à l'origine du plan, il existe deux constantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  telles que

$$\kappa_1 t^{1/\xi} \leq \mathbb{P} \left( \int_0^1 \mathbf{1}_{\{(B_u^{(1)}, B_u^{(2)}) \in \mathcal{C}_\theta\}} du \leq t \right) \leq \kappa_2 t^{1/\xi}, \quad t \in [0, 1], \quad (\text{III.5})$$

avec  $\xi = \frac{2}{\pi}(2\pi - \theta)$ . Les premiers moments de cette variable aléatoire ont été calculés par Bingham & Doney [BD88] lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , puis par Desbois [Des07] dans le cas général. Des résultats analogues à (III.5) pour le mouvement brownien  $n$ -dimensionnel ont été obtenus par Meyre & Werner [MW95] ainsi que Nakayama [Nak97], lesquels ont montré que l'exposant  $\xi$  était lié à la première valeur propre de l'opérateur de Laplace  $-\Delta/2$ . Notons également, en plus de ces bornes, que l'on dispose d'une estimation de l'asymptotique du temps de séjour d'un mouvement brownien  $n$ -dimensionnel  $(B^{(i)}, 1 \leq i \leq n)$  dans l'orthant positif grâce à la loi forte de l'Arcsinus :

$$\frac{1}{\ln(t)} \int_1^t \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{B_u^{(i)} \geq 0\}} \frac{du}{u} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2^n}.$$

La preuve de ce résultat est assez classique, et repose sur le théorème ergodique, après avoir effectué un changement de temps exponentiel afin d'obtenir un processus stationnaire.

### Cas général

Avant de regarder un peu plus en détails le cas des processus  $\alpha$ -stables, nous commençons par étudier en toute généralité la limite de la suite de variables  $\mathcal{A}_n$  lorsque la dimension  $n$  tend vers l'infini.

**Théorème III.10.** *Soient  $(X^{(i)}, i \geq 1)$  des processus i.i.d. symétriques.*

1. *La suite  $(\mathcal{A}_n, n \geq 1)$  satisfait à la loi forte des grands nombres :*

$$\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \mathcal{A}_n \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2}.$$

2. *Supposons de plus que pour presque tout  $u \in ]0, 1[$ , la variable aléatoire  $X_u^{(1)}$  n'a pas d'atome en 0 et que*

$$\text{pour presque tout } 0 < u < s < 1, \quad 0 < \mathbb{P} \left( X_u^{(1)} \geq 0, X_s^{(1)} \geq 0 \right) < \frac{1}{2}. \quad (\text{III.6})$$

*Alors, pour tout  $p > 0$ , on a la convergence en norme  $L^p$  :*

$$\mathcal{A}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^p} \frac{1}{2}.$$

3. Supposons finalement que

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{\mathbb{P}\left(X_u^{(1)} \leq 0, X_s^{(1)} \geq 0\right)} du ds < +\infty.$$

Alors on a la convergence presque sûre :

$$\mathcal{A}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{2}.$$

Ce théorème peut se comprendre intuitivement de la manière suivante : si les processus considérés oscillent un tant soit peu (condition (III.6)), alors plus le nombre de processus augmente, puis le produit va potentiellement changer de signe et donc passer un temps de plus en plus équilibré de chaque côté de l'axe des abscisses. Ce résultat est évidemment à comparer avec la loi de l'Arcsinus pour les processus de Lévy, qui explique elle que bien que  $L_1$  soit centré, il y a grande probabilité que  $L$  passe plus de temps d'un côté de l'axe des abscisses que de l'autre.

Notons qu'une hypothèse telle que (III.6) est nécessaire ici pour obtenir la convergence dans  $L^p$ . En effet, si l'on considère par exemple la famille de processus symétriques

$$X_t^{(i)} = tX_i, \quad t \geq 0,$$

où les variables  $(X^{(i)}, i \in \mathbb{N}^*)$  sont i.i.d. symétriques et admettent une densité, alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathcal{A}_n \stackrel{\text{(loi)}}{=} \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$$

et la convergence dans  $L^p$  ne peut donc avoir lieu. Bien sûr dans ce cas, on a  $\mathbb{P}(X_u^{(1)} \geq 0, X_s^{(1)} \geq 0) = \frac{1}{2}$  et la condition (III.6) n'est donc pas satisfaite.

La preuve de ce théorème est assez élémentaire : en définissant

$$F_n(u, s) = \mathbb{P}\left(\prod_{i=1}^n X_u^{(i)} \geq 0, \prod_{i=1}^n X_s^{(i)} \geq 0\right)$$

on observe par récurrence que

$$F_{n+1}(u, s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(4F_1(u, s) - 1)^{n+1}$$

de sorte que l'hypothèse (III.6) permet d'affirmer que pour presque tout  $0 < u < s < 1$  :

$$F_n(u, s) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{4}.$$

On conclut alors à la convergence dans  $L^p$  grâce à l'inégalité d'Hölder, et à la convergence presque sûre grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et au lemme de Borel-Cantelli.

### Cas des processus de Lévy $\alpha$ -stables

Plaçons nous à présent dans le cas où les processus considérés sont des processus de Lévy  $\alpha$ -stables symétriques  $(L^{(i)}, i \in \mathbb{N}^*)$ . D'après le théorème III.10, on a alors

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_n^p] \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \left(\frac{1}{2}\right)^p.$$

On peut dans ce cas montrer que la suite des moments  $(\mathbb{E}[\mathcal{A}_n^p], n \geq 1)$  est en fait monotone, le sens de monotonie dépendant de la convexité de la fonction  $x \mapsto x^p$ .

**Proposition III.11.** *Fixons  $p \in ]0, 1] \cup \mathbb{N}^*$ . La suite*

$$(\mathbb{E}[\mathcal{A}_n^p], n \geq 1) \text{ est } \begin{cases} \text{décroissante si } p > 1 \\ \text{croissante si } 0 < p < 1. \end{cases}$$

On déduit de ce résultat que si  $\psi$  est une fonction complètement monotone, alors la suite  $(\mathbb{E}[\psi(\mathcal{A}_n)], n \in \mathbb{N}^*)$  est décroissante. Il est probable que cette propriété reste d'ailleurs vraie pour toute fonction convexe, mais nous n'avons pas réussi obtenir cette généralisation. L'idée de la preuve est de montrer que pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $F : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  définie par

$$F(x) = \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^1 \mathbf{1}_{\{(x+Zu) \prod_{i=1}^n L_u^{(i)} \geq 0\}} du \right)^p \right]$$

où  $Z$  est un processus de Lévy  $\alpha$ -stable indépendant des  $(L^{(i)})$  est croissante. Il suffit ensuite de remarquer que par convergence dominée

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_{n+1}^p] = F(0) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \mathbb{E}[\mathcal{A}_n^p].$$

Le cas où  $p$  n'est pas entier s'obtient alors de la manière suivante : en sommant les cas précédents, on a tout d'abord pour  $\lambda > 0$  :

$$\mathbb{E} \left[ e^{\lambda \mathcal{A}_{n+1}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ e^{\lambda \mathcal{A}_n} \right] \iff \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \mathcal{A}_{n+1}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \mathcal{A}_n} \right]$$

où l'on a utilisé l'identité en loi  $\mathcal{A}_n \stackrel{(\text{loi})}{=} 1 - \mathcal{A}_n$  pour  $n \geq 1$ . Il suffit alors d'intégrer en  $\lambda$ , avec  $0 < p < 1$  :

$$\int_0^{+\infty} \lambda^{-p-1} \left( 1 - \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \mathcal{A}_n} \right] \right) d\lambda \leq \int_0^{+\infty} \lambda^{-p-1} \left( 1 - \mathbb{E} \left[ e^{-\lambda \mathcal{A}_{n+1}} \right] \right) d\lambda$$

ce qui fournit exactement l'inégalité recherchée.

### Cas du mouvement brownien plan

Si l'on considère finalement le cas d'un produit de deux mouvements browniens, alors la proposition III.11 permet d'obtenir des bornes sur les moments de  $\mathcal{A}_2$ .

**Proposition III.12.** *Pour tout entier  $p \geq 1$ , on a les inégalités :*

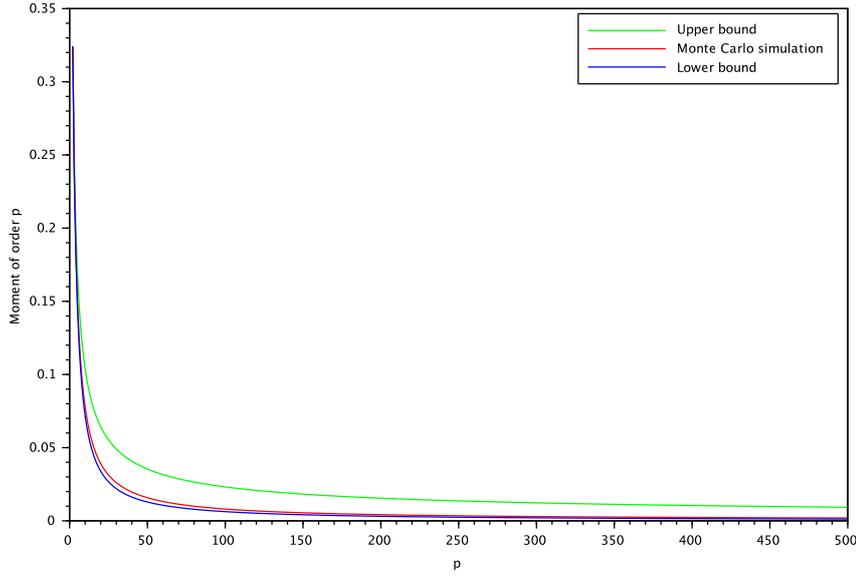
$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_2^p] \leq \frac{1}{2p+1} \frac{8}{\pi^2} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ p+3/2 & 3/2 \end{matrix}; 1 \right] + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2}{(p-k)^2} \mathbb{E}[\mathcal{A}_1^k]$$

et

$$\mathbb{E}[\mathcal{A}_2^p] \geq \frac{1}{2p+1} \frac{8}{\pi^2} {}_3F_2 \left[ \begin{matrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ p+3/2 & 3/2 \end{matrix}; 1 \right] + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2}{(p-k)^2} \mathbb{E}[\mathcal{A}_2^k]$$

où  ${}_3F_2$  désigne la fonction hypergéométrique généralisée.

Notons que les deux bornes sont égales lorsque  $p = 1$  et  $p = 2$ . Dans la borne supérieure, le terme  $\mathbb{E}[\mathcal{A}_1^k]$  est explicite puisque  $\mathcal{A}_1$  suit la loi de l'Arcsinus. La borne inférieure s'obtient elle par itérations successives, et est numériquement bien meilleure comme le montre la simulation ci-dessous.


 FIGURE III.1 – Simulation par Monté-Carlo de  $\mathbb{E}[\mathcal{A}_2^p]$  pour  $0 \leq p \leq 500$ .

L'idée de la preuve est de construire une relation de récurrence à partir de la fonction :

$$M_p(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t/2} \mathbb{E} \left[ \left( \int_0^t \mathbf{1}_{\{(x+B_u)W_u>0\}} du \right)^p \right] dt$$

où  $B$  et  $W$  sont deux mouvements browniens indépendants. En appliquant la propriété de Markov à l'instant  $T_x = \inf\{t \geq 0, x + B_t = 0\}$  et la formule du binôme, on peut décomposer  $M_p$  sous la forme :

$$\begin{aligned} M_p(x) &= \mathbb{E}[\mathcal{A}_1^p] \int_0^{+\infty} e^{-t/2} t^p \mathbb{P}(T_x > t) dt \\ &\quad + \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \mathbb{E} \left[ e^{-T_x/2} \left( \int_0^{T_x} \mathbf{1}_{\{W_u>0\}} du \right)^{p-k} M_k(W_{T_x}) \right] \\ &= R_{p-1}(x) + \mathbb{E} \left[ e^{-T_x/2} M_p(W_{T_x}) \right] \end{aligned}$$

où  $R_{p-1}$  dépend des fonctions  $(M_k, k \leq p-1)$ . On démontre ensuite à l'aide de la transformée de Kontorovich-Lebedev que l'on a la relation

$$M_p(0) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^{+\infty} R_{p-1}(x) K_0(x) \frac{dx}{x}$$

où  $K_0$  désigne la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. Le résultat s'obtient finalement à partir de la proposition III.11 en observant que les fonctions  $M_k$  (présentes dans  $R_{p-1}$ ) sont paires et croissantes sur  $[0, +\infty[$  de sorte que pour  $x \in \mathbb{R}$  :

$$2^{k+1} k! \mathbb{E}[\mathcal{A}_2^k] = M_k(0) \leq M_k(x) \leq M_k(+\infty) = 2^{k+1} k! \mathbb{E}[\mathcal{A}_1^k].$$



## Chapitre IV

# Quelques résultats non asymptotiques

Dans ce chapitre, nous présentons des résultats issus des publications :

- [3] C. Profeta. On last passage times of linear diffusions to curved boundaries. *Markov Processes Relat. Fields* **19**, 735-762, 2013.
- [4] C. Profeta. On Dufresne's translated perpetuity and some Black-Scholes annuities. *Analítika*, Vol. **7** (1) : 7-19, 2014.
- [8] C. Profeta and T. Simon. On the harmonic measure of stable processes. *Séminaire de Probabilités XLVIII*, Lecture Notes in Math. **2168**, 325-345, 2016.

### Plan du chapitre

Nous regroupons dans ce chapitre différents calculs autour des premiers et derniers temps de passage.

1. La première section concerne l'étude des temps d'entrée et de sortie d'un intervalle pour les processus de Lévy stables. Nous calculons la mesure harmonique d'un intervalle et de son complémentaire, ainsi que la densité de la fonction de Green associée. Un certain nombre de résultats (dont certains partiels) étaient disséminés dans la littérature et nous avons proposé avec T. Simon une méthode permettant de traiter tous les cas de figure.
2. La deuxième section propose quelques résultats sur les derniers temps de passage de diffusions. Nous regardons plusieurs méthodes qui permettent d'obtenir des lois explicites pour certains processus classiques type mouvement brownien ou processus de Bessel avec dérive.
3. Enfin, la dernière section établit une identité en loi entre une perpétuité tradlatée de Dufresne et les temps d'atteinte d'un processus de Bessel de dimension 3 avec dérive. Ce travail a été rédigé à l'époque pour un journal équatorien naissant, qui cherchait à publier des articles de recherche originaux, mais qui restaient d'un niveau abordable.

### IV.1 Temps d'entrée et de sortie d'un intervalle pour un processus de Lévy stable

Considérons donc, pour la dernière fois, un processus de Lévy  $\alpha$ -stable  $L$  de paramètre d'autosimilarité  $\alpha \in ]0, 2[$  et de paramètre de positivité  $\rho \in ]0, 1[$ . Nous supposons

dans cette section que  $L$  peut sauter dans les deux sens, le cas où  $L$  n'a que des sauts unilatéraux étant plus simple à traiter. Définissons le temps de sortie de l'intervalle  $[-1, 1]$ , resp. d'entrée dans l'intervalle  $] - 1, 1[$ , par

$$T_1 = \inf\{t > 0, |L_t| > 1\} \quad \text{et} \quad T_1^* = \inf\{t > 0, |L_t| < 1\},$$

ainsi que les mesures harmoniques

$$H_x(dy) = \mathbb{P}_x(L_{T_1} \in dy, T_1 < +\infty) \quad \text{et} \quad H_x^*(dy) = \mathbb{P}_x(L_{T_1^*} \in dy, T_1^* < +\infty).$$

Notre premier résultat est le calcul de la densité de ces deux mesures harmoniques.

### IV.1.1 Mesures harmoniques

Commençons par fixer quelques notations. Nous notons  $\hat{L} = -L$  le processus dual de  $L$ , et nous noterons de même toutes les quantités associées à  $\hat{L}$  par un chapeau, ce qui revient à remplacer  $\rho$  par  $\hat{\rho} = 1 - \rho$ . On pose alors :

$$c_{\alpha,\rho} = \frac{\sin(\pi\alpha\rho)}{\pi} \quad \text{et} \quad \psi_{\alpha,\rho}(t) = (t-1)^{\alpha\hat{\rho}-1}(t+1)^{\alpha\rho-1}.$$

Nous avons démontré dans [8] le théorème suivant.

#### Théorème IV.1.

a) Pour tout  $x \in ] - 1, 1[$ , la mesure  $H_x(dy)$  a pour densité

$$h(x, y) = c_{\alpha,\rho} (1+x)^{\alpha\hat{\rho}} (1-x)^{\alpha\rho} (1+y)^{-\alpha\hat{\rho}} (y-1)^{-\alpha\rho} (y-x)^{-1} \quad \text{si } y > 1,$$

et par dualité  $h(x, y) = \hat{h}(-x, -y)$  si  $y < -1$ .

b) Pour tout  $x \in [-1, 1]^c$ , la mesure  $H_x^*(dy)$  a pour densité

$$h^*(x, y) = c_{\alpha,\hat{\rho}} (1+y)^{-\alpha\rho} (1-y)^{-\alpha\hat{\rho}} \times \left( (x+1)^{\alpha\rho} (x-1)^{\alpha\hat{\rho}} (x-y)^{-1} - (\alpha-1)_+ \int_1^x \psi_{\alpha,\rho}(t) dt \right) \quad \text{si } x > 1,$$

et par dualité  $h^*(x, y) = \hat{h}^*(-x, -y)$  si  $x < -1$ .

Dans le cas symétrique, ce résultat n'est pas nouveau et remonte à [BGR61], qui traite plus généralement des processus stables invariants par translation dans l'espace Euclidien, à l'aide de la transformée de Kelvin et du principe d'unicité pour les potentiels. Concernant le cas général tel que présenté ci-dessus, le point a) avait été prouvé dans [Rog72] à l'aide d'équations intégrales couplées, tandis que le point b) a été obtenu plus récemment dans [KPW14] à l'aide de la représentation de Lamperti et de la factorisation de Wiener-Hopf. Dans ce travail, nous montrons en fait que l'idée originelle de [BGR61] peut également s'appliquer dans le cas asymétrique grâce à différentes identités sur les fonctions hypergéométriques  ${}_2F_1$ .

En effet, en appliquant la propriété de Markov, on peut montrer que, pour  $\alpha \neq 1$ ,  $H_x$  est solution de l'équation :

$$\int_{[-1,1]^c} u(t, y) H_x(dt) = u(x, y), \quad x \in ] - 1, 1[, \quad y \in [-1, 1]^c,$$

où

$$u(t, y) = (c_{\alpha, \rho} \mathbf{1}_{\{y > t\}} + c_{\alpha, \hat{\rho}} \mathbf{1}_{\{y < t\}}) |t - y|^{\alpha-1}.$$

On prouve alors, via un changement de variable, que cette équation abélienne peut se ramener à une équation hypergéométrique :

$$\int_{-1}^1 \hat{u}(t, z) \mu(dt) = 1, \quad z \in ]-1, 1[,$$

dont l'unique solution  $\mu$  est donnée par  $\mu(dt) = (1-t)^{-\alpha\rho}(1+t)^{-\alpha\hat{\rho}}dt$ . La clé ici est d'utiliser la représentation intégrale de la fonction  ${}_2F_1$  (dite formule d'Euler) :

$${}_2F_1 \left[ \begin{matrix} a & b \\ c \end{matrix} ; z \right] = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx$$

ainsi que les transformations de Pfaff et de Gauss. Le cas  $\alpha = 1$  s'obtient ensuite par un argument de continuité dans l'espace de Skorokhod, et la démarche pour  $H^*$  est similaire.

### IV.1.2 Noyaux de Green

Le théorème précédent va nous permettre d'étudier les mesures potentielles tuées :

$$G_x(dy) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T_1} \mathbf{1}_{\{L_t \in dy\}} dt \right] \quad \text{et} \quad G_x^*(dy) = \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{T_1^*} \mathbf{1}_{\{L_t \in dy\}} dt \right]$$

dont nous noterons les densités (également appelées fonctions de Green)  $g(x, y)$  et  $g^*(x, y)$ . Ces fonctions présentent un intérêt majeur, car elles permettent d'inverser le générateur stable infinitésimal respectivement sur  $] -1, 1[$  et  $[-1, 1]^c$  (voir [BBK<sup>+</sup>09, Formule (1.42)] pour le cas symétrique). Le lien avec les mesures harmoniques du théorème IV.1 apparaît au travers d'une formule générale due à Ikeda-Watanabe [IW62] :

$$h(x, y) = \int_{]-1, 1[} g(x, u) \nu(y - u) du, \quad \text{resp.} \quad h^*(x, y) = \int_{[-1, 1]^c} g^*(x, u) \nu(y - u) du,$$

où  $\nu$  désigne la mesure de Lévy de  $L$ , ici :

$$\nu(y) = \Gamma(\alpha + 1) |y|^{-\alpha-1} (c_{\alpha\rho} \mathbf{1}_{\{y > 0\}} + c_{\alpha\hat{\rho}} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}),$$

et  $x \in ] -1, 1[$  et  $y \in [-1, 1]^c$ , resp.  $x \in [-1, 1]^c$  et  $y \in ] -1, 1[$ . Dans le cas symétrique, les expressions des fonctions de Green pour  $] -1, 1[$ , ou plus généralement pour la boule unité dans le cas invariant par rotation, sont des résultats classiques remontant à Riesz [Rie38a, Rie38b]. Dans le cas général, les expressions des densités  $g(x, y)$  et  $g^*(x, y)$  sont données dans le théorème suivant.

**Théorème IV.2.** *Posons  $z = \left| \frac{1-xy}{x-y} \right|$  pour tout  $x \neq y$ .*

a) *Pour tout  $x \in ] -1, 1[$ , on a*

$$g(x, y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha\rho)\Gamma(\alpha\hat{\rho})} \left( \frac{y-x}{2} \right)^{\alpha-1} \int_1^z \psi_{\alpha, \rho}(t) dt \quad \text{si } y \in ]x, 1[,$$

*et par dualité  $g(x, y) = \hat{g}(y, x)$  si  $y \in ] -1, x[$ .*

b) *Pour tout  $x > 1$ , on a*

- si  $y \in ]x, +\infty[$  :

$$g^*(x, y) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma(\alpha\rho)\Gamma(\alpha\hat{\rho})} \left( (y-x)^{\alpha-1} \int_1^z \psi_{\alpha,\rho}(t) dt - (\alpha-1)_+ \int_1^x \psi_{\alpha,\rho}(t) dt \int_1^y \psi_{\alpha,\hat{\rho}}(t) dt \right),$$

- si  $y \in ]1, x[$ ,  $g^*(x, y) = \hat{g}^*(y, x)$ ,

- et enfin si  $y < -1$  :

$$g^*(x, y) = \frac{c_{\alpha\hat{\rho}} 2^{1-\alpha}}{c_{\alpha\rho} \Gamma(\alpha\rho)\Gamma(\alpha\hat{\rho})} \left( (x-y)^{\alpha-1} \int_1^z \psi_{\alpha,\rho}(t) dt - (\alpha-1)_+ \int_1^x \psi_{\alpha,\rho}(t) dt \int_1^{|y|} \psi_{\alpha,\rho}(t) dt \right).$$

Le point a) de ce théorème a été obtenu dans [BGR61] dans le cas symétrique, puis dans [KW14] dans le cas général. Pour le point b), seul le cas  $\alpha \leq 1$  et  $x, y > 1$  avait été obtenu dans [KPW14, théorème 4]. Notons qu'ici, la condition  $x > 1$  n'est pas restrictive puisque par dualité, on a  $g^*(x, y) = \hat{g}^*(-x, -y)$  pour tout  $x < -1$  et  $y \in [-1, 1]^c$ . A nouveau les méthodes utilisées dans [KW14, KPW14] pour obtenir ces résultats étaient assez compliquées (transformée de Lamperti et analyse du processus réfléchi) alors que notre approche, similaire au théorème IV.1, permet d'obtenir assez rapidement tous les cas de figure.

L'idée est ici de s'appuyer sur le théorème précédent. Par exemple, en utilisant un changement de variable et le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient pour  $\alpha < 1$ ,

$$\begin{aligned} g(x, y) dy &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x(L_t \in dy) dt - \int_0^{+\infty} \mathbb{P}_x(L_{t+T_1} \in dy, T_1 < +\infty) dt \\ &= \Gamma(1-\alpha) \left( c_{\alpha,\rho} (y-x)^{\alpha-1} - \int_{]-1, 1]^c} u(t, y) H_x(dt) \right) dy \end{aligned}$$

et le résultat découle du théorème IV.1. La connaissance explicite des fonctions de Green a de nombreuses conséquences assez classiques. Par exemple, on peut tout d'abord observer que lorsque  $x \rightarrow y$ , le noyau de Green admet un prolongement par continuité le long de la diagonale :

$$g(y, y) = \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha\rho)\Gamma(\alpha\hat{\rho})} \left( \frac{1-y^2}{2} \right)^{\alpha-1}$$

de sorte que l'on en déduit la formule, lorsque  $\alpha > 1$

$$\mathbb{P}_x(\sigma_y < T_1) = \frac{g(x, y)}{g(y, y)} = (\alpha-1) \left( \frac{x-y}{1-y^2} \right)^{\alpha-1} \int_1^z \psi_{\alpha,\hat{\rho}}(t) dt$$

où  $\sigma_y = \inf\{t > 0, L_t = y\}$ . Nous pouvons également obtenir ainsi toutes les fonctions harmoniques positives sur l'intervalle  $]-1, 1[$ , c'est-à-dire les solutions positives de l'équation

$$\mathcal{L}_{\alpha,\rho} u = 0$$

sur  $]-1, 1[$ , où  $\mathcal{L}_{\alpha,\rho}$  désigne le générateur infinitésimal de  $L$ .

**Corollaire IV.3.** *Les fonctions harmoniques positives sur  $]-1, 1[$  et qui s'annulent sur  $[-1, 1]^c$  sont toutes de la forme*

$$x \mapsto \lambda(1-x)^{\alpha\rho}(1+x)^{\alpha\hat{\rho}-1} + \mu(1+x)^{\alpha\hat{\rho}}(1-x)^{\alpha\rho-1}$$

avec  $\lambda, \mu \geq 0$ .

## IV.2 Derniers temps de passage pour une diffusion linéaire

Les derniers temps de passage apparaissent de manière naturelle dans les problèmes de pénalisations, comme nous pouvons le voir dans le théorème II.2, ou encore dans les travaux de Najnudel & Nikeghbali [NN10, NN13]. Ils ont également trouvé des applications en finance ces dernières années [NP13, PRY10]. Nous proposons ici différentes méthodes pour obtenir quelques lois explicites dans le cadre des diffusions linéaires.

Nous reprenons les notations de la section II.1 et considérons une diffusion linéaire  $(X_t, t \geq 0)$  à valeur dans l'intervalle  $I = (l, +\infty[$  où  $+\infty$  est une barrière naturelle et  $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ . On note toujours  $s$  sa fonction d'échelle, que l'on suppose désormais de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $m$  sa mesure de vitesse, que l'on suppose absolument continue, et  $q(t; x, y)$  sa densité de transition par rapport à  $m$ , que l'on suppose de classe  $\mathcal{C}^{1,2,2}$  sur  $]0, +\infty[ \times I \times I$ .

Choisissons à présent une fonction continue  $f : [0, +\infty[ \rightarrow [l, +\infty[$  et posons  $\zeta(f) := \inf\{t \geq 0, f(t) = l\} \in ]0, +\infty[$ . Le dernier temps d'atteinte de  $f$  par  $X$  avant l'instant  $\zeta(f)$  est défini par :

$$G_f := \sup\{0 \leq t \leq \zeta(f), X_t = f(t)\}$$

et l'on suppose que  $f$  est telle que  $G_f < +\infty$  p.s.

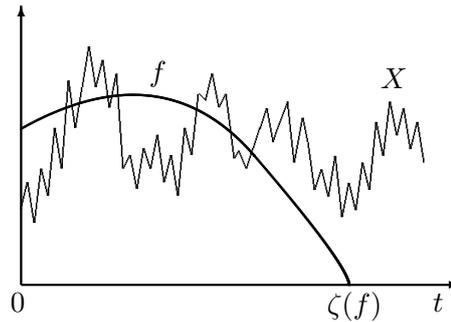


FIGURE IV.1 – Schéma d'une trajectoire de  $X$  lorsque  $l = 0$  et  $\zeta(f) < +\infty$ .

On définit finalement la fonction  $H$

$$H : (t, y) \mapsto \mathbb{P}_y(T_{f \circ \theta_t} = +\infty)$$

où  $T_f$  désigne le premier temps d'atteinte de  $f$  par  $X$

$$T_f := \inf\{t > 0, X_t = f(t)\}$$

et  $\theta$  désigne l'opérateur de translation.

### IV.2.1 Une formule générale

Nous commençons par donner une expression générale pour la densité de la variable aléatoire  $G_f$ . A l'aide de la propriété de Markov, on peut tout d'abord observer que

$$\mathbb{P}_x(G_f \leq t) = \int_{f(t)}^{+\infty} H(t, y)q(t; x, y)m(dy).$$

En dérivant cette relation par rapport à  $t$  et utilisant le fait que  $H$  est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\mathcal{G}H + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad \text{sur le domaine } \mathcal{D}_f = \{(t, y) \in ]0, \zeta(f)[ \times ]l, +\infty[, y > f(t)\}, \quad (\text{IV.1})$$

où  $\mathcal{G}$  désigne le générateur infinitésimal de  $X$ , on aboutit alors au résultat suivant.

**Théorème IV.4.**

Supposons que  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^{1,2}$  sur  $\overline{\mathcal{D}}_f$  et est telle que pour tout  $x \in ]l, +\infty[$  et  $t > 0$  :

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\partial H(t, y)}{s'(y) \partial y} q(t; x, y) = 0.$$

Alors, la densité de  $G_f$  sous  $\mathbb{P}_x$  est donnée pour  $t \in ]0, \zeta(f)[$  par :

$$\mathbb{P}_x(G_f \in dt) = \frac{q(t; x, f(t))}{s'(f(t))} \frac{\partial H(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=f(t)} dt. \quad (\text{IV.2})$$

Ce théorème permet de retrouver un certain nombre de résultats connus, tels que le célèbre résultat de Pitman & Yor [PY81] sur le dernier temps de passage d'une diffusion à un niveau fixe, mais également d'obtenir de nouvelles lois explicites.

**Processus de Bessel et droite décroissante**

Par exemple, considérons un processus de Bessel  $R$  d'indice  $\nu > -1$  ainsi que la droite décroissante  $f(t) = a - bt$  avec  $a, b > 0$ . En notant  $\mathbb{P}_y^{(\nu)}$  la loi de  $R$  lorsque  $R_0 = y$ , on a pour  $y \geq a$  d'après Alili & Patie [AP10] :

$$\mathbb{P}_y^{(\nu)}(T_f < +\infty) = \exp\left(\frac{b}{2a}(a^2 - y^2)\right) \frac{y^{-\nu}}{a^{-\nu}} \int_0^{+\infty} \frac{K_\nu(\sqrt{2}yz)}{K_\nu(\sqrt{2}az)} \mathbb{P}_{\frac{b}{\sqrt{2}}}^{(\nu)}\left(R_{\frac{b}{2a}} \in dz\right)$$

où  $K_\nu$  désigne la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. La dérivée de  $H$  au point  $y = a - bt$  s'écrit alors

$$\frac{\partial H(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=a-bt} = b + \int_0^{+\infty} \sqrt{2}z \frac{K_{\nu+1}}{K_\nu}(\sqrt{2}(a-bt)z) \mathbb{P}_{\frac{b}{\sqrt{2}}}^{(\nu)}\left(R_{\frac{b}{2(a-bt)}} \in dz\right),$$

d'où l'on déduit l'expression pour  $0 < t < \frac{a}{b}$  :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x^{(\nu)}(G_{a-b} \in dt) \\ &= \frac{1}{2t} (a-bt)^{\nu+1} x^{-\nu} \exp\left(-\frac{x^2 + (a-bt)^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{x(a-bt)}{t}\right) \frac{\partial H(t, y)}{\partial y} \Big|_{y=a-bt} dt. \end{aligned}$$

**IV.2.2 Vers une équation intégrale**

Une propriété importante de la formule (IV.2) est liée à la dépendance en  $x$  dans le membre de droite, qui n'apparaît qu'au travers de la densité de transition. En supposant que  $G_f$  n'a pas d'atomes, on obtient en intégrant cette relation :

$$\int_0^{\zeta(f)} \Phi(t) q(t; x, f(t)) dt = 1 \quad (\text{IV.3})$$

ce qui permet, dans certains cas, de caractériser de manière unique la fonction  $\Phi$ , et donc la loi de  $G_f$ . Ce type d'approche par équation intégrale a été utilisé à de nombreuses reprises pour l'étude directe de  $T_f$ , voir par exemple [BNR87] ou [Leh02].

### Processus de Bessel avec dérive et fonction racine

Pour illustrer cette démarche, choisissons à nouveau un processus de Bessel  $R$  d'indice  $\nu > -1$ , mais cette fois avec une dérive  $c \geq 0$  au sens de Watanabe [Wat75]. On note  $\mathbb{P}_x^{(\nu,c)}$  la loi de ce processus lorsque  $R_0 = x$  et l'on rappelle que son générateur infinitésimal est donné par :

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left( \frac{2\nu + 1}{2x} + c \frac{I_{\nu+1}}{I_\nu}(cx) \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad (\text{IV.4})$$

où  $I_\nu$  désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Considérons alors comme barrière la fonction  $f(t) = \sqrt{at^2 + bt}$  avec  $b > 0$  et  $\sqrt{a} > c$ . Partant de (IV.3) dans laquelle  $\zeta(f) = +\infty$ , on montre alors que cette équation peut se ramener à une transformée de Laplace, ce qui permet de prouver que la densité du dernier temps de passage  $G_{\sqrt{a^2+b}}$  est donnée, pour tout  $x > 0$ , par

$$\mathbb{P}_x^{(\nu,c)} \left( G_{\sqrt{a^2+b}} \in dt \right) = \varphi_f \left( \ln \left( 1 + \frac{b}{at} \right) \right) \frac{b}{ct} \frac{1}{\sqrt{at^2 + bt}} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2t} \right)}{I_\nu(cx)} I_\nu \left( \frac{x\sqrt{at^2 + bt}}{t} \right) dt$$

où la fonction  $\varphi_f$  a pour transformée de Laplace :

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \varphi_f(t) dt = \frac{\exp \left( \frac{c^2 b}{4a} \right) M_{-\lambda, \nu/2} \left( \frac{c^2 b}{2a} \right)}{\exp \left( \frac{b}{4} \right) M_{-\lambda, \nu/2} \left( \frac{b}{2} \right)} \quad (\text{IV.5})$$

avec  $M_{\lambda, \nu}$  la fonction de Whittaker.

### Lien avec l'inversion du temps

Le résultat d'inversion du temps de Watanabe [Wat75] permet par ailleurs d'obtenir également la loi du temps d'atteinte de  $\widehat{f}(t) = \sqrt{a + bt}$  pour un processus de Bessel avec dérive. En effet, si l'on pose

$$\left( \widehat{R}_t = tR_{1/t}, t \geq 0 \right)$$

alors le process  $\widehat{R}$  est un processus de Bessel d'indice  $\nu$ , avec dérive  $x$  partant de  $c$ . Ce phénomène d'inversion du temps fournit ainsi l'identité en loi

$$\inf\{t \geq 0, \widehat{R}_t = \sqrt{a + bt}\} \stackrel{(\text{loi})}{=} \frac{1}{\sup\{u \geq 0, R_u = \sqrt{au^2 + bu}\}}$$

d'où l'on déduit

$$\mathbb{P}_c^{(\nu,x)} (T_{\sqrt{a+bt}} \in dt) = \varphi_f \left( \ln \left( 1 + \frac{bt}{a} \right) \right) \frac{b}{c} \frac{1}{\sqrt{a + bt}} \frac{\exp \left( -\frac{x^2}{2} t \right)}{I_\nu(cx)} I_\nu \left( x\sqrt{a + bt} \right) dt.$$

En laissant tendre  $x$  vers 0, on peut retrouver ainsi les résultats classiques sur le temps d'atteinte d'une barrière racine par un processus de Bessel standard, voir par exemple Yor [Yor84].

### IV.2.3 La méthode des images

Enfin, nous discutons également dans [3] d'une méthode martingale pour calculer la densité de certains derniers temps de passage dans l'esprit de la méthode des images de Lerche [Ler86]. Au lieu de se fixer une fonction barrière  $f$ , l'idée ici est de partir d'une solution de l'équation (IV.1), c'est-à-dire en un sens de la densité du dernier temps de passage, et de définir la fonction  $f$  associée implicitement. Les principaux exemples de solution de (IV.1) sont généralement construits à partir de la densité de transition de la diffusion. Voici un exemple d'application de la méthode dans le cas le plus simple.

### Dernier temps de passage à partir de la densité de transition

Il est classique que la densité de transition  $q(t; x, y)$  d'une diffusion linéaire est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \mathcal{G}q$$

pour  $t > 0$  et  $x, y$  appartenant à l'intérieur de  $I$ . Supposons donc que  $X$  est à valeurs dans  $I = (0, +\infty[$ , et soient  $a \in ]0, 1[$  et  $\zeta > 0$  deux paramètres tels que  $aq(\zeta; 0, 0) < \inf_{t < \zeta} q(\zeta - t; 0, 0)$ . On peut alors définir une fonction  $f$  implicitement par la relation

$$q(\zeta - t; f(t), 0) = aq(\zeta; 0, 0)$$

et l'on a  $\zeta = \inf\{t \geq 0, f(t) = 0\} = \zeta(f)$ . Le théorème IV.4 fournit alors dans ce cas le résultat suivant.

**Proposition IV.5.** *La densité de  $G_f$  est donnée pour  $t \in ]0, \zeta[$  par*

$$\mathbb{P}_x(G_f \in dt) = -\frac{q(t; x, f(t))}{aq(\zeta; 0, 0)s'(f(t))} \frac{\partial q(\zeta - t; y, 0)}{\partial y} \Big|_{y=f(t)} dt.$$

Par exemple, si l'on considère un processus de Bessel d'indice  $\nu > -1$ , on obtient la barrière

$$f^{(\nu)}(t) = \sqrt{-2(\zeta - t) \ln \left( a \left( 1 - \frac{t}{\zeta} \right)^{\nu+1} \right)}, \quad 0 \leq t < \zeta,$$

et la densité du dernier temps d'atteinte de la barrière  $f^{(\nu)}$  s'écrit :

$$\mathbb{P}_x^{(\nu)}(G_{f^{(\nu)}} \in dt) = \frac{1}{\zeta - t} \left( f^{(\nu)}(t) \right)^{2\nu+2} q^{(\nu)}(t; x, f^{(\nu)}(t)) dt, \quad 0 < t < \zeta.$$

Par inversion du temps, on peut également obtenir la loi du premier temps de passage contre une frontière similaire, résultat pour lequel nous référons par exemple à Deaconu & Herrmann [DH13, prop. 2.3].

### IV.3 Temps d'atteinte et perpétuités

Nous concluons cette synthèse par un résultat plus anecdotique sur la perpétuité translatée de Dufresne. Le résultat originel de Dufresne [Duf90] établit que pour  $\mu > 0$ ,

$$\int_0^{+\infty} e^{-2(B_t + \mu t)} dt \stackrel{(\text{loi})}{=} \frac{2}{\mathbf{\Gamma}_\mu}$$

où  $\mathbf{\Gamma}_\mu$  désigne une variable aléatoire suivant la loi Gamma de paramètre  $\mu$ . De nombreuses généralisations de cette identité ont par la suite été proposées, notamment par Yor [Yor01]. Différents liens ont également été établis entre ces perpétuités et les temps d'atteinte de certaines diffusions, et nous référons à Salminen & Yor [SY05] pour une étude générale sur le sujet. En particulier, la perpétuité de Dufresne a par exemple même loi que le premier temps d'atteinte de 0 d'un processus de Bessel d'indice  $-\mu$  partant de 1. Nous présentons ci-dessous un résultat dans le même esprit.

Considérons les mouvements browniens géométriques :

$$\mathcal{E}_t = \exp\left(B_t + \frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$$

où  $B$  est un mouvement brownien standard. Nous avons obtenu les lois de perpétuités associées à ces deux processus.

**Théorème.** Soit  $b > 0$  et  $a^2 - b \geq 0$ . Soit  $(R_t^{(3, \sqrt{a^2 - b})}, t \geq 0)$  un processus de Bessel de dimension 3 avec dérive  $\sqrt{a^2 - b}$ . On pose, pour  $z \geq 0$ ,

$$T_z^{(3, \sqrt{a^2 - b})} = \inf \left\{ t \geq 0, R_t^{(3, \sqrt{a^2 - b})} = z \right\} \quad \text{et} \quad \eta(z) = \int_0^z \frac{du}{u^2 + 2au + b}.$$

Alors, si  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{M}_0 = x > 0$ , on a les identités en loi suivantes :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{E}_s^2}{(\mathcal{E}_s^2 + 2a\mathcal{E}_s + b)^2} ds \stackrel{(loi)}{=} T_{\eta(+\infty)}^{(3, \sqrt{a^2 - b})} \quad \text{avec} \quad R_0^{(3, \sqrt{a^2 - b})} = \eta(x),$$

et

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{M}_s^2}{(\mathcal{M}_s^2 + 2a\mathcal{M}_s + b)^2} ds \stackrel{(loi)}{=} T_{\eta(+\infty)}^{(3, \sqrt{a^2 - b})} \quad \text{avec} \quad R_0^{(3, \sqrt{a^2 - b})} = \eta(b/x).$$

Observons que l'on retrouve le résultat de Salminen & Yor [SY04] sur la perpétuité translatée de Dufresne en laissant tendre  $b \rightarrow 0$ . Le résultat original de Dufresne (lorsque  $\mu = 1/2$ ) s'obtient alors en laissant également tendre  $a \rightarrow 0$ . On peut par ailleurs remarquer que l'on peut passer d'une égalité à l'autre grâce à l'identité en loi  $\mathcal{M} \stackrel{(loi)}{=} \frac{1}{\mathcal{E}}$ .

La clé de ce résultat vient du fait que l'on sache résoudre explicitement l'équation différentielle ordinaire  $(x^2 + 2ax + b)^2 f''(x) = \lambda f(x)$ . La preuve directe pour le cas de  $\mathcal{E}$  repose alors sur la transformée de Lamperti, qui donne l'existence d'un processus de Bessel  $R$  de dimension 3 tel que

$$\mathcal{E}_t = R_{A_t} \quad \text{avec} \quad A_t = \langle \mathcal{E} \rangle_t = \int_0^t (\mathcal{E}_s)^2 ds.$$

On a alors l'identité

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathcal{E}_s^2}{(\mathcal{E}_s^2 + 2a\mathcal{E}_s + b)^2} ds = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(R_u^2 + 2aR_u + b)^2} du$$

et l'on construit une martingale qui permet d'obtenir explicitement la transformée de Laplace :

$$\mathbb{E}_x \left[ \exp \left( -\lambda \int_0^{+\infty} \frac{1}{(R_u^2 + 2aR_u + b)^2} du \right) \right] = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + 2ax + b} \frac{\sinh(\eta(x)\sqrt{2\lambda + \Delta})}{\sinh(\eta(+\infty)\sqrt{2\lambda + \Delta})}.$$

On remarque alors que cette transformée coïncide avec celle du premier temps de passage d'un processus de Bessel avec dérive. On peut également prouver directement le résultat pour  $\mathcal{M}$ , cette fois en utilisant le théorème de Dambis, Dubins et Schwarz qui nous donne l'existence d'un mouvement brownien  $W$  partant de  $x$  tel que :

$$\mathcal{M}_t = W_{\langle \mathcal{M} \rangle_t} \quad \text{avec} \quad \langle \mathcal{M} \rangle_t = \int_0^t (\mathcal{M}_s)^2 ds.$$

Le résultat s'obtient alors à l'aide de la formule de retournement du temps, du troisième théorème de Ray-Knight, ainsi que d'une décomposition des processus de Bessel de dimension 3 à leur dernier temps de passage.

Nous avons également dans ce même travail étudié la loi du couple d'annuités :

$$\left( \int_0^t (\mathcal{E}_s - 1)_+ ds, \int_0^t (\mathcal{E}_s - 1)_- ds \right)$$

répondant ainsi à une question soulevée dans [PRY10, chapitre 4]. La démarche est ici on ne peut plus classique et repose simplement sur la formule de Feynman-Kac.



# Publications présentées dans ce manuscrit

---

- [1] C. Profeta. Penalization of a positively recurrent diffusion by an exponential function of its local time. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, Vol. **46** (4) : 681-718, 2010.
- [2] C. Profeta. Penalizing null recurrent diffusions. *Electron. J. Probab.* **17**, no. 69, 1-23, 2012.
- [3] C. Profeta. On last passage times of linear diffusions to curved boundaries. *Markov Processes Relat. Fields* **19**, 735-762, 2013.
- [4] C. Profeta. On Dufresne's translated perpetuity and some Black-Scholes annuities. *Analitika*, Vol. **7** (1) : 7-19, 2014.
- [5] C. Profeta. Some limiting laws associated with the integrated Brownian motion. *ESAIM : P&S*, Vol. **19**, 148-171, 2015.
- [6] C. Profeta and T. Simon. Persistence of integrated stable processes. *Probab. Theory Relat. Fields* **162** (3), 463-485, 2015.
- [7] C. Profeta and T. Simon. Windings of the stable Kolmogorov process. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **12** (1), 115-127, 2015.
- [8] C. Profeta and T. Simon. On the harmonic measure of stable processes. *Séminaire de Probabilités XLVIII*, Lecture Notes in Math. **2168**, 325-345, 2016.
- [9] C. Profeta. A remark on positive sojourn times of symmetric processes. *J. Appl. Prob.*, Vol. **55**, 69-81, 2018.
- [10] C. Profeta. On the supremum of products of symmetric stable processes. *Electron. Commun. Probab.*, Vol. **23**, paper no. 97, 2018.
- [11] C. Profeta, K. Yano and Y. Yano. Local time penalizations with various clocks for one-dimensional diffusions. *J. Math. Soc. Japan.*, Vol. **71**, Number 1, 203-233, 2019.
- [12] J.-F. Jabir and C. Profeta. A stable Langevin model with diffusive-reflective boundary conditions. *Stochastic Process. Appl.*, Vol. **129**(11), 4269-4293, 2019.
- [13] C. Profeta and T. Simon. Cramér's estimate for stable processes with power drift. *Electron. J. Probab.*, Vol. **24**, paper no. 17, 2019.
- [14] C. Profeta. Persistence and exit times for some additive functionals of skew Bessel processes. *J. Theor. Probab.*, <https://doi.org/10.1007/s10959-019-00966-1>, 2019.



# Bibliographie

- [AA19] L. Alili and A. Aylwin, *On the semi-group of a scaled skew Bessel process*, Statist. Probab. Lett. **145** (2019), 96–102.
- [AD13] F. Aurzada and S. Dereich, *Universality of the asymptotics of the one-sided exit problem for integrated processes*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **49** (2013), no. 1, 236–251.
- [AK16] F. Aurzada and T. Kramm, *The first passage time problem over a moving boundary for asymptotically stable Lévy processes*, J. Theoret. Probab. **29** (2016), no. 3, 737–760.
- [AP10] L. Alili and P. Patie, *Boundary-crossing identities for diffusions having the time-inversion property*, J. Theoret. Probab. **23** (2010), no. 1, 65–84.
- [AS15] F. Aurzada and T. Simon, *Persistence probabilities and exponents*, Lévy matters. V, Lecture Notes in Math., vol. 2149, Springer, Cham, 2015, pp. 183–224.
- [BBK<sup>+</sup>09] K. Bogdan, T. Byczkowski, T. Kulczycki, M. Ryznar, R. Song, and Z. Vondraček, *Potential analysis of stable processes and its extensions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1980, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [BD88] N. H. Bingham and R. A. Doney, *On higher-dimensional analogues of the arc-sine law*, J. Appl. Probab. **25** (1988), no. 1, 120–131.
- [BD94] J. Bertoin and R. A. Doney, *Cramér’s estimate for Lévy processes*, Statist. Probab. Lett. **21** (1994), no. 5, 363–365.
- [Ber96] J. Bertoin, *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 121, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [Ber99] ———, *Structure of shocks in Burgers turbulence with stable noise initial data*, Comm. Math. Phys. **203** (1999), no. 3, 729–741.
- [BGR61] R. M. Blumenthal, R. K. Gettoor, and D. B. Ray, *On the distribution of first hits for the symmetric stable processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1961), 540–554.
- [Ble12] S. Blei, *On symmetric and skew Bessel processes*, Stochastic Process. Appl. **122** (2012), no. 9, 3262–3287.
- [BMS13] A. J. Bray, S. N. Majumdar, and G. Schehr, *Persistence and first-passage properties in non-equilibrium systems*, Advances in Physics **62** (2013), no. 3, 225–361.
- [BnB04] R. Bañuelos and K. Bogdan, *Symmetric stable processes in cones*, Potential Anal. **21** (2004), no. 3, 263–288.
- [BnB05] ———, *Symmetric stable processes in parabola-shaped regions*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no. 12, 3581–3587.

- [BNR87] A. Buonocore, A. G. Nobile, and L. M. Ricciardi, *A new integral equation for the evaluation of first-passage-time probability densities*, Adv. in Appl. Probab. **19** (1987), no. 4, 784–800.
- [BPY89a] M. Barlow, J. Pitman, and M. Yor, *On Walsh’s Brownian motions*, Séminaire de Probabilités, XXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, pp. 275–293.
- [BPY89b] ———, *Une extension multidimensionnelle de la loi de l’arc sinus*, Séminaire de Probabilités, XXIII, Lecture Notes in Math., vol. 1372, Springer, Berlin, 1989, pp. 294–314.
- [BW96] J. Bertoin and W. Werner, *Stable windings*, Ann. Probab. **24** (1996), no. 3, 1269–1279.
- [BY87] P. Biane and M. Yor, *Valeurs principales associées aux temps locaux browniens*, Bull. Sci. Math. (2) **111** (1987), no. 1, 23–101.
- [Ç15] U. Çetin, *On certain integral functionals of squared Bessel processes*, Stochastics **87** (2015), no. 6, 1033–1060.
- [CUB11] L. Chaumont and G. Uribe Bravo, *Markovian bridges : weak continuity and pathwise constructions*, Ann. Probab. **39** (2011), no. 2, 609–647.
- [Deb09] P. Debs, *Penalisation of the standard random walk by a function of the one-sided maximum, of the local time, or of the duration of the excursions*, Séminaire de Probabilités XLII, Lecture Notes in Math., vol. 1979, Springer, Berlin, 2009, pp. 331–363.
- [Deb12] ———, *Penalisation of the symmetric random walk by several functions of the supremum*, Markov Process. Related Fields **18** (2012), no. 4, 651–680.
- [Des07] J. Desbois, *Occupation times for planar and higher dimensional Brownian motion*, J. Phys. A **40** (2007), no. 10, 2251–2262.
- [DH13] M. Deaconu and S. Herrmann, *Hitting time for Bessel processes—walk on moving spheres algorithm (WoMS)*, Ann. Appl. Probab. **23** (2013), no. 6, 2259–2289.
- [DPSZ02] A. Dembo, B. Poonen, Q.-M. Shao, and O. Zeitouni, *Random polynomials having few or no real zeros*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 4, 857–892.
- [Duf90] D. Dufresne, *The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding*, Scand. Actuar. J. (1990), no. 1-2, 39–79.
- [DV13] R. A. Doney and S. Vakeroudis, *Windings of planar stable processes*, Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Math., vol. 2078, Springer, Cham, 2013, pp. 277–300.
- [ES17] P. A. Ernst and L. Shepp, *On occupation times of the first and third quadrants for planar Brownian motion*, J. Appl. Probab. **54** (2017), no. 1, 337–342.
- [Fel71] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- [GJW99] P. Groeneboom, G. Jongbloed, and J. A. Wellner, *Integrated Brownian motion, conditioned to be positive*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 3, 1283–1303.
- [Gol71] M. Goldman, *On the first passage of the integrated Wiener process*, Ann. Mat. Statist. **42** (1971), 2150–2155.
- [Gol91] C. M. Goldie, *Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations*, Ann. Appl. Probab. **1** (1991), no. 1, 126–166.

- [Gro89] P. Groeneboom, *Brownian motion with a parabolic drift and Airy functions*, Probab. Theory Related Fields **81** (1989), no. 1, 79–109.
- [GS94] R. K. Gettoor and M. J. Sharpe, *On the arc-sine laws for Lévy processes*, J. Appl. Probab. **31** (1994), no. 1, 76–89.
- [GT11] P. Groeneboom and N. M. Temme, *The tail of the maximum of Brownian motion minus a parabola*, Electron. Commun. Probab. **16** (2011), 458–466.
- [HP99] J. Hüslér and V. Piterbarg, *Extremes of a certain class of Gaussian processes*, Stochastic Process. Appl. **83** (1999), no. 2, 257–271.
- [IK00] Y. Isozaki and S. Kotani, *Asymptotic estimates for the first hitting time of fluctuating additive functionals of Brownian motion*, Séminaire de Probabilités, XXXIV, Lecture Notes in Math., vol. 1729, Springer, Berlin, 2000, pp. 374–387.
- [IW62] N. Ikeda and S. Watanabe, *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 79–95.
- [IW94] Y. Isozaki and S. Watanabe, *An asymptotic formula for the Kolmogorov diffusion and a refinement of Sinai’s estimates for the integral of Brownian motion*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **70** (1994), no. 9, 271–276.
- [Jac12] E. Jacob, *A Langevin process reflected at a partially elastic boundary : I*, Stochastic Process. Appl. **122** (2012), no. 1, 191–216.
- [Jac13] ———, *Langevin process reflected on a partially elastic boundary II*, Séminaire de Probabilités XLV, Lecture Notes in Math., vol. 2078, Springer, Cham, 2013, pp. 245–275.
- [KKM04] C. Klüppelberg, A. E. Kyprianou, and R. A. Maller, *Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes*, Ann. Appl. Probab. **14** (2004), no. 4, 1766–1801.
- [Kni69] F. B. Knight, *Brownian local times and taboo processes*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 173–185.
- [KPW14] A. E. Kyprianou, J. C. Pardo, and A. R. Watson, *Hitting distributions of  $\alpha$ -stable processes via path censoring and self-similarity*, Ann. Probab. **42** (2014), no. 1, 398–430.
- [KW14] A. E. Kyprianou and A. R. Watson, *Potentials of stable processes*, Séminaire de Probabilités XLVI, Lecture Notes in Math., vol. 2123, Springer, Cham, 2014, pp. 333–343.
- [Kyp14] A. E. Kyprianou, *Fluctuations of Lévy processes with applications*, second ed., Universitext, Springer, Heidelberg, 2014, Introductory lectures.
- [Lac91] A. Lachal, *Sur le premier instant de passage de l’intégrale du mouvement brownien*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **27** (1991), no. 3, 385–405.
- [Lac94] ———, *Dernier instant de passage pour l’intégrale du mouvement brownien*, Stochastic Process. Appl. **49** (1994), no. 1, 57–64.
- [Lac97] ———, *Les temps de passage successifs de l’intégrale du mouvement brownien*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **33** (1997), no. 1, 1–36.
- [Lac00] ———, *First exit time from a bounded interval for a certain class of additive functionals of Brownian motion*, J. Theoret. Probab. **13** (2000), no. 3, 733–775.

- [Lac03] ———, *Application de la théorie des excursions à l'intégrale du mouvement brownien*, Séminaire de Probabilités XXXVII, Lecture Notes in Math., vol. 1832, Springer, Berlin, 2003, pp. 109–195.
- [Lac06] ———, *Some explicit distributions related to the first exit time from a bounded interval for certain functionals of Brownian motion*, J. Theoret. Probab. **19** (2006), no. 4, 757–771.
- [Leh02] A. Lehmann, *Smoothness of first passage time distributions and a new integral equation for the first passage time density of continuous Markov processes*, Adv. in Appl. Probab. **34** (2002), no. 4, 869–887.
- [Lej06] A. Lejay, *On the constructions of the skew Brownian motion*, Probab. Surv. **3** (2006), 413–466.
- [Ler86] H. R. Lerche, *Boundary crossing of Brownian motion*, Lecture Notes in Statistics, vol. 40, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Li03] W. V. Li, *The first exit time of a Brownian motion from an unbounded convex domain*, Ann. Probab. **31** (2003), no. 2, 1078–1096.
- [LS02] M. Lifshits and Z. Shi, *The first exit time of Brownian motion from a parabolic domain*, Bernoulli **8** (2002), no. 6, 745–765.
- [LS04] W. V. Li and Q.-M. Shao, *Lower tail probabilities for Gaussian processes*, Ann. Probab. **32** (2004), no. 1A, 216–242.
- [LS10] A. Lachal and T. Simon, *Chung's law for homogeneous Brownian functionals*, Rocky Mountain J. Math. **40** (2010), no. 2, 561–579.
- [McK63] H. P. McKean, *A winding problem for a resonator driven by a white noise*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1963), 227–235.
- [MH02] P. J. Méndez-Hernández, *Exit times from cones in  $\mathbf{R}^n$  of symmetric stable processes*, Illinois J. Math. **46** (2002), no. 1, 155–163.
- [MH07] ———, *Exit times of symmetric  $\alpha$ -stable processes from unbounded convex domains*, Electron. J. Probab. **12** (2007), no. 4, 100–121.
- [Mil77] P. W. Millar, *Random times and decomposition theorems*, Probability (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXXI, Univ. Illinois, Urbana, Ill., 1976), Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1977, pp. 91–103.
- [MK04] G. Molchan and A. Khokhlov, *Small values of the maximum for the integral of fractional Brownian motion*, J. Statist. Phys. **114** (2004), no. 3-4, 923–946.
- [MMBB<sup>+</sup>95] M. Marcos-Martin, D. Beysens, J.-P. Bouchaud, C. Godrèche, and I. Yekutieli, *Self-diffusion and 'visited' surface in the droplet condensation problem (breath figures)*, Physica A **214** (1995), 396–412.
- [Mou90] T. S. Mountford, *Limiting behaviour of the occupation of wedges by complex Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields **84** (1990), no. 1, 55–65.
- [MW95] T. Meyre and W. Werner, *On the occupation times of cones by Brownian motion*, Probab. Theory Related Fields **101** (1995), no. 3, 409–419.
- [MY06] R. Mansuy and M. Yor, *Random times and enlargements of filtrations in a Brownian setting*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1873, Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [Nak97] K. Nakayama, *On the asymptotic behavior of the occupation time in cones of  $d$ -dimensional Brownian motion*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **73** (1997), no. 2, 26–28.

- [NN10] J. Najnudel and A. Nikeghbali, *A remarkable  $\sigma$ -finite measure associated with last passage times and penalisation problems*, Contemporary quantitative finance, Springer, Berlin, 2010, pp. 77–97.
- [NN13] ———, *On penalisation results related with a remarkable class of submartingales*, Markov Process. Related Fields **19** (2013), no. 4, 763–790.
- [NP13] A. Nikeghbali and E. Platen, *A reading guide for last passage times with financial applications in view*, Finance Stoch. **17** (2013), no. 3, 615–640.
- [NRY09] J. Najnudel, B. Roynette, and M. Yor, *A global view of Brownian penalisations*, MSJ Memoirs, vol. 19, Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2009.
- [Pet73] V. V. Petrov, *The order of growth of sums of dependent random variables*, Teor. Veroyatnost. i Primenen. **18** (1973), 358–361.
- [Pic69] J. Pickands, *Asymptotic properties of the maximum in a stationary Gaussian process*, Trans. Amer. Math. Soc. **145** (1969), 75–86.
- [PRY10] C. Profeta, B. Roynette, and M. Yor, *Option prices as probabilities*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2010, A new look at generalized Black-Scholes formulae.
- [PY81] J. Pitman and M. Yor, *Bessel processes and infinitely divisible laws*, Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), Lecture Notes in Math., vol. 851, Springer, Berlin, 1981, pp. 285–370.
- [Rie38a] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels.*, Acta Sci. Math. Szeged. **9** (1938), 1–42.
- [Rie38b] ———, *Rectification au travail "Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels".*, Acta Sci. Math. Szeged. **9** (1938), 116–118.
- [Rog72] B. A. Rogozin, *The distribution of the first hit for stable and asymptotically stable walks on an interval*, Theory Probab. Appl **17** (1972), 332–338.
- [RVY05] B. Roynette, P. Vallois, and M. Yor, *Limiting laws for long Brownian bridges perturbed by their one-sided maximum. III*, Period. Math. Hungar. **50** (2005), no. 1-2, 247–280.
- [RVY06a] ———, *Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by its maximum, minimum and local time. II*, Studia Sci. Math. Hungar. **43** (2006), no. 3, 295–360.
- [RVY06b] ———, *Limiting laws associated with Brownian motion perturbed by normalized exponential weights. I*, Studia Sci. Math. Hungar. **43** (2006), no. 2, 171–246.
- [RVY06c] ———, *Some penalisations of the Wiener measure*, Jpn. J. Math. **1** (2006), no. 1, 263–290.
- [RVY07] ———, *Some extensions of Pitman and Ray-Knight theorems for penalized Brownian motions and their local times. IV*, Studia Sci. Math. Hungar. **44** (2007), no. 4, 469–516.
- [RVY08] ———, *Penalizing a BES( $d$ ) process ( $0 < d < 2$ ) with a function of its local time. V*, Studia Sci. Math. Hungar. **45** (2008), no. 1, 67–124.
- [RVY09a] ———, *Brownian penalisations related to excursion lengths. VII*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **45** (2009), no. 2, 421–452.
- [RVY09b] ———, *Penalizations of multidimensional Brownian motion. VI*, ESAIM Probab. Stat. **13** (2009), 152–180.

- [RY08] B. Roynette and M. Yor, *Ten penalisation results of Brownian motion involving its one-sided supremum until first and last passage times. VIII*, J. Funct. Anal. **255** (2008), no. 9, 2606–2640.
- [RY10] ———, *Local limit theorems for Brownian additive functionals and penalisation of Brownian paths. IX*, ESAIM **14** (2010), 65–92.
- [Sal97] P. Salminen, *On last exit decompositions of linear diffusions*, Studia Sci. Math. Hungar. **33** (1997), no. 1-3, 251–262.
- [Sim07] T. Simon, *The lower tail problem for homogeneous functionals of stable processes with no negative jumps*, ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat. **3** (2007), 165–179.
- [Sim08] ———, *On the Hausdorff dimension of regular points of inviscid Burgers equation with stable initial data*, J. Stat. Phys. **131** (2008), no. 4, 733–747.
- [Sin92a] Y. G. Sinai, *Distribution of some functionals of the integral of a random walk*, Teoret. Mat. Fiz. **90** (1992), no. 3, 323–353.
- [Sin92b] ———, *Statistics of shocks in solutions of inviscid Burgers equation*, Comm. Math. Phys. **148** (1992), no. 3, 601–621.
- [Spi58] F. Spitzer, *Some theorems concerning 2-dimensional Brownian motion*, Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 187–197.
- [SV09] P. Salminen and P. Vallois, *On subexponentiality of the Lévy measure of the diffusion inverse local time ; with applications to penalizations*, Electron. J. Probab. **14** (2009), no. 67, 1963–1991.
- [SY04] P. Salminen and M. Yor, *On Dufresne’s perpetuity, translated and reflected*, Stochastic processes and applications to mathematical finance, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004, pp. 337–354.
- [SY05] ———, *Perpetual integral functionals as hitting and occupation times*, Electron. J. Probab. **10** (2005), no. 11, 371–419.
- [Wat98] S. Watanabe, *Invariants of one-dimensional diffusion processes and applications*, J. Korean Math. Soc. **35** (1998), no. 3, 637–658.
- [Wat75] ———, *On time inversion of one-dimensional diffusion processes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **31** (1974/75), 115–124.
- [Yor84] M. Yor, *On square-root boundaries for Bessel processes, and pole-seeking Brownian motion*, Stochastic analysis and applications (Swansea, 1983), Lecture Notes in Math., vol. 1095, Springer, Berlin, 1984, pp. 100–107.
- [Yor01] ———, *Exponential functionals of Brownian motion and related processes*, Springer Finance, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [YY15] K. Yano and Y. Yano, *On  $h$ -transforms of one-dimensional diffusions stopped upon hitting zero*, In memoriam Marc Yor—Séminaire de Probabilités XLVII, Lecture Notes in Math., vol. 2137, Springer, Cham, 2015, pp. 127–156.
- [YYY09] K. Yano, Y. Yano, and M. Yor, *Penalising symmetric stable Lévy paths*, J. Math. Soc. Japan **61** (2009), no. 3, 757–798.
- [Zol86] V. M. Zolotarev, *One-dimensional stable distributions*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 65, American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.